

On the p -adic absolute CM-period symbol

京都大学大学院・理学研究科

(Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University)

加塩 朋和 (Tomokazu Kashio), 吉田 敬之 (Hiroyuki Yoshida)

Introduction

CM ピリオド, p 進ピリオドと多重 Γ 函数, p 進多重 Γ 函数の関係について述べる. 導入としてここでは二つの公式を紹介する.

The Chowla-Selberg formula. K :discriminant を $-d$ とする虚二次体, χ は対応する Dirichlet 指標, $w := \# \{\text{roots of unity} \in K\}$, $h:K$ の類数, $L(s, \chi)$:指標に付随した L 函数, p_K :Shimura's CM-period symbol (CM 型のアーベル多様体のピリオドから定められる値 [18, 19]) と置き, $a \sim b$ は $a/b \in \overline{\mathbf{Q}}^\times$ を意味するとする. このとき

$$(1) \quad \pi p_K(\text{id}, \text{id})^2 \sim \prod_{a=1}^d \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{w\chi(a)/2h} = d \exp\left(\frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)}\right).$$

この式の一般化を考える. 一つは多重化, 即ち Γ 函数と虚二次体を多重 Γ 函数と CM 体へと拡張する (Yoshida [22, 23, 24], 及び §1.) そして今回, 更に p 進類似を考えた (§2~.) 次の公式は式 (1) の p 進類似と見て取れる.

The Gross-Koblitz formula [10]. 記号は式 (1) と同じとする. 更に $K/\mathbf{Q}$ で素イデアル (p) が分解すると仮定し, そのうち K に p 進位相を入れるイデアルを $\mathfrak{P}$ と置く. すると

$$(2) \quad \log_p\left(\frac{\mathfrak{P}^\rho}{\mathfrak{P}}\right) = \frac{w}{2h} \sum_{a=1}^d \chi(a) \log_p \Gamma_p\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{L'_p(0, \chi\omega)}{L(0, \chi)}.$$

ただし ρ :複素共役写像, $\log_p$:Iwasawa's p -adic log function [11], Γ_p :Morita's p -adic Γ function [15], L_p :Kubota-Leopoldt's p -adic L function, ω :Teichmüller 指標と置いた. ここでは左辺の値を次で定める. $\mathfrak{P}^h = (\Pi)$ となる $\Pi \in K$ を選び, $\log_p(\mathfrak{P}^\rho/\mathfrak{P}) := \frac{1}{h} \log_p(\Pi^\rho/\Pi)$. この値は Π の取り方によらない. 式 (1) の左辺は CM ピリオド, 即ち幾何的な値である. 実は式 (2) の左辺も幾何的な解釈, 即ち p 進ピリオドを用いて書ける (§3.)

1 The complex case

まずは吉田教授の CM ピリオドに関する予想について説明する. この内容については吉田教授の本 [24] が詳しい.

1.1 Shintani's formula

F を n 次総実体とし, その整イデアル $\mathfrak{f}$ に対し $C_{\mathfrak{f}}$ は $\mathfrak{f}\infty_1 \dots \infty_n$ を法とするイデアル類群と置く. ただし $\{\infty_1, \dots, \infty_n\}$ は archimedean prime の全体. この時 $\mathfrak{c} \in C_{\mathfrak{f}}$ に関する partial ζ 関数 $\zeta_F(s, \mathfrak{c}) := \sum_{\text{整イデアル } \mathfrak{a} \in \mathfrak{c}} N(\mathfrak{a})^{-s}$ に対して次の新谷公式 [21] が成り立つ.

Theorem (Shintani).

$$\zeta'_{\mathfrak{f}}(0, \mathfrak{c}) = \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j \in J} \sum_{z \in R(\mathfrak{c}, j)} L\Gamma_{r(j)}(z^{\sigma}, v_j^{\sigma}) + \text{correction terms}.$$

ただし $J_F: F$ から $\mathbf{C}$ (p 進の場合は $\mathbf{C}_p$) の中への同型全体, $v_j: O_F(F$ の整数環) の元で総正なものを成分に持つ $r(j)$ 次のベクトル, $J, R(\mathfrak{c}, j)$: 有限集合である. 更に多重 ζ 関数及び Barnes の多重 Γ 関数を $z > 0, v = (v_1, \dots, v_r), v_i > 0$ に対して次で定める.

$$\zeta_r(s, v, z) := \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^r} (z + v^t n)^{-s}, \quad L\Gamma_r(z, v) := \zeta'_r(0, v, z).$$

ここで $\mathbf{Z}_{\geq 0}^r$ は非負整数を成分にもつ r 次ベクトル全体を表す. ただし $L\Gamma_r(z, v) = \log\left(\frac{\Gamma_r(z, v)}{\rho_r(v)}\right)$ と二つの関数に分けて書くのが通例である.

Remark. $J, v_j, R(\mathfrak{c}, j)$ はコーン分解と呼ばれる操作による. 吉田教授は次を示した.

- 各 v_j の成分 $v_{j,i}$ は $O_F^{\times}$ の元で取れる.
- *correction terms* の部分は有限集合 I 及び $a_i, b_i \in F$ が存在して $\sum_{\sigma \in J_F} \sum_{i \in I} a_i^{\sigma} \log b_i^{\sigma}$ の形で書ける.

$\chi: C_{\mathfrak{f}}$ の指標に対し次の記号を定義する.

$$X^{\sigma}(\chi) := \sum_{\mathfrak{c} \in C_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{c}) \left(\sum_{j \in J} \sum_{z \in R(\mathfrak{c}, j)} L\Gamma_{r(j)}(z^{\sigma}, v_j^{\sigma}) + \sum_{i \in I} a_i^{\sigma} \log b_i^{\sigma} \right).$$

すると新谷公式は次の形に言いなおせる. $L(s, \chi)$: 指標 χ に付随した L 関数に対し

$$(3) \quad L'(0, \chi) = \sum_{\sigma \in J_F} X^{\sigma}(\chi).$$

1.2 Conjecture C

K : CM 体で K/F がアーベル拡大となるものとする. $G := \text{Gal}(K/F)$, $\hat{G}_-$: G の奇指標全体とし, $\tau = \text{id}, \rho$, その他に対応して $\mu(\tau) := 1, -1, 0$ と置く.

Conjecture C (Yoshida). $\tau \in G, \sigma \in J_F$ に対して

$$p_K(\sigma, \tau\sigma) \sim \pi^{-\mu(\tau)/2} \exp \left(\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}_-} \frac{\chi(\tau) X^\sigma(\chi_*)}{L(0, \chi)} \right).$$

ここで χ_* は原始指標に取り直した指標を表す.

Remark. この式の右辺を $g_K(\sigma, \tau\sigma)$ と置き絶対 CM ペリオドと呼ぶ. この予想式は Chowla-Selberg 公式の一般化を与えている.

Example. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i), F = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ と置くと $O_F^\times \cap \{\text{総実な元}\} = \langle \epsilon \rangle, \epsilon = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ となる. また $p_K(\text{id}, \text{id}) \sim \exists L\text{-value}$ となる (Shimura [19].) その $L\text{-value}$ を使って数値実験すると (小数点以下 112 桁まで)

$$\left(\frac{L\text{-value の積}}{g_K(\text{id}, \text{id})^4} \right) = e^{22/41} \frac{245 + 60\sqrt{5}}{3 * 41}.$$

2 The p -adic case

以下が今回の共同研究の内容である. まずは道具となる新谷公式の p 進類似式 (Kashio [12, 13]) を導入する.

2.1 p -adic analogue of Shintani's formula

記号は §1.1 と同じとする. p を素数とし $\mathbf{C}_p := \widehat{\overline{\mathbf{Q}}_p}$ と置く. ただし $\widehat{}$ は p 進完備化を表す. また埋め込み $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ を固定しておく. $\theta_p := \omega \circ N$ (ノルムと Teichmüller 指標をつなげた指標) を考える. θ_p の法は p が奇素数なら $\prod_{\mathfrak{p} | (p)} \mathfrak{p}$, $p = 2$ なら $(p) \prod_{\mathfrak{p} | (p)} \mathfrak{p}$ となる. この整イデアルを同じ記号 $(p)_0$ と書く. C_f の指標 χ と整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し, $\chi_{\mathfrak{a}}$ で自明な写像 $C_{f\mathfrak{a}} \rightarrow C_f$ と χ をつなげた $C_{f\mathfrak{a}}$ の指標を表すこととする. また p 進多重 Γ 関数を Barnes の定義を真似て

$$L\Gamma_{p,r}(z, v) := \zeta'_{p,r}(0, v, z).$$

で定める. ここで $\zeta_{p,r}(s, v, z)$ は多重 ζ 関数の p 進類似である. $\chi: C_f$ の指標に対し前と同じ a_i, b_i を用いて

$$X_p^\sigma(\chi) := \sum_{c \in C_f} \chi(c) \left(\sum_{j \in J} \sum_{z \in R(c, j)} L\Gamma_{p,r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) + \sum_{i \in I} a_i^\sigma \log_p b_i^\sigma \right)$$

と定義しておく. 新谷公式の p 進類似式は次で表される.

Theorem (Kashio). 記号は上記の通りとし, χ_{θ_p} は $f(p)_0$ を法とする指標とみなす. この時

$$(4) \quad L'_p(0, \chi_{\theta_p}) = \sum_{\sigma \in J_F} X_p^\sigma(\chi_{(p)_0}).$$

2.2 Conjecture C_p

§1.2 と同様に記号 X_p^σ を用いて p 進絶対 CM ピリオドを定義したい. しかし p 進新谷公式中に表れる $X_p^\sigma(\chi_{(p)_0})$ は多くの場合退化した値となっている. 実際次のような式が成り立つ.

$$X_p^\sigma(\chi_{(p)_0}) = X_p^\sigma(\chi_{\mathfrak{p}_\sigma}) \prod_{\mathfrak{p} | (p), \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\sigma} (1 - \chi(\mathfrak{p})) + \text{correction terms.}$$

ただし $\mathfrak{p}_\sigma$ は (p) を割る素イデアルのうち $(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma \subset \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z|_p < 1\}$ ($| \cdot |_p$ は p 進付値) を満たすものとする. この考察から $X_p^\sigma(\chi_{\mathfrak{p}_\sigma})$ がより本質的な量であると考えられ次の定義を用いる. $\tau \in G, \sigma \in J_F$ に対して p 進 (対数) 絶対 CM ピリオドを

$$lg_{p,K}(\sigma, \tau\sigma) := -\frac{\mu(\tau)}{2} \log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma + \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}_-} \frac{\chi(\tau) X_p^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma})}{L(0, \chi)}.$$

$\log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma$ は式 (2) の時と同様に $(\mathfrak{p}_\sigma)^{h_F}$ の生成元を使って定義する. これは modulo $\mathbf{Q} \log_p O_{F^\sigma}^\times$ でのみ定まる値である. なお絶対 CM ピリオドの定義 (の対数) との類似性は興味深い. 次が我々の Main conjecture である.

Conjecture C_p (Yoshida, Kashio). $\mathfrak{p}_\sigma$ は K で完全分解していると仮定する. この時 $\tau \in G, \sigma \in J_F$ に対して

$$\frac{1}{2} \log_p \left(\frac{(\mathfrak{P}_{\tau\sigma})^\rho}{\mathfrak{P}_{\tau\sigma}} \right)^\sigma \approx lg_{p,K}(\sigma, \tau\sigma).$$

ただし J_F の元は適当に拡大しておいて J_K の元とみなし, $\varphi \in J_K$ に対し $\mathfrak{P}_\varphi$ は (p) を割る K の素イデアルのうち $(\mathfrak{P}_\varphi)^\varphi \subset \{z \in \mathbf{C}_p \mid |z|_p < 1\}$ を満たすものを取り, $\approx$ は両辺が mod $\mathbf{Q} \log_p O_{F^\sigma}^\times$ で等しいことを意味する. なお左辺の形は式 (2) と同様に一意的に定まる値である.

Remark. この予想式は Gross-Koblitz 公式の一般化を与えている. また実際はより精密な形を持つ. 即ち両辺の差 ($\in \mathbf{Q} \log_p O_{F^\sigma}^\times$) に関する予想である. これを用いると後述の Gross 予想を導くことができる (§4.)

Example. K, F は先の例と同じとする. この時 $p = 11, 19, 29$ は F まで完全分解で, (p) を割る二つの素イデアルの内一つが K で完全分解, もう一つは remain prime. $p = 59$ とすると K まで完全分解となっている. $h_F = h_K = 1$ となっており $\mathfrak{p}_{\text{id}}, \mathfrak{P}_{\text{id}}$ の生成元を $\pi_{\text{id}}, \Pi_{\text{id}}$ と置くと $p = 11, 19, 29, 59$ に対し $(\pi_{\text{id}}, \Pi_{\text{id}}) = (4 + \sqrt{5}, \frac{-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}} i)$,

$(\frac{9+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-3\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i), (\frac{11+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+3\sqrt{5}}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i), (8 + \sqrt{5}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{13+\sqrt{5}}{2}}i).$
 $\sigma, \tau = \text{id}$ とし $lg_{p,K}(\text{id}, \text{id}) - \frac{1}{2} \log_p \left(\frac{\Pi_{\text{id}}^p}{\Pi_{\text{id}}} \right)$ を計算すると (p 進数として 40 桁以上)

$$p = 11, 19, 29, 59 \text{ に対し } \frac{-23 \log_p \epsilon}{4 * 41 * p}, \frac{-175 \log_p \epsilon}{4 * 41 * p}, \frac{-2087 \log_p \epsilon}{4 * 41 * p}, \frac{2178 \log_p \epsilon}{4 * 41 * p}.$$

3 Comparison of cohomologies

conjecture C は CM ピリオドと多重 Γ 関数との関係を表したものである。実は conjecture C_p も p 進ピリオドと p 進多重 Γ 関数との関係式だと見て取れる。まずは CM ピリオドをコホモロジーの言葉で表してみる。 A を CM 型 (K, Φ) を持ち K による虚数乗法も含めて代数体 k 上定義されたアーベル多様体とする。すると虚数乗法論 [19] より $K^* \subset k$, ただし (K^*, Φ^*) を (K, Φ) の reflex と置いた。次の自然な $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ -同型を考える。

$$I_{\text{dR}} : H_{\text{dR}}^1(A) \otimes_k \mathbb{C} \cong H_{\mathbb{B}}^1(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

ここで $H_{\text{dR}}^1(A) \cong K \otimes_{\mathbb{Q}} k$ をドラムコホモロジー, $H_{\mathbb{B}}^1(A) \cong K$ を ($\mathbb{Q}$ 係数の) ベッチコホモロジーと置いた。またそれぞれの $K \otimes_{\mathbb{Q}} k$ -基底 c_{dR} , K -基底 $c_{\mathbb{B}}$ を固定しておく。この時 CM ピリオドは次の式で特徴付けられる。

$$I_{\text{dR}}(c_{\text{dR}} \otimes 1) = p_K(\Phi)(c_{\mathbb{B}} \otimes 1), \quad p_K(\Phi) := (\pi p_K(\sigma, \Phi))_{\sigma \in J_K} \in \bigoplus_{\sigma \in J_K} \mathbb{C} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

さて同様に p 進ピリオドを定めよう。 A が k の素イデアル $\mathfrak{p}$ で good reduction $A_{\mathfrak{p}}$ を持つとし次の自然な $K \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\text{cris}}$ -同型を考える。

$$I_{\text{cris}} : H_{\text{cris}}^1(A_{\mathfrak{p}}) \otimes_W B_{\text{cris}} \cong H_{\text{et}}^1(A_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}.$$

ただし $A_{\bar{k}} := A \otimes_k \bar{k}$, $H_{\text{cris}}(A_{\mathfrak{p}})$ はクリスタリンコホモロジー, $H_{\text{et}}(A_{\bar{k}})$ はエタールコホモロジー, W は $O_k/\mathfrak{p}$ 係数ヴィットベクター環, B_{cris} はある巨大な環である。先と同様に基底 c_{cris} , c_{et} を固定し次を p 進ピリオドの定義とする。

$$I_{\text{cris}}(c_{\text{cris}} \otimes 1) = p_{p,K}(\Phi)(c_{\text{et}} \otimes 1), \quad p_{p,K}(\Phi) \in K \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\text{cris}}.$$

p 進ピリオドの住む B_{cris} はとても巨大で $\mathbb{C}_p$ の元である p 進絶対 CM ピリオドとは無関係に見える。ところが虚数乗法論から導かれる次の Lemma が興味深い関係式を導く。

Lemma. $\varphi_{\mathfrak{p}}$ を $\mathfrak{p}$ でのフロベニウスとすると自然に $H_{\text{cris}}(A_{\mathfrak{p}}) \curvearrowright$ 作用する。この時 $\Pi \in K$ が存在し $\varphi_{\mathfrak{p}}(c_{\text{cris}}) = \Pi c_{\text{cris}}$. さらにこの元は $\Pi O_K = \prod_{\sigma \in \Phi^*} (N_{k/K^*}(\mathfrak{p}))^{\sigma}$ を満たす。

簡単のため K まで (p) は不分岐とする。 $\sigma \in J_K$ に対し $p_{p,K}(\Phi) \in K \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\text{cris}} = \bigoplus_{\sigma \in J_K} B_{\text{cris}}$ の σ 成分で $p_{p,K}(\sigma, \Phi)$ を定義し, 更に線形性で分解することにより $\tau \in J_K$ に対して $p_{p,K}(\sigma, \tau)$ を定義する。上の Lemma を用いて計算すると次の Theorem が示され, conjecture C と同様に conjecture C_p の左辺は p 進ピリオドで表される量となる。

Theorem. $\sigma \in J_K, \tau \in G$ に対して

$$\frac{f_{\mathfrak{p}_\sigma}}{f_{\mathfrak{p}}} \log_p p_{p,K}(\sigma, \tau\sigma)^{1-\varphi_{\text{cris}}^{f_{\mathfrak{p}}}} = \frac{1}{2} \log_p \left(\frac{(\mathfrak{p}_{\tau\sigma})^\rho}{\mathfrak{p}_{\tau\sigma}} \right)^\sigma.$$

ただし $f_{\text{素イデアル}}$ は素イデアルの次数を表し φ_{cris} は B_{cris} へ作用する絶対フロベニウスである。

4 Gross' conjecture

Gross は p 進 partial ζ 関数の微分に関する予想を立てた ([9].) これは p 進 L 函数に対する次の予想と同値である。

G-conjecture. $\mathfrak{p}_{\text{id}}$ が K で完全分解していると仮定する。この時 $\chi \in \hat{G}_-$ に対して

$$\frac{L'_p(0, \chi\theta_p)}{L(0, \chi)} = \frac{\prod_{\mathfrak{p} \mid (p), \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_{\text{id}}} (1 - \chi(\mathfrak{p}))}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \sum_{\sigma \in J_{F_{\mathfrak{p}_{\text{id}}}}} \log_p \left(\frac{\mathfrak{p}_{\text{id}}^\rho}{\mathfrak{p}_{\text{id}}} \right)^{\tau\sigma}.$$

ただし $J_{F_{\mathfrak{p}_{\text{id}}}} := \{\sigma \in J_F \mid (\mathfrak{p}_{\text{id}})^\sigma \subset \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < 1\}\}$ と置いた。

Remark. G -conjecture は $\#\{\mathfrak{p} \mid (p) \mid \chi(\mathfrak{p}) = 1\} \geq 2$ の場合は $L'_p(0, \chi\theta_p) = 0$ を言うのみである。これは [12, 13] において既に示してある。

この予想と我々の p 進絶対 CM ペリオドに関する予想の関係を見てみよう。新しい記号を導入する。 $[\]_{p\text{-adic}}: \{\sum a \log b \mid a, b \in \overline{\mathbb{Q}}, b \neq 0\} \subset \mathbb{C}$ から $\{\sum a \log_p b \mid a, b \in \overline{\mathbb{Q}}, b \neq 0\} \subset \mathbb{C}_p$ への $\overline{\mathbb{Q}}$ -線形写像を $[\log b]_{p\text{-adic}} = \log_p b$ ($b \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$) で定める。これは [3] で示されている " $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対して $\{\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n\}$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であれば $\overline{\mathbb{Q}}$ 上でも一次独立である" という事実により矛盾なく定義される。多重 Γ 函数, p 進多重 Γ 函数の基本的な性質から次の Lemma が示される。

Lemma. χ は C_f の指標とし $\chi(\mathfrak{q}) = 1$ とする ($\mathfrak{q}$ はある素イデアル.) この時

$$X^\sigma(\chi_{\mathfrak{q}}) = L(0, \chi) \log \mathfrak{q}^\sigma + \sum a \log b, \quad a \in \mathbb{Q}(\chi), \quad b \in O_{F^\sigma}^\times$$

の形となる。 $\mathbb{Q}(\chi)$ は χ の値域を含む最小の体とした。特に $X^\sigma(\chi_{\mathfrak{q}})$ は $[\]_{p\text{-adic}}$ の定義域に入る。更に $\mathfrak{p}_\sigma \mid f$ とすると

$$X_p^\sigma(\chi_{\mathfrak{q}}) = [X^\sigma(\chi_{\mathfrak{q}})]_{p\text{-adic}}.$$

我々の予想 (conjecture C_p) は次式で更に精密な形に言い換えられる。

KY-conjecture. $\mathfrak{p}_\sigma$ は K で完全分解を仮定すると $\chi \in \hat{G}_-$ に対して

$$X_p^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma}) = [X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma})]_{p\text{-adic}} + \frac{L(0, \chi)}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{p}_\sigma^\rho}{\mathfrak{p}_\sigma} \right)^{\tau\sigma}.$$

Remark. Lemma を用いて計算すると KY-conjecture から conjecture C_p の式を $\text{mod } \mathbf{Q}(\chi) \log_p O_{F^\sigma}^\times$ で示すことができる. 実際 $\tau \in G$ を固定し KY-conjecture の両辺に $\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \frac{\chi(\tau)}{L(0, \chi)} \times$ を作用させると

$$(5) \quad \lg_{p,K}(\sigma, \tau\sigma) + \frac{\mu(\tau)}{2} \log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \frac{\chi(\tau) [X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma})]_{p\text{-adic}}}{L(0, \chi)} + \frac{1}{2} \log_p \left(\frac{\mathfrak{p}_\sigma^\sigma}{\mathfrak{p}_\sigma} \right)^{\tau^{-1}\sigma}.$$

定義より $(\mathfrak{p}_{\tau\sigma})^\sigma = \mathfrak{p}_\sigma^{\tau^{-1}\sigma}$. また Lemma より

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \frac{\chi(\tau) [X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_\sigma})]_{p\text{-adic}}}{L(0, \chi)} = \frac{\mu(\tau)}{2} \log_p(\mathfrak{p}_\sigma)^\sigma + \mathbf{Q}(\chi) \log_p O_{F^\sigma}^\times \text{ の元の和}$$

が示される. 正確に導くには Lemma より強い形の式が必要で, これはコーン分解等の”精密な議論 (a)”から示される.

最後に KY-conjecture と G-conjecture の強弱を考える.

Theorem. KY-conjecture が成り立つ時 G-conjecture も成立する.

Proof. $\mathfrak{p}_{\text{id}}$ が K で完全分解, 及び KY-conjecture を過程する. 特に $\sigma \in J_{F_{\mathfrak{p}_{\text{id}}}}$ に対して

$$(6) \quad X_p^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_{\text{id}}}) = [X^\sigma(\chi_{*\mathfrak{p}_{\text{id}}})]_{p\text{-adic}} + \frac{L(0, \chi)}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{p}_\sigma^\sigma}{\mathfrak{p}_\sigma} \right)^{\tau\sigma}.$$

更にコーン分解等の”精密な議論 (b)”から次が示される.

$$(7) \quad X_p^\sigma(\chi_{*(p)_0}) = [X^\sigma(\chi_{*(p)_0})]_{p\text{-adic}} + \frac{L(0, \chi_{(p)_1})}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{p}_\sigma^\sigma}{\mathfrak{p}_\sigma} \right)^{\tau\sigma}.$$

ただし $(p)_1$ は $(p)_0$ から $\mathfrak{p}_{\text{id}}$ 成分を全て抜いた整イデアルとする. Lemma より $\sigma \notin J_{F_{\mathfrak{p}_{\text{id}}}}$ に対して

$$X_p^\sigma(\chi_{*(p)_0}) = [X^\sigma(\chi_{*(p)_0})]_{p\text{-adic}}.$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{L'_p(0, \chi_{\theta_p})}{L(0, \chi)} &= \sum_{\sigma \in J_F} \frac{[X^\sigma(\chi_{*(p)_0})]_{p\text{-adic}}}{L(0, \chi)} + \sum_{\sigma \in J_{F_{\mathfrak{p}_{\text{id}}}}} \frac{L(0, \chi_{(p)_1})}{2L(0, \chi)} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{p}_\sigma^\sigma}{\mathfrak{p}_\sigma} \right)^{\tau\sigma} \\ &= \frac{[L'(0, \chi_{(p)_0})]_{p\text{-adic}}}{L(0, \chi)} + \frac{\prod_{\mathfrak{p} | (p), \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_{\text{id}}} (1 - \chi(\mathfrak{p}))}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \sum_{\sigma \in J_{F_{\mathfrak{p}_{\text{id}}}}} \log_p \left(\frac{\mathfrak{p}_\sigma^\sigma}{\mathfrak{p}_\sigma} \right)^{\tau\sigma}. \end{aligned}$$

$L'(0, \chi_{(p)_0}) = * \log p$ の形だから $[L'(0, \chi_{(p)_0})]_{p\text{-adic}} = * \log_p p = 0$. よって G-conjecture が導けた. $\square$

Remark. Example において $p = 11, 19, 29$ の場合は KY-conjecture と G-conjecture が同値になり計算結果も予想と一致. しかし $p = 59$ においては G-conjecture は p 進絶対 CM ピリオドの値に対しては何も言っていないのに対し KY-conjecture と計算結果は一致している. この場合は G-conjecture より真に強い予想となる.

Remark (精密な議論). 以下では絶対 CM ピリオド及び p 進絶対 CM ピリオドの厳密な定義を用いて各予想の強弱を示す. 詳しくは [24, 14]. ここまでの $X^\sigma, g_K, X_p^\sigma, lg_{p,K}$ の定義は $C_{(1)}$ の代表元 $\{a_\mu\}$ を固定して考えていた. 代表元を $\{b_\mu\}$ に取り替えた場合 $X^\sigma(\chi, \{b_\mu\})$ のように表記して表す事とする. また $X^\sigma(\chi)$ の正確な定義は [24] の記号で $X^\sigma(\chi) := \sum_{c \in C_f} \chi(c)(G(c^\sigma) + W(c^\sigma) + V(c^\sigma))$ となるが, ここでは少し変更して $W(c^\sigma)$ を次で定める.

$$W(c^\sigma) := -\log(a_\mu f)^\sigma \zeta_f(0, c).$$

なお $\log(\text{分数イデアル}), \log_p(\text{分数イデアル})$ の値は式 (2) と同様に $(\text{分数イデアル})^{h_F}$ の生成元を用いて定める事とするが, 次を満たすように同時に定める必要がある.

- $\log_p(\text{分数イデアル}) = [\log(\text{分数イデアル})]_{p\text{-adic}}.$
- $\log_p, \log$ とともに乗法を加法に移す.
- $((\text{分数イデアル})^\sigma)^{h_F}$ の生成元は $((\text{分数イデアル})^{h_F})^\sigma$ を選ぶ.

χ は C_f の指標とし $(f, q) = 1$ とする (q はある素イデアル.) 上記の Lemma は次のように精密化できる.

$$(8) \quad X^\sigma(\chi_q) = X^\sigma(\chi, \{a_\mu q\}) - \chi(q)X^\sigma(\chi) + \chi(q)L(0, \chi) \log q^\sigma.$$

更に $p_\sigma | f$ とすると

$$(9) \quad X_p^\sigma(\chi_q) = X_p^\sigma(\chi, \{a_\mu q\}) - \chi(q)X_p^\sigma(\chi) + \chi(q)L(0, \chi) \log_p q^\sigma.$$

この式を用いると "精密な議論" が出来る.

精密な議論 (a). 式 (5) から conjecture C_p を導く. 式 (8) を代入すると

$$\begin{aligned} & lg_{p,K}(\sigma, \tau\sigma) + \frac{\mu(\tau)}{2} \log_p(p_\sigma)^\sigma \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}_-} \frac{\chi(\tau)[X^\sigma(\chi_*, \{a_\mu p_\sigma\}) - X^\sigma(\chi_*)]_{p\text{-adic}}}{L(0, \chi)} + \frac{\mu(\tau)}{2} \log_p(p_\sigma)^\sigma + \frac{1}{2} \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma} \right)^{\tau^{-1}\sigma}. \end{aligned}$$

よって絶対 CM ピリオドの定義より

$$lg_{p,K}(\sigma, \tau\sigma) - \frac{1}{2} \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma} \right)^{\tau^{-1}\sigma} = \log_p \left(\frac{g_K(\sigma, \tau\sigma, \{a_\mu p_\sigma\})}{g_K(\sigma, \tau\sigma)} \right).$$

新しい定義の絶対 CM ピリオドは, イデアル類群の代表元の取り方によって $(O_{F^\sigma}^\times)^{\mathbf{Q}}$ の元倍しか動かない. よって示せた.

精密な議論 (b). 式 (6) から式 (7) を出す. $p_{id} \neq q$ とすると (9), (6), (8) の順に式を使って

$$\begin{aligned}
 X_p^\sigma(\chi_{*p_{id}q}) &= X_p^\sigma(\chi_{*p_{id}}, \{a_\mu q\}) - \chi(q)X_p^\sigma(\chi) \\
 &= [X^\sigma(\chi_{*p_{id}}, \{a_\mu q\})]_{p\text{-adic}} + \frac{L(0, \chi)}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma} \right)^{\tau\sigma} \\
 &\quad - \chi(q)[X^\sigma(\chi_{*p_{id}})]_{p\text{-adic}} - \chi(q) \frac{L(0, \chi)}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma} \right)^{\tau\sigma} \\
 &= [X^\sigma(\chi_{*p_{id}q})]_{p\text{-adic}} + \frac{L(0, \chi_q)}{2} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) \log_p \left(\frac{\mathfrak{P}_\sigma^\rho}{\mathfrak{P}_\sigma} \right)^{\tau\sigma}.
 \end{aligned}$$

同様の計算を繰り返すことによって式 (7) を導ける.

参考文献

- [1] G. W. Anderson, Logarithmic derivatives of Dirichlet L -functions and the periods of abelian varieties, *Comp. Math.* 45(1982), 315–332.
- [2] A. Baker, Linear Forms in the logarithms of algebraic numbers I, *Mathematika* 13 (1966), 204–216.
- [3] A. Baker, Linear Forms in the logarithms of algebraic numbers II, *Mathematika* 14 (1966), 102–107.
- [4] E. W. Barnes, On the theory of the multiple gamma function, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 19 (1904), 374–425.
- [5] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négative des fonction zêta et fonction zêta p -adiques, *Inv. Math.* 51(1979), 29–59.
- [6] P. Colmez, Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe, *Ann. of Math.* 138(1993), 625–683.
- [7] E. de Shalit, On monomial relations between p -adic periods, *Journal für reine und angew. Math.*, 374(1987), 193–207.
- [8] R. Gillard, Relations monomiales entre périodes p -adiques, *Invent. Math.* 93(1988), 355–381.
- [9] B. H. Gross, p -adic L -series at $s = 0$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 28(1981), 979–994.
- [10] B. H. Gross and N. Koblitz, Gauss sums and the p -adic Γ -function, *Ann. Math.*, 109(1979), 569–581.

- [11] K. Iwasawa, Lectures on p -adic L -functions, Annals of Math. Studies, 74, Princeton University Press, 1972.
- [12] T. Kashio, On a p -adic analogue of Shintani's formula, to appear in J. Math. Kyoto University.
- [13] T. Kashio, p -adic analogue of Shintani's formula, 数理解析研究所講究録 1324 (2003), 47-57.
- [14] T. Kashio and H. Yoshida, On the p -adic absolute CM-periods, Proceedings of International Conference on Algebra and Number Theory, University of Hyderabad, December 2003, to be published by NBHM and AMS.
- [15] Y. Morita, A p -adic analogue of the Γ function, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 22 (1975), no. 2, 255-266.
- [16] A. Ogus, A p -adic analogue of the Chowla-Selberg formula, Lecture notes in Math., 1454, 319-341, Springer Verlag, 1990.
- [17] G. Shimura, Automorphic forms and periods of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan 31(1979), 561-592 (=Collected Papers III, [79a]).
- [18] G. Shimura, The arithmetic of certain zeta functions and automorphic forms on orthogonal groups, Ann. of Math. 111(1980), 313-375 (=Collected Papers III, [80]).
- [19] G. Shimura, Abelian varieties with complex multiplication and modular functions, Princeton Mathematical Series 46, Princeton University Press, 1998.
- [20] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23(1976), 393-417.
- [21] T. Shintani, On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields, in Algebraic Number Theory, Proc. International Symp., Kyoto, 1976, 201-212, Kinokuniya, 1977.
- [22] H. Yoshida, On absolute CM-periods, Proc. Symposia Pure Math. 66, Part 1, 1999, 221-278.
- [23] H. Yoshida, On absolute CM-periods II, Amer. J. Math. 120(1998), 1199-1236.
- [24] H. Yoshida, Absolute CM-periods, Mathematical Surveys and Monographs 106, American Mathematical Society, 2003.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University,
 Kyoto 606-8502, Japan
 email address: kashio@math.kyoto-u.ac.jp
 email address: yoshida@math.kyoto-u.ac.jp