

降伏応力流体の微視的理論: 2 体分布関数に注目して 大槻 道夫・佐々 真一	368
高密度粉体のレオロジー 波多野 恭弘	375
仮想懇親会	
 3 日目	
3 体歯車系のフラストレーション、柔らかさ、閾値性 栗津 暁紀	384
メソスケール系からみたガラス系 吉野 元	393
ディスカッション	

仮想研究会「塑性という名の動的機構」：はじめに

塑性って何だ

個人的な回想から話をはじめることをお許しいただきたい。私がまだ子供だった頃に、両親だったか親類だったか忘れたが「流れる固体」という本 [1] を買ってもらった。茶色い液体が柱に登る様子 (Weissenberg 効果) の写真が表紙に載っている、中学生向けのレオロジーの入門書だ。子供心に面白いことが書いてあると思った。曰く、固体だと思っているものも液体のように流れることがある。千歳飴もガラスも流れる。道路をつきやぶって花が芽を出すのはアスファルトが流れるからだ。逆に、液体だと思っているものが固体的な性質を示すことがある。マヨネーズや歯磨き粉は容器から絞り出せるという意味では液体だけれど、そのあと重力で崩れたりしない。つまり、自分の重さを支えられる程度の固体的な性質をもっている。壁に塗ったペンキが流れてしまわないのも固体的な性質のおかげだ。粘液が糸をひく現象の背後には弾性という固体的性質がある。…

流れる固体として紹介されているさまざまな現象は、もちろん全てが同じというわけではなく、塑性・粘弾性 (なんとか模型)・レオペクシー・チクソトロピー・ダイラタンシーなど、さまざまな名前がついている [2,3]。確かに、異なる現象を区別し異なる名前をつけるのは大事なことではあるのだけれど、ここでは少々大胆に、これらを大きく 2 つに分けてしまおう。すなわち

(あ) 固体的挙動と液体的挙動が一定の比率で入りまじっているもの

(い) 条件によって固体的挙動と液体的挙動が切り替わるもの

に分類する。この記事の読者 — 仮想研究会の出席者 — には B4 や M1 から大御所まで多くの方々がおられると思うのだが、ここでは M1 に焦点をあてて、基礎的なことから、しかも簡略化して説明する。専門家の方々には少々退屈だったり乱暴な説明が気になったりするに違いないのだけれど、そこはこのあとの 9 件の仮想講演 (記事) がカバーしてくれるはずなのでご容赦願いたい。

上記(あ)はあとで説明することにして、(い)について、2つの典型的な例を紹介しよう。これはどちらも「塑性」という名前と呼ばれているが、じつはかなり違った現象であるかもしれず、しかも違った現象でありながら、さらによく考えてみると何か本質的な共通点があるようにも思える。

ひとつの例は金属を変形させるときに見られる現象である [4-6]。適当な金属の試料、たとえば鉄の棒を用意し、棒の両端をある装置にセットして、少しずつ力を加えてじわじわと引っ張ってみよう。力を加えるに従って、棒は少しずつ変形する(引っ張った方向に伸びる)。はじめのうちは、よく知られているように Hooke の法則が成立し、変形(伸び率)は力に比例する(正確に言えば応力すなわち面積あたりの力に比例する)。力を取り除くと変形はもとに戻る。ところが、力を大きくしていくと、2つのことが起きる。第1に、力が変形に比例しなくなる。これは Hooke の法則の破れを示すものではあるが、これだけなら(すなわち力と変形のあいだに何らかの非線形な関数関係があるなら)まだ固体的挙動の範囲内である。ところが第2に、力を取り除いても変形がもとに戻らなくなる。正確に言えば変形の一部は力を取り除くと回復するが、他の一部は非回復性となり、力を取り除いても戻らない。この第2の現象を称して塑性という¹。

普通、金属の塑性は応力ひずみ曲線で図示され、ここには時間が入ってこないことに注意しよう。時間に関しては変形速度が非常に遅い極限を考えることになっており、非回復性の変形が有限の変形速度で生じる現象はクリープ (creep) と呼んで区別する。言い換えれば、金属の場合、時間に依存しない非弾性が塑性であり、時間に依存する非弾性がクリープであるというように用語を区別する [6]。

塑性という名で呼ばれるもうひとつの現象として、濃厚なコロイドやエマルジョンなどで見られる降伏的非 Newton 流動がある [3, 7, 8]。降伏的^{いき}というのとは、応力に閾値(しきい値)があって応答が切り替わるという意味だ。非 Newton 流動とは“Newton 的でない流動”であるが、これだけでは何の説明にもなっていないので、まずは Newton 流体から説明する。水やサラダ油や空気など、普通の流体を普通の条件で流した場合、応力(正確に言えば偏応力)を定めるのは変形ではなく変形速度である。特に、応力(偏応力テンソル)と変形速度(歪み速度テンソル)のあいだに比例関係が成立する場合に、この流体は Newton 流体であるとか Newton 的な粘性をもつとか言う。簡単化のため、単純剪断流れ(たとえば $\mathbf{u} = (\dot{\gamma}y, 0)$ のような場合)に限定すると、Newton 流体では、剪断応力 σ は

$$\sigma = \eta \dot{\gamma} \quad (1)$$

のような式に従う。比例定数 η を粘度あるいは粘性係数などと言う²。

さて世の中のすべての流体が Newton 的な粘性をもつわけではない。特に、冒頭の「流れる固体」[1]に出てきたマヨネーズや歯磨き粉などは、自重を支えることができるので、変形速度がゼロであっても有限の応力をもつことになり、明らかに式(1)の適用範囲外である。式(1)の素直な拡張として、 σ が $\dot{\gamma}$ の非線形関数となる場合が考えられるが、この枠組みの範囲内でマヨネーズや歯磨き粉の現象論モデルを作るには、応力の次元をもつ正の定数 σ_Y を導入して、たとえば

$$\sigma = \sigma_Y + \eta_p \dot{\gamma} \quad (\dot{\gamma} > 0) \quad (2)$$

あるいは

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} 0 & (|\sigma| < \sigma_Y) \\ \eta_p^{-1} (\sigma - \sigma_Y \operatorname{sgn} \sigma) & (|\sigma| \geq \sigma_Y) \end{cases} \quad (2')$$

¹金属の場合には第1の現象と第2の現象が(ほぼ)同時におきるので、材料力学の教科書などでは両者を区別していないことがあるが、エネルギー論(熱力学)の立場から言えば両者は概念的に異なる現象である。

²定数というのは流れに依存しないという意味であって、温度などには依存するかもしれないし、実際、依存する。

とすればよい [3, 7, 8]。式 (2) を少し拡張して

$$\sigma = \left(\sigma_Y^a + (\eta_p \dot{\gamma})^b \right)^{-a} \quad (3)$$

とする手もある。式 (2) あるいは (3) の特徴は、流動 ($\dot{\gamma} \neq 0$) を生じさせるためには最低限 σ_Y だけの応力を加える必要があるという点にある。この σ_Y のことを降伏応力といい、降伏応力を示す流動のことを塑性流動という。なお、厳密に $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ で降伏応力を示すわけではないが小さい $\dot{\gamma}$ に対する応力と歪み速度の関係が塑性流動と同じである場合を擬塑性流動と言って区別する場合がある。式 (2) は Bingham モデルとして知られている。

Bingham モデルなどであらわされる塑性流動は、応力ひずみ関係式ではなく応力と歪み速度の関係式で表示されるので、金属でいうところの塑性ではなくクリープに相当する。しかし、ここでは金属の塑性も Bingham 的な塑性流動も、ついでに言えば擬塑性流動も、すべて塑性という名前で呼ぶことにしよう。微視的機構が違ってもかもしれないものを同じ名前で呼ぶのは、もしかしたら間違いに踏み込む原因であり、危険なことであり、叱られることになるかもしれない。たとえば Deryagin という人の啓蒙書 [9] にはこんなことが書いてある：

同種的气体や液体 (ただしコロイド溶液になっていないもの) の内部摩擦は、ふつうは、《摩擦力は速度勾配に比例する》というきわめて単純なニュートンの法則にしたがいます。だが固体になると、弾性ゴムのような弾性体でも、生ゴムのような塑性体でも、この法則は使えません。この法則であらわせる摩擦力を、固体のもつ弾性力といっしょにして考えたら、大きなあやまりをおかすことになります。

しかし共通点と相違点をはっきりさせるためには、一度は両者を同じ枠組みにのせてみるべきだということもまた本当である。今回の仮想研究会では金属の塑性はほとんど登場しないが、液体の塑性に限っても具体的な対象は多様であり、これらを細かく区別していたのでは全体像が見えてこない。液体の粘性と気体の粘性は機構が異なるのに同じ名前で呼ばれ、同じ枠組みで論じられているではないか。ゴムの弾性と金属結晶の弾性は起源が異なるのだが、そのことは両方を同じ熱力学という俎板にのせてみてはじめてよく分かるし、ゴムのなかにも金属のような弾性があり、金属のなかにも気体分子のようなものがとびまわっているということが見えてくる。モデルという地図を鵜呑みにしてしまうと道に迷う危険性はあるが、プロの物理学者なら道を見つけるはずを知っているはずだ。危険を恐れて狭い世界に閉じこもるよりも、まずは冒険に出かけてみよう。

緩和時間：固体と液体の割合を示すもの

先ほどの (あ)、つまり「固体的挙動と液体的挙動が一定の比率で入りまじっているもの」について考えよう。液体的挙動と固体的挙動が一定の割合で同居しているというのは、式で書くと、どうということだろうか？ さっき「割合」という言葉で表現したが、じつはこれは無次元の比ではなく、時間の次元をもつ量であることを (M1 向けに) 説明する。こうして (あ) がきちんと定義できれば、(い) は、この「割合」が変化する現象としてモデル化しなおすことができる。

液体的挙動の典型例は Newton 粘性法則すなわち式 (1) である。この式は応力と歪み速度を関係づける。他方、固体的挙動の典型例である Hooke の法則は、剪断変形に対しては

$$\sigma = G\gamma \quad (4)$$

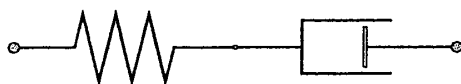


図 1: Maxwell モデル (の象徴的図示)。

という形をとる (ここで γ は歪みをあらわし、 G は剪断弾性率あるいは剛性率と呼ばれる定数である) [2, 5, 10]。式 (1) と式 (4) は $\sigma(t)$ と $\gamma(t)$ のあいだの線形の関係式であり、統一的に、たとえば

$$\sigma = \int K(t-t') \dot{\gamma}(t') dt' \quad (5)$$

のような形であらわすことができる。もしも

$$K(s) \simeq \eta \delta(s)$$

とすれば式 (5) は Newton 粘性 (1) に帰着し、

$$K(s) = \begin{cases} G & (s > 0) \\ 0 & (s < 0) \end{cases}$$

なら式 (5) は Hooke 弾性 (4) に帰着する。適当な K を設定すれば、 $\sigma(t)$ と $\gamma(t)$ のあいだの線形関係の範囲内ではあるが、液体的挙動と固体的挙動の中間的挙動を表現できる (これを線形粘弾性モデルという)。最も簡単な形として指数関数的減衰を仮定し、緩和時間 τ を導入して

$$K(s) = \begin{cases} G e^{-s/\tau} & (s > 0) \\ 0 & (s < 0) \end{cases} \quad (6)$$

というものを考えよう。このとき、応力 σ は

$$\left(\frac{d}{dt} + \tau^{-1} \right) \sigma = G \dot{\gamma} \quad (7)$$

という微分方程式に従う。これを Maxwell 粘弾性モデルという。(もちろん K にはさまざまな形が考えられ、それに対応して線形粘弾性モデルも複数存在する。詳しくはレオロジーの入門書や教科書など [2, 3, 7, 8] を参照してほしい。)

図解的な記号としては、Hooke 弾性をバネで象徴し、Newton 粘性をダッシュポットで象徴することが多い。この流儀で Maxwell モデルを表示するとすれば、バネとダッシュポットを直列につないだものになるだろう (図 1)。Maxwell 粘弾性モデルの式 (7) の左辺は、式 (1) に式 (4) の時間微分を加えた形をしているので、歪み γ が弾性的な部分 (回復性歪み) γ_S と粘性的な部分 (非回復性歪み) γ_D の和で

$$\gamma = \gamma_S + \gamma_D, \quad \gamma_S = \frac{\sigma}{G}, \quad \frac{d\gamma_D}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (8)$$

のように書けると仮定すれば、これから γ_S および γ_D を消去することにより式 (7) が得られる。定常応答における応力と歪み速度の関係式は Newton 粘性と同じ式 (1) に帰着し、粘性係数と緩和時間のあいだには

$$\eta = G\tau, \quad \tau = \frac{\eta}{G} \quad (9)$$

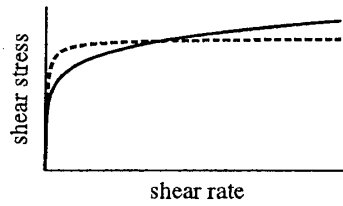


図 2: 式 (13) による剪断速度 $\dot{\gamma}$ と剪断応力 σ の関係の例。実線は $\epsilon = 0.15$, 点線は $\epsilon = 0.01$ とした。

という関係式が成立する。系に対する摂動の特徴時間や緩和に対する待ち時間に比べて τ が小さいなら、系の力学的応答は液体的であり、 τ が大きいなら、系の力学的応答は固体的である [7]。この意味で、 τ は液体的挙動と固体的挙動の境目あるいは配分を示す尺度になっていると考えられる。

それでは、式 (2) あるいは式 (3) のような降伏応力の発生を緩和時間の言葉で言い換えてみよう。降伏応力とは、液体側から見ると、歪み速度 $\dot{\gamma}$ をゼロに近づけたときに有限の応力が残る現象である。これは粘性係数が $\eta \propto \dot{\gamma}^{-1}$ のような特異的な $\dot{\gamma}$ 依存性をもつ、と言い換えられ、さらに、式 (9) が成立するものとする、緩和時間が

$$\tau \sim |\dot{\gamma}|^{-1} \quad (10)$$

のようにふるまう、と言い換えられる (ここで空間反転対称性を考慮して絶対値記号をつけた)。ここで重要なのは、系の緩和時間 τ が変化することにより、 τ と外的な時間との大小関係が入れ替わることだ [11]。これにより系の力学的応答が液体的挙動と固体的挙動の間で切り替わる。

ためしに、Maxwell モデル (7) で τ を定数ではなく $\dot{\gamma}$ の関数で置き換えて、たとえば

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau(\dot{\gamma})} \right) \sigma = G \dot{\gamma}, \quad (11)$$

$$\tau^{-1} = \tau_0^{-1} + a |\dot{\gamma}|^{-1+\epsilon} \quad (12)$$

としてみよう。このとき $\sigma(t)$ と $\gamma(t)$ の関係は非線形ではあるが、 $\gamma(t)$ が既に与えられているものとする (数値実験ではそうなっている場合が多い)、方程式 (11) は未知数 σ についての線形の微分方程式であるので解を具体的に書き下すことができる。特に、定常な剪断流 ($\dot{\gamma} = \text{const.}$) に対する解は、確かに一定値

$$\sigma|_{t=\infty} = G \tau \dot{\gamma} = \frac{G \dot{\gamma}}{\tau_0^{-1} + a |\dot{\gamma}|^{-1+\epsilon}} \quad (13)$$

に収束することが確かめられる。参考までに、図 2 に式 (13) で与えられる σ と $\dot{\gamma}$ の関係を示す (分母の第 1 項 τ_0^{-1} は、有限ではあるが、第 2 項に比べて小さいとしている)。剪断応力 σ が歪み速度 $\dot{\gamma}$ に比例するのではなく上に凸な関数となっている様子が分かる。特に、 ϵ が小さい場合 (点線) には、 σ がゼロから有限の一定値に急に切り替わるという特異な挙動を示している。この一定値こそ流動を維持するために必要な降伏応力にはかならない。

ここまでの予備知識をまとめておこう:

- 液体的挙動と固体的挙動の同居している系は、力学的応答に関する緩和時間が有限であることによって特徴づけられる。
- 塑性とは、力学的応答に関する緩和時間 τ がゼロ (または小さな値) から無限大 (非常に大きな値) に切り替わる現象で、さらに降伏応力によって特徴づけられるものをいう。

以上の予備知識に基づき、このあとの9件の「仮想講演」の聴きどころを簡単に紹介する。ただし、世話人の力不足により説明が少々足りなかったり見方が偏っていたりする点については、あらかじめお許し願いたい。また、途中で新しい概念が出てきた場合は、必要に応じてM1向けの解説を再度補足することにしよう。

記憶効果の実験とその解釈

最初に、塑性体が示す記憶効果についての3つの実験を紹介する。高温で圧縮したシリコンゴムによる皺^{しわ}(リンクル)のパターン、低温で伸長したゴムを冷却し再度解凍したときの張力の回復、常温で加振したペーストを乾燥させたときの亀裂パターンに、それぞれ記憶効果が見られる。いずれの現象にも塑性が関与している。

大園氏らの実験では、シリコンゴム(PDMS)の円柱状試料を用意し、高温状態で表面に白金の硬い薄膜を蒸着させる。この試料を室温に戻すと、高温で膨張していたPDMSは等方的に収縮し、表面の薄膜が座屈して皺が発生する。この試料に常温で一軸圧縮(一方向の圧縮)を加えると、皺のパターンが変化するが、力を除くと初期パターンに戻る。初期パターンではPDMSの応力と白金薄膜の応力が内部的に(外力抜きで)つりあっており、しかもこの釣り合い状態は安定かつ一意的であると考えられる。ところが温度を上げて一軸圧縮を加えると、冷却して力を除いたあとの皺は初期パターンに戻らず、別のパターンに変化することが観察された。これは、温度を上げたためにPDMSが塑性変形し、図1でいうところのバネのゼロ点がずれたため、と解釈できる。こうして塑性変形したあとの状態は、面白いことに、一軸圧縮なしで生じる初期パターンとは異なり、複数の安定状態をもつらしい。さらに、外力なしで試料を加熱し再度冷却すると、皺は初期パターンに戻る。つまり、この系には、塑性変形によって「バネのゼロ点」が移動し再度凍結されることによる、書き換え可能な記憶と、加熱しても消えない何らかの構造(たとえば白金の膜の不均一性)による記憶という2種類の記憶が存在する、ということである。

宮本氏の実験では、ゴムを低温にするとガラス転移[12]が生じることに着目し(ゴムは普通の意味では固体けれども分子運動の観点からは液体に近い性質をもち、その緩和時間が-60度あたりでゼロから無限大に変わる)、異なる履歴をもつ試料を用意して、その挙動を観察する。典型例として次の2つを比較してみよう：

- ギュムを常温で引き延ばし、そのあと-100度まで冷却する。(protocol-HT)
- まず-61度まで冷却してからゴムをゆっくり引き延ばし、そのあと-100度まで冷却する。(protocol-GT)

両方とも-100度ではガラス化しているので、ここでいったん張力を解放し、そのあと試料の両端間の長さを固定した状態で温度を上げていく。温度が-70度を超えるとゴムが「解凍」され、温度上昇とともに張力が回復する。この張力回復の様子が履歴によって異なるのである。常温で引き延ばしたゴムでは、張力は温度上昇とともに単調に増加し、常温での値(1 MPa程度)に戻る。ところが低温で伸長したゴムでは、解凍中に大きな張力(常温での値の倍以上)が発生し、そのあと常温での値に戻るという挙動を示す。しかも、伸長後、-100度まで冷却する前に多少の時間をおく(これを“aging”^{エイジング}という)、そのぶん解凍中の極大張力が小さくなる。

宮本氏は、緩和時間に基づくモデルを用いて、このような極大張力の発生を説明している。粘

弾性モデルの積分表示式 (5) を部分積分により変形すると

$$\sigma = \int_{-\infty}^t (\gamma(t) - \gamma(t')) M(t - t') dt' \quad (14)$$

のような形になる。この式は、系のなかにさまざまな年齢のバネが存在し、年齢 $s = t - t'$ のバネは自然長 $\gamma(t')$ をもっていて、それぞれが応力に寄与する、と読むことができる。積分の重み $M dt'$ は、年齢別人口密度 (いわゆる人口ピラミッド) である。系の履歴は、この人口ピラミッドのなかに記憶されている。すなわち記憶効果は少数の秩序変数で記述されるのではなく、もっと多くの情報が — 概念的には歴史そのものが — 人口ピラミッドに刻まれるということだ。

中原氏らの実験では、粉 (炭酸カルシウム、塩基性炭酸マグネシウムなど) を水にまぜて作ったペーストの乾燥破壊パターンを観察する。系の力学的性質を制御する変数は水分の量である。乾燥によってペーストは収縮し、表面に亀裂ができる。普通は亀裂パターンは等方的である。ところが、ある水分含有量の炭酸カルシウムペーストを水平に加振してから乾燥させてみたところ、主要な亀裂が加振方向と垂直になるという顕著な異方性が発現した。この現象は、加振が強すぎたり水分が多すぎたりすると (つまり液体領域では) 発生せず、また水分が少なすぎたり加振が弱すぎたりしても (つまり固体領域でも) 発生しない。加振による記憶効果が発現するためには、ちょうどペーストが塑性を示す状態にあることが必要だということが分かった。

さらに、ペーストの種類を変えてみたところ、条件によって、加振方向に垂直に割れる場合と、それとは違う方向 (長方形の容器では加振方向に平行) に割れる場合があることが発見された。後者について、45 度の角をもつ平行四辺形の容器³を用いて加振実験をおこなった結果、割れる方向は「流れに平行な方向」であることが判明した。すなわち「揺れの記憶」と「流れの記憶」という、2つの競合する記憶効果が存在することになる。

中原氏らは、ペーストの記憶効果のメカニズムとして、加振や流れによって粒子の配列が変化し、揺すった方向に垂直な疎密構造や、流れに平行なカードハウス状の構造が形成される、という描像を提示している。すなわち微視的な構造に記憶が宿する説である。他方、大園氏らの実験や宮本氏の実験と同様に、中原氏らの実験に対しても Maxwell モデル的な現象論は作れないか? というのが、私 (大信田) の話の内容である。大園氏らの描像と同じく「ゼロ点のずれ」を基本的アイディアとし、微分幾何学的手法を用いて多次元のモデルを構築して解析をおこなう。結果はいちおう肯定的で、剪断流から張力が発生する可能性が示される。ただしもちろん、この結果は微視的な構造の有無について肯定もしていなければ否定もしていない。強磁性体や超伝導の例からの類推で考えれば、巨視的な場と微視的な秩序パラメータが一致する可能性はあると思われるが、本当にそうであるかどうかを判断するには、微視的方面からの新しい研究を待つ必要がある。

降伏応力の微視的理論

塑性の関与する記憶現象のうち、少なくともあるものは Maxwell モデル的な現象論で説明されるが、緩和時間の温度依存性や剪断速度依存性については天下りの仮定をせざるを得ない。したがって、(大槻氏 [13] の表現を借りるなら) たとえば粉をどれくらい水に混ぜれば記憶効果が生じるか、という問いには全く答えることができない。また、中原氏らの言うような微視的構造との関連も不明のままである。

³中原氏らの図 5 は一見すると直方体に見えるが、そうではなく、正方形と平行四辺形の平面的な組み合わせである。

降伏応力を説明するのに、緩和時間の発散を示す式 (12) を「手で入れる」のではなく、微視的モデルから導出することはできないだろうか？ コロイド系におけるそのような研究について、宮崎氏および大槻氏らによる液体論の結果を紹介していただく。

宮崎氏の方法はモード結合理論 (MCT) [14] に基づく。これは、剪断流のもとでのコロイドの密度場の Langevin 方程式を時間相関関数のダイナミクスに書き直し、そこから緩和時間あるいは粘性応力を求める、という方法である。この方法で、確かに式 (12) と同じもの (宮崎氏の原稿では式 (2.5)) を得ることができる。さらにこの結果にはおまけがついていて、コロイド系などの実験に積極的に応用することができる。式 (12) は緩和時間 τ を剪断速度 $\dot{\gamma}$ で制御できることを示しており、しかもその具体的な関数形が分かっているからである。すなわち、低い振動数領域での線形応答の直接測定が難しければ、一定の歪み振幅をもつ振動的な剪断歪みをかけて非線形応答を見ればよい。必要な情報はここから計算できる。

他方、大槻氏らの結果は、これとは別のアプローチに基づいている。応力の微視的起源が粒子間の力であるなら、それは時間相関を経由しなくても、分布関数の歪みから計算できるはずである。比較対象として気体論の場合を考えると、気体で応力を担うものは運動量をもつ粒子の移動であるため、粘性応力は速度分布関数の歪みから計算される [15, 16]。他方、コロイド系などで、応力をになうものが 2 体ポテンシャルである場合には、粘性応力を計算するために必要なのは 2 体分布関数の歪みである。この歪みの振幅を秩序パラメータとして弱非線形解析をおこなう。結果はちょうど強磁性体の平均場理論と呼ばれているもの [17] と同じ形になる。スピン秩序パラメータを巨視的な磁化と同一視するのと同じ考え方で、2 体分布関数の歪みを剪断応力 σ と同一視するなら、結果は

$$\frac{d\sigma}{dt} = a\sigma - b\sigma^3 + G\dot{\gamma} \quad (15)$$

と書ける。式 (7) に合わせて書くとすれば

$$\tau^{-1} = -a + b\sigma^2 \quad (16)$$

であるが、 $\tau < 0$ の状態は不安定であって実現せず、したがって流動状態では $\sigma \geq \sqrt{a/b}$ でなければならない。こうして降伏応力の存在が説明される。さらに、式 (13) における ϵ に相当する指数は $1/3$ となることが示される。

次の波多野氏の報告は、ある理想的な粉体系の剪断流の数値実験から得られたレオロジーに関するものである。希薄な粉体系に関しては、半世紀前から Bagnold 則というものが知られており、これは剪断応力 σ と垂直応力 P がどちらも歪み速度 $\dot{\gamma}$ の 2 乗に比例するというものである。再び気体論を引き合いにだすと [15]、温度 T をもち、じゅうぶんに硬い球状分子からなる気体では (音速を $c \propto \sqrt{T}$ 、平均自由行程を $\ell \sim c\tau$ として)

$$P \sim \rho c^2 \sim \frac{\rho \ell^2}{\tau^2}, \quad \sigma \sim \rho c \ell \dot{\gamma} \sim \frac{\rho \ell^2}{\tau} \dot{\gamma} \quad (17)$$

であるが、粉体の温度や衝突頻度は $\dot{\gamma}$ をそのまま反映すると考えられるので、 P も σ も $\dot{\gamma}^2$ に比例することになる。Bagnold 則が成り立つ領域では、 $\dot{\gamma}$ 以外のパラメータ (粒子の性質や粉体密度など) をすべて一定にした場合には、 $\sqrt{P}/\dot{\gamma}$ は定数でなければならない。

粉体の密度を上げたり歪み速度を極端に大きくしたりすると、平均自由行程がゼロに近づいたり粒子間接触が効いてきたりするため、Bagnold 則は成立しなくなる。特に、高密度では降伏応力が発生する。ところが、このような場合も含め、広い範囲のデータについて統一的に成り立つようなべき法則が存在する。Bagnold 則が成立する場合は、粉体密度を一定にすると $\sqrt{P}/\dot{\gamma}$ は定数

となったことを思い出そう。言い換えれば、 $I = \sqrt{P/\dot{\gamma}}$ と置くと、 I は粉体密度の変化と Bagnold 則の破れを両方含んだパラメータとなる。この I を横軸にとってデータを整理すると、高密度から低密度までのデータがすべてひとつのベキ則にのることが分かった。これは驚きである。ベキの指数に関しては臨界点近傍での解析 [13] が一応存在するが、これほど広い範囲で同じ法則が成立する理由は謎であり、挑戦的な結果であるように思われる。

フラストレーションと閾値的応答

最終日は具体的な塑性体を離れ、やや違う方面から、ここまでに見てきた塑性的挙動あるいは仕組みそのものに光をあてることを試みる。ひとつは柔らかな歯車をくみあわせた小さなフラストレート系についての寓話、もうひとつはスピングラスのレビューと中間尺度での解析の報告を含む「特別講演」である。

最初の大園氏らの実験を思い出してみよう。^{しわ}皺の構造を決めているものは、まっすぐになろうとする白金膜と縮もうとするシリコンゴムの力のバランスである。外から圧縮を加えるとバランスがいったん崩れ、別の状態に移行するが、力を除くともとの安定なパターンに戻る。また、加熱するとシリコンゴムの力のゼロ点がずれて、別のパターンが出現し、しかもそのパターンは多重安定になるのだった。

バネのゼロ点のずれと多重安定性の関係を見るために、ここで簡単なモデルを考察してみよう。ふたつの振り子を用意し、そのあいだを弾性軸(ねじりに対してバネの役割をする棒)でつなぐ。振り子の角度を θ_1, θ_2 として、この系のポテンシャルエネルギーは

$$U = -mgl \cos \theta_1 - mgl \cos \theta_2 + \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (18)$$

と書ける。弾性定数 k がある程度大きければ、安定状態(つりあいの位置)は $\theta_1 = \theta_2 = 0$ のみであることが示される(わざわざ計算しなくても直感的に納得できるはず)。次に、弾性軸に塑性変形を起こし「ゼロ点のずれ」を生じさせる。このずれを β とすると、ポテンシャルエネルギーは

$$U = -mgl \cos \theta_1 - mgl \cos \theta_2 + \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1 - \beta)^2 \quad (19)$$

となる。この β の存在により安定状態が変わってしまう。分かりやすい例として $\beta \sim \pi$, $k \gg mgl$ の場合を考えてみよう。弾性軸が塑性変形したおかげで、2つの振り子は180度反対の方向を向かなければならない。したがって、第1の振り子を下げようとすれば第2の振り子が上がり、第2の振り子を下げようとすれば第1の振り子が上がる。両方とも下げようとすれば弾性軸が犠牲になる。つまり「あちらを立てればこちらが立たず」という、複数の力が競合する状態になり、安定状態を求めるのは簡単ではなくなる(実際、この例ではパラメータ次第で多重安定状態が実現する)。人間の世界でもこのような例が存在し、たとえば「私はAさんもBさんも大好きなのに、二人は仲が悪くて『あなたはどっちの味方なの』と言われるんです、どうしたらいいんでしょう」という板挟み状態が出現する。このように、多体系において複数の相互作用が競合して折り合いをつけられなくなることをフラストレーション (frustration) という [17, 18]。

大園氏らの実験や、中原氏の実験についての私(大信田)の理論は、巨視的なフラストレーションの例である。ところが他方、ペーストなどの塑性体や粉体を含めて緩和時間が発散する系(広い意味でのガラス系)は、微視的に見るとランダムなフラストレーションの固まりである。ついでに

言えば金属の塑性の素過程は転位 (dislocation) [17, 19, 20] の移動であるが⁴、転位もまたストレスを解放できない不整合構造だからフラストレーションの一種とも言える。こういった微視的なフラストレーションと巨視的なフラストレーションはどのように関連しているのだろうか？ もしもあらゆるスケールにフラストレーションが存在し、しかもそれが相似でないとしたら、それはたとえば乱流 [21] のあらゆるスケールに渦が存在するのと同じく、手ごわい問題となる。とりあえず、流体研究者が乱流の素過程としての渦 [22] (またはその 1 次元版としての Burgers 衝撃波 [23–25]) を調べるのと同じように、私たちもフラストレーションについて調べてみよう。

栗津氏の報告では、多少の変形を許した 3 つの歯車からなる系を考察する。歯車というのは 2 つが噛み合って回転を伝達するものであって、直感的に明らかなように、3 つの歯車が同時に接触すると回転方向に矛盾が生じてしまい、うまく回らない。相互作用に競合が生じるのだから典型的なフラストレーションである [18]。これだけで話が終わってしまえば当たり前のことだが、栗津氏は粒子シミュレーション的な方法で「柔かい歯車」を構築し、具体的な数値実験を実行してみた。硬めの歯車で結果はほぼ予想通りで、2 体だと問題なく回転し、3 体だと、全く回らないか空回りするかのどちらかである (どちらになるかはかけているトルクの大きさによる)。ところが柔らかめの歯車だと予想外のことが起きる。柔かい歯車の場合、2 体だと噛み合いが不十分で、うまく力が伝達されない。3 体にしてフラストレーションを導入し、さらにトルクの値を閾値 (しきい値) 以上にするこゝで、はじめてうまく回るようになる！ こういうわけで、たとえばフラストレートした歯車系に温度差 (複数の熱浴) をつけると条件次第で特定の方向に回りだす。わずか 3 個の歯車であっても、その内部が柔かいなら、このような全く非自明な挙動を示す。もちろんわずか 3 個では本物のガラス系には程遠いかもしれないが、これはフラストレーションがもたらす非自明さについてのひとつの寓話である。寓話だから役に立たないということはあるまい。

最後に、多体競合系 (主にランダム磁性体及びランダム媒質中の弾性紐など) について、吉野氏に「特別講演」をお願いした。まず「ガラス転移温度以下の世界」と題して、スピングラス系 (ランダム磁性体のガラス状態) での巨視的実験で見られるさまざまな興味深い現象と、それに対する理論的アプローチについてのレビューが紹介される。この内容は「仮想研究会」の 1 日目と 2 日目の内容を思い出しながら聴くべきかもしれない。スピングラスにおける個々の話が塑性体の何に対応するのかを考えて「仮想質問」をしながら聴くべきだろう。ただし、ひとつだけ何に対応するのかよく分からないのが小液滴 (droplet) 仮説という中間尺度の現象論である。これにより多くのことが説明され、現象論としてはいちおう成功しているように思えるが、確固たる土台があるというよりは曲芸的な推論の連続であって「誰もがすぐに納得できるものとは言いがたく」今後さらに徹底的な検証が必要だろう、と吉野氏はコメントしている。

微視的な素過程の効果は巨視的な系では平均化されてしまうが、中間尺度的 (mesoscopic) な系では素過程の効果を直接見ることができる。栗津氏の 3 体歯車系で外力に対する閾値的応答が見られたことを思い出そう。多数の歯車をもち N 個程度のフラストレーションを含む系ではどういふ応答が予想されるだろうか。すべての歯車が協調的に応答し巨視的な閾値的 (あるいは階段的) 挙動が見られるのか、応答はまったくバラバラで平均化されてしまうのか、あるいは小液滴のような “小さなグループ” ごとに応答するのか？ 現象論に頼らずにこのような問題に直接アプローチするため、吉野氏は有限自由度の統計力学を用いた解析をおこなった。ここで自由度が有限であることが重要であり、その理由は、解析結果によれば、外力 (外部磁場) h を少しずつ上昇させると、間隔 $h_s \sim T_c/\sqrt{N}$ ごとに幅 $h_w \sim T/\sqrt{N}$ の階段的応答が生じ (吉野氏の図 3a および式 (15) を

⁴転位というのは結晶の線欠陥の一種で、これが動くことにより結晶面のずれをひきおこす。このメカニズムは、しばしば絨毯のシワにたとえられる [3]。

参照)、ここでどちらのスケールも $N \rightarrow \infty$ でゼロになってしまうからだ。また、 N を有限にして $T \rightarrow 0$ とした場合、階段の間隔は有限だが幅はゼロとなる。変数を適当に読み替え、さらに流体の非線形波動の分野で知られる Cole-Hopf 変換を (流体屋から見て) 逆向きに用いることにより、上記の結果は Burgers 衝撃波 [24] と対応づけられる。粘性ゼロでの Burgers 衝撃波の空間的特異性に対応するのは、ランダム競合系の外力依存性が低温で示す特異性である。

以上、9 件の「仮想講演」と、それを聴くための予備知識について、簡単に解説した。本当は他にも取り上げたかったテーマがあるが、それについては別の機会に考えることにしたい。また、本物の研究会を私が企画するとしたら、たぶん最後にディスカッションタイムを設けるだろうと思うが、それについては読者諸氏に自ら補っていただくのが適切かと思う。

寄稿者の方々には世話役である私の不手際により少なからずご迷惑をおかけしたことをおわびします。さらに、原稿が集まってから全体がまとまるまでに年度をまたいでしまったため、所属が変わったり助教授が准教授になったりして不整合を生じてしまった箇所が生じました。可能な範囲で手直ししてはありますが、もしそのような不整合が残っていてもご容赦いただければ幸いです。

それでは、ようこそ、私たちの「仮想研究会」へ。

参考文献

- [1] 中川 鶴太郎「流れる固体」岩波科学の本. 岩波書店 (1975).
- [2] 中川 鶴太郎「レオロジー」(第2版) 岩波全書 249. 岩波書店 (1978).
- [3] 尾崎 邦宏「レオロジーの世界」工業調査会 (2004).
- [4] 葉山 益次郎「塑性学と塑性加工」(第2版) オーム社 (1982).
- [5] 吉田 総仁「弾塑性体力学の基礎」共立出版 (1997).
- [6] 石川 博将「固体の非線形力学」養賢堂 (2000).
- [7] 古澤 邦夫 (監修)「新しい分散・乳化の科学と応用技術の新展開」テクノシステム (2006).
- [8] 中村 喜代次「非ニュートン流体力学」コロナ社 (1997).
- [9] B. V. Deryagin (藤川 健治 訳)「摩擦の話」ソビエトの少年科学 10 誠文堂新光社 (1968).
- [10] 石井 晃「物性論入門」共立出版 (2001).
- [11] 関本 謙「ゆらぎのエネルギー論」新物理学選書. 岩波書店 (2004).
- [12] G. Strobl (深尾 浩次, 宮本 嘉久, 宮地 英紀, 林 久夫 訳)「高分子の物理」Springer-Verlag Tokyo (1998).
- [13] 大槻 道夫, 非線形レオロジーの微視的理論, 物性研究 88 (2007), pp. 59–140.
- [14] 川崎 恭治「非平衡と相転移 — メソスケールの統計物理学 —」朝倉書店 (2000).

- [15] 戸田 盛和「分子運動 30 講」物理学 30 講シリーズ. 朝倉書店 (2004).
- [16] 久保 亮五「大学演習 熱学・統計力学」裳華房 (1961).
- [17] P. M. Chaikin & T. C. Lubensky (松原武生, 東辻千枝子, 東辻浩夫, 家富 洋, 鶴田健二 訳)
「現代の凝縮系物理学」吉岡書店 (2000).
- [18] J. Duran (中西 秀, 奥村 剛 訳)「粉粒体の物理学」吉岡書店 (2002).
- [19] 加藤 雅治「入門 転位論」裳華房 (1999).
- [20] 波多野 恭弘, ディスロケーションの非線形動力学 — 「ハード」マテリアルにおけるソフト
なダイナミクス, 物性研究 **84** (2005), pp. 123–155.
- [21] H. Tennekes & J. L. Lumley (藤原 仁志, 荒川 忠一 訳)「乱流入門」東海大学出版会 (1998).
- [22] P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press (1992).
- [23] J. M. Burgers, “A mathematical model illustrating the theory of turbulence”, *Adv. Appl.
Mech.* **1** (1948), pp. 171–199.
- [24] 巽 友正「流体力学」新物理学シリーズ 21. 培風館 (1982).
- [25] U. Frisch & J. Bec, “Burgulence”, in *New Trends in Turbulence* (2001), pp. 341–383.