

2次元弾性円盤の衝突 — 反発係数出現のミクロメカニズム —

京都大学大学院人間・環境学研究科 國仲 寛人¹ , 早川 尚男

1 Introduction

内部自由度を持つような巨視的な物体同士が衝突する際に、衝突前に物体が持っていたエネルギーは音や、物体内部に生じる内部振動といった形で散逸する [1]。このような衝突の事は一般に非弾性衝突と呼ばれており、特に近年多くの物理学者達の興味をひいている粉体の挙動は、この非弾性衝突が鍵となって起こるものである [2]。

さて、物体の非弾性衝突を議論する上で必ず登場して来るのははねかえり係数というパラメータであり、以下のような形で定義されることは良く知られている。

$$e = -v_r/v_i \quad (1)$$

ここで v_i は衝突速度であり、 v_r ははねかえった時の速度である。このパラメータの性質として有名なものは以下のようなものである。

「巨視的な2球の衝突の場合、接触点における法線方向の相対速度成分の衝突前後における値の比をとると、この比の値は球の質量や速さには無関係で、球の材質だけで決まる一定値をとる」(培風館「物理学辞典」)

似たような記述は初等的な力学の本や、日本の高校で使われる教科書にも見られる。だが、このような記述が誤りであることはいろんな実験から証明される [3]。はねかえり係数というパラメータは衝突速度に強く依存して変化する量なのである。

散逸とは重心が最初持っていた運動エネルギーの一部が衝突で内部自由度に分配されることによって生じるものである。Kuwabara と Kono は弾性論に基づいて、弾性球の2体衝突を議論した [4]。その際彼らは球の内部摩擦の効果を考慮して、衝突によって生じる歪みの時間発展方程式を解くことによって、はねかえり係数を衝突速度や物性値の関数として表現した。その時間発展方程式は以下のような形で表される。

$$\ddot{h} = -kh^{3/2} - \gamma\sqrt{h}\dot{h} \quad (2)$$

¹ E-mail: kuninaka@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

ここで h は歪みの大きさ、 k と γ は定数である。この式で右辺を第一項までで切ってしまうと弾性衝突の式になる。非弾性衝突を表しているのは第二項の散逸力の項であり、この項の関数形についてはいろんな議論がある [4, 5, 6]。

今回の報告では 2 次元の円盤の壁との衝突を数値シミュレーションによって解析する。その際円盤を 2 つのモデルで表現し、それらの比較を行った。また、散逸力の関数形についての検討も行う。尚、本稿の内容は既に論文としてまとめてあり、詳細はそちらを参照されたい [7, 8]。

2 モデリング

2 次元の弾性円盤を表現するために多数の質点を三角格子上に配置して線形ばねでつないで円形にネットワークを構成し、弾性円盤モデルを作った。これを仮に Model A と呼ぶことにする。この円盤を壁に衝突させて、はねかえり係数や衝突時間等のいろんな量を測定するのだが、壁は指数関数型のポテンシャルで表現すると、各質点 $\mathbf{r}_p$ の運動方程式は以下ようになる。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} = -\kappa \sum_{i=1}^6 (d_0 - |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i|) \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i|} + \hat{y} a V_0 e^{-ay_p} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{r}_i$ は $\mathbf{r}_p$ の 6 近傍の粒子の位置、右辺第二項において、 V_0 と a はポテンシャルの係数であり、 $V_0 = a/2$ としてある。また、 m は質点の質量、 κ はばね定数、 d_0 はばねの自然長である。この式をルンゲクッタ法で数値的に計算した。その際エネルギーの保存性に関してもチェック済みである。

もう一つ、円盤内部に生じるモードの解析をするために連続体モデルを採用し、Model B とした。これは Gerl と Zippelius が考案したモデルに基づくものである [9]。このモデルの概要は以下の通り。まず、円盤の振動は波動方程式に従うので、その解は Bessel 関数で展開できる [9]。するとハミルトニアンは次のような形になる。

$$H = \frac{p_0^2}{2M} + \sum_{n,l}^N \left(\frac{P_{n,l}^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega_{n,l}^2 Q_{n,l}^2 \right) + V_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi e^{-ay(\phi,t)}. \quad (4)$$

ここで、 M は円盤の質量、 $Q_{n,l}, P_{n,l}$ はそれぞれ歪みの展開係数と一般化運動量であり、 n, l はモードの指標である。 $y(\phi, t)$ は円盤の外周を示し、 ϕ は円盤の中心から測った角度である。これを、基にして正準方程式を構成し、その時間発展を symplectic 法で解いた。

シミュレーションはこの 2 つのモデルを用いて、円盤の内部温度が初期条件として 0 の場合と有限の場合の 2 つの場合について行った。

3 シミュレーション

3.1 内部温度 0 の場合

図 1 は円盤の内部温度が 0 の場合の衝突速度とはねかえり係数の関係であり、Model A と Model B の結果を重ねてプロットしている。また衝突の際に円盤に働く弾性力についても調べた。図 2

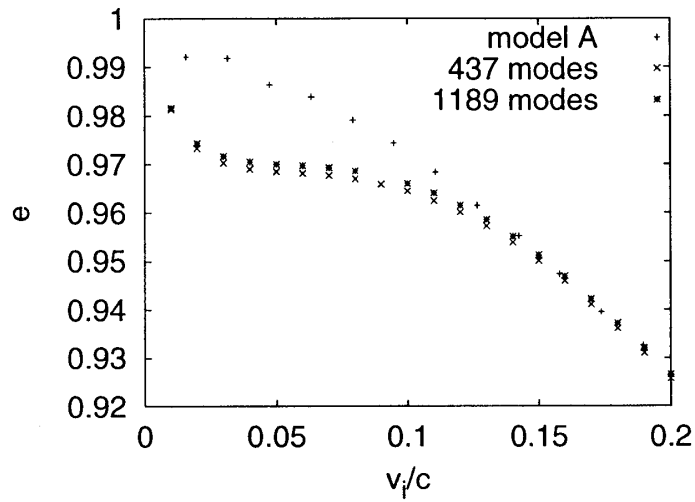


図 1: Model A と Model B の正面衝突の際の衝突速度とはねかえり係数の関係。衝突速度は弾性波速度 $c\sqrt{Y/\rho}$ でスケールしており、 Y はヤング率、 ρ は密度である

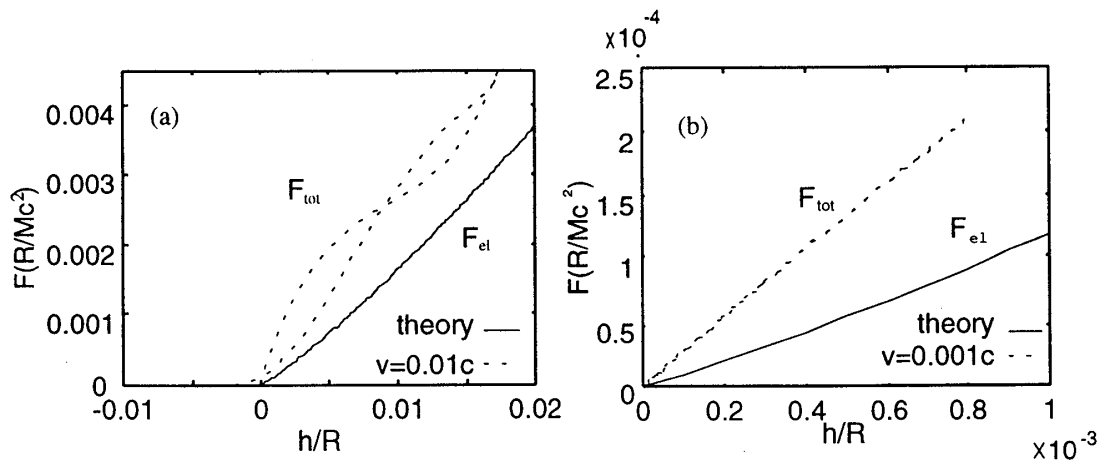


図 2: 内部温度が $T = 0$ の Model B が壁から受ける力と理論 (式 (5)) との比較。初速度はそれぞれ (a) $v_i = 0.01c$ 、(b) $v_i = 0.001c$ の場合を示している。

はそれぞれ衝突速度が $v = 0.01c$ と $v = 0.001c$ の時の円盤の歪みと円盤に働く力の関係である。 F_{el} は弾性論から計算したもので [9]、

$$h \simeq -\frac{F_{el}}{\pi Y} \left\{ \ln \left(\frac{4\pi Y R}{F_{el}(1-\sigma^2)} \right) - 1 \right\}, \quad (5)$$

を数値的に解いたものである。これから衝突速度が比較的速い時には力はヒステリシスループを描き、衝突速度が小さくなるとループが消失することがわかる。低速の衝突の極限をとると F_{tot} と F_{el} が一致することが期待されるのだが、今回行った計算からはそのような傾向は見られないと予想される。しかも低速衝突において歪み速度 $\dot{h} = 0$ の場合に散逸力 F_{dis} が有限の値を持っていることから、従来議論されてきたような散逸力の関数形は否定されると思われる。

3.2 内部温度が有限の場合

今度は初期条件として円盤の内部温度が有限である場合を調べた。Model A の場合、円盤の内部温度を有限にして衝突速度を上げていくと、ある速度を越えると急激にはねかえり係数が減少する点が存在することが分かった。この速度のことを臨界速度と呼ぶことにする。円盤の内部温度をいろいろ変えて衝突を行うと、内部温度が高い程臨界速度が小さい値を持つこともわかった。そこで、各温度において、衝突速度をそれぞれの臨界速度でリスケールし、両対数でプロットしたのが図3である。これを見ると臨界速度でリスケールした衝突速度とはねかえり係数の間には

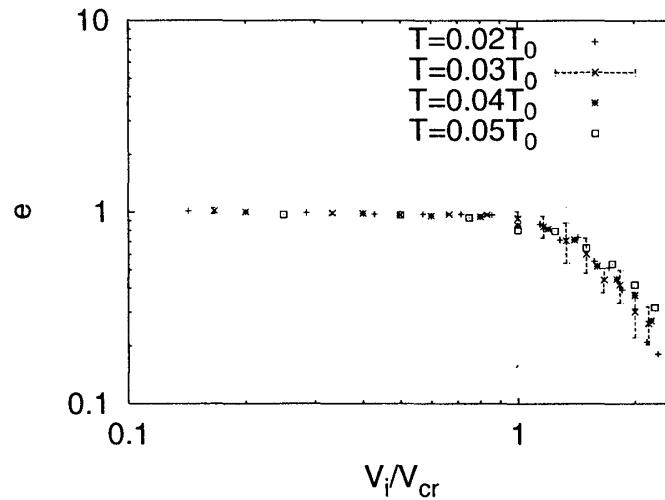


図 3: 臨界速度でスケールされた衝突速度とはねかえり係数の関係。温度は $T_0 = mc^2/k_B$ (m は質点の質量、 k_B はボルツマン定数) でスケールしている。グラフは両対数スケールで表示されており、 $T/T_0 = 0.03$ のときにエラーバーつきで表示してある。

ユニバーサルな関係があるように見える。また、円盤の内部温度と臨界速度の関係も調べたが、ある温度領域では、臨界速度が内部温度に対して一次関数的に減少することがわかっている。

臨界速度近傍で Model A の衝突後の形状を見てみると、壁側の質点位置が入れ替わっており、円盤に不可逆的な変形が生じていることが分かった [7, 8]。

一方、Model B は衝突によって不可逆的な変形が残ることはなく、内部温度が 0 の場合でも有限の場合でもはねかえり係数は衝突速度によってなだらかに変化する。このことから、臨界速度は円盤の不可逆的な変形によって生じるものであると考えることができる。このような傾向は実験によっても確認されている [1, 3]。

4 結果

今回得た結果は以下の通りである。

- 衝突速度の増加によるはねかえり係数の減少を確認し、実験と同じような傾向を得た。
- 衝突の際に円盤に働く力は、高速衝突の時は歪みに対してループを描くようになるが、低速衝突の場合はループは消失する。
- 円盤の内部温度が有限の場合、衝突速度を上げていくと、はねかえり係数が急激に減少し始める臨界速度が存在し、それは円盤が不可逆的な変形を起こし始める速度である。
- 円盤の温度が高い程臨界速度は小さく、衝突速度を臨界速度でスケールした値とはねかえり係数の関係は内部温度によらず一本の曲線に乗る。

参考文献

- [1] W. Goldsmith, *Impact: The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids* (Edward Arnold Publ., London, 1960).
- [2] see e.g. L. P. Kadanoff, *Rev. Mod. Phys.* **71**, (1999) 435 ; P. G. de Gennes, *ibid*, (1999) S374 and references therein.
- [3] See, for example, R. Sondergaard, K. Chaney, and C. E. Brennen, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics* **57**, (1990) 694 ; F. G. Bridges, A. Hatzes, and D.N.C. Lin, *Nature* **309**, (1984) 333 ; K. D. Supulver, F. G. Bridges, and D. N. C. Lin, *ICARUS* **113**, (1995) 188
- [4] G. Kuwabara and K. Kono, *Jpn. J. Appl. Phys.* **26**, (1987) 1230.
- [5] N. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch and T. Pöschel, *Phys. Rev. E* **53**, (1996) 5382.
- [6] W. A. Morgado and I. Oppenheim, *Phys. Rev. E* **55**, (1997) 1940. This paper derived eq.(2) without explicit assumption of dissipation based on Mori-Zwanzig's projection technique.
- [7] H.Kuninaka and H.Hayakawa, cond-mat/0011375
- [8] H.Hayakawa and H.Kuninaka, cond-mat/0011294
- [9] F. Gerl and A. Zippelius, *Phys. Rev. E* **59**, (1999) 2361.