

極大過剰決定系における 不確定特異点度を求めるアルゴリズム

竹居 賢治 (Kenji Takei)
大阪大学基礎工学研究科

概要

本小論はワイル代数 A_n の有限生成イデアル I に対しての A_n -module A_n/I の *slope* を, グレブナ基底に着目することにより, 有限回の操作で求める方法を示し, 次に実際に数式処理システムに実装したプログラムを紹介する. A_n/I の *slope* を求めるさい, 直接 *module* について考えるのは非常に困難であるが, オペレーター P の *slope* を求める事はたやすくできる. そこで, オペレーターの *slope* から真の *slope* である A_n -module A_n/I の *slope* を求めるための方法を示したのが [S.C.G.] である.

定理 3.7 では [S.C.G.] の方法を紹介し, 第 4 章では数式処理システム ([Tak]) に実装したプログラムの解説をする. また本文で紹介したプログラムは web サイト に置いてあるので興味をもたれたら "<http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~takei>" にありますので, 使用して頂きたい.

本研究に対し数々のご指導を下された本多 尚文¹ 先生に心よりお礼を申し上げます.

1 フィルター環

定義 1.1 ワイル代数 A_n における線形微分作用素を次のように定義をする.

$$P(x, \partial) = \sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta \in A_n \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \quad p_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}.$$

定義 1.2 $\mathcal{N}(P) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n} ; p_{\alpha, \beta} \neq 0\}$ とし P の *Newton diagram* と呼ぶ.

Y を $x_1 = 0$ とした時の超曲面とし, *liner form* $L(a, b) = pa + qb$ (ただし, p, q は非負で互いに素) があり, $P(x, \partial)$ の Y に沿った L -order を $\text{ord}_L(P)$ と書く.

定義 1.3

$$\text{ord}_L(P) := \max\{L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) ; (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}(P)\}.$$

$$F_{L, \cdot}(A_n) : A_n \text{ 上 } L\text{-order で誘導された filter.}$$

$$F_{L, k}(A_n) : \text{ord}_L(P) \leq k \text{ となる作用素 } P \text{ の集合.}$$

$$\text{filter } F : L(a, b) = a.$$

$$\text{filter } V : L(a, b) = b.$$

定義 1.4 $L \neq F, V$ のとき $F_{L, \cdot}$ は

$$\text{gr}^L(A_n) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \frac{F_{L, k}(A_n)}{F_{L, k-1}(A_n)}$$

とする.

¹ 北海道大学理学研究科

このとき,

$$\sigma^L(P) = \sum_{L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) = \text{ord}_L(P)} p_{\alpha, \beta} x^\alpha \xi^\beta.$$

となる.

$L = V$ のとき,

$$\sigma^V(P) = \sum_{\beta_1 - \alpha_1 = \text{ord}_V(P)} p_{\alpha, \beta} x^\alpha \xi^\beta.$$

$L = F$ のとき,

$$\sigma^F(P) = \sum_{|\beta| = \text{ord}_F(P)} p_{\alpha, \beta} x^\alpha \xi^\beta.$$

2 全順序

定義 2.1 $\prec$ 又は $\prec'$ を辞書式順序又は逆辞書式順序とし, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n}$ に対し, $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n}$ の順序 $\prec_D$ を

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &\prec_D (\alpha', \beta'), \\ &\Leftrightarrow (|\beta| < |\beta'|), \\ &\text{or } (|\beta| = |\beta'|, |\alpha| > |\alpha'|), \\ &\text{or } (|\beta| = |\beta'|, |\alpha| = |\alpha'|, \beta \prec \beta'), \\ &\text{or } (|\beta| = |\beta'|, |\alpha| = |\alpha'|, \alpha \prec' \alpha'). \end{aligned}$$

と定義し, L を非負係数の *linear form* とし, $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n}$ 上の項順序を

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &\prec_L (\alpha', \beta'), \\ &\Leftrightarrow \left(L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) < L(|\beta'|, \beta'_1 - \alpha'_1) \right), \\ &\text{or } \left(L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) = L(|\beta'|, \beta'_1 - \alpha'_1) \text{ , } (\alpha, \beta) \prec_D (\alpha', \beta') \right). \end{aligned}$$

と定義する.

定義 2.2 $P(x, \partial) = \sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta \in A_n$ に対して $\mathcal{N}(P)$ の全順序 $\prec_L$ に関する *leading exponent* を

$$\text{lexp}_L(P) := \max_{\prec_L} \{\mathcal{N}(P)\}.$$

と定義し, $(\alpha, \beta) := \text{lexp}_L(P)$ とするとき, P の *leading term*, *leading coefficient* を

$$\text{lterm}_L(P) := p_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta, \quad \text{lcoef}_L(P) := p_{\alpha, \beta}.$$

で定義する.

3 GRÖBNER BASES

定義 3.1 I を A_n のイデアルとする. I の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が I の (順序 $\prec$ に関する) グレブナ基底とは, 次の 2 つが成り立つことである.

1. I は $\mathbf{G}$ で生成されるイデアル.

$$2. E_{\prec}(I) = \bigcup_{i=1}^r \{ \text{lex}_{\prec}(P_i) + \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n} \}.$$

定義 3.2 P を A_n の作用素とし, P の *Newton polygon* $\mathcal{P}(P)$ を以下のように定義する.

$$E(P) \subset \{L; V \leq L \leq F\}, \{E(P); \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}(P), L(|\beta|, \beta_1 - \alpha_1) \leq 0\},$$

$$\mathcal{P}(P) := \bigcap_{L \in E(P)} \{(x, y); L(x, y) \leq 0\}.$$

補題 3.3 $\mathcal{F} = \{P_1, \dots, P_r\}$ を A_n のイデアル I の生成元とし, $\mathcal{F}$ が I の $\text{order } \prec_L$ に関するグレブナ基底であるとき, 次の 2 つが成立する.

1. $\{\sigma^L(P_i)\}_{i=1}^r$ は $\text{gr}^L(I)$ の生成元.
2. $E_V(I) = \bigcup_{i=1}^r (\text{lex}_V(\sigma^L(P_i)) + \mathbb{Z}_{\geq 0}^{2n})$ ならば, $\{\sigma^V(\sigma^L(P_i))\}_{i=1}^r$ は $\text{gr}^V(\text{gr}^L(I))$ を生成する.

ただし $E_V(I) := \{\text{lex}_V(\sigma^L(P_i)); \sigma^L(P) \in \text{gr}^L(I)\}$.

補題 3.4 A_n のイデアルを I , L を $L \neq V$ な *linear form* とする. $\text{Irr}(P)$ を $\mathcal{P}(P)$ の辺の傾き全体の集合と定義し, $\text{Irr}(P, L)$ を $\mathcal{P}(P)$ 上の辺で L より大きい最小の傾きとし (L は $\mathcal{P}(P_i)$ 上にないものとする), $\tilde{L} := \min_{1 \leq i \leq r} \{\text{Irr}(P_i, L)\}$ としたとき, $\tilde{L} > L' > L$ なる全ての L' に対して,

$$\text{gr}^{L'}(I) = \text{gr}^V(\text{gr}^L(I)).$$

定義 3.5 I を A_n のイデアルとし, L を $L \neq V, F$ な *linear form* とする. L が A_n/I の *slope* とは, $\text{gr}^L(I)$ が F, V の両方で *homogeneous* でないとき言う.

命題 3.6 I を A_n のイデアルとする. このとき, A_n/I の *slope* は有限個である.

定理 3.7 (A.SSI, F.J.CASTRO, J.M.GRANGER) $L \neq V$ とし, $\{P_1, \dots, P_r\}$ をイデアル I を生成するグレブナ基底と仮定する. $\text{Irr}(P)$ を $\mathcal{P}(P)$ の辺の傾きの全体の集合と定義し, $\text{Irr}(P, L)$ を $\mathcal{P}(P)$ の上の辺で L より大きい最小の傾きとし, $L^1 := \min_{1 \leq i \leq r} \{\text{Irr}(P_i, L)\}$ としたとき, *linear form* L^1 と $\{P'_1, \dots, P'_r\}$ なる生成元があり, 以下の条件をみたす.

1. $\sigma^L(P_i) = \sigma^{L^1}(P'_i)$.
2. $L^1 > \Lambda > L$ なる任意の Λ に対して, $\text{gr}^\Lambda(I) = \text{gr}^V(\text{gr}^L(I))$ が成立する.
3. $L' := \min_{1 \leq i \leq r} \{\text{Irr}(P'_i, L)\}$ としたとき, $\sigma^{L'}(P'_i) \notin \text{gr}^V(\text{gr}^L(I))$ なる P'_i があり, L' は I の *slope* となる.

証明 3.8 補題 3.4 より次のことが言える.

- $\{\sigma^L(P_i)\}_{i=1}^r$ は $\text{gr}^L(I)$ の生成元:
- $E_V(I) = \bigcup_{i=1}^r (\text{lex}_V(\sigma^L(P_i)) + \mathbb{N}^{2n})$.

$L^1 = V$ のとき, この定理は成立していることが解るので, $L' \neq V$ とする.

$L^1 > \Lambda > L$ な任意の Λ で, $\sigma^\Lambda(P_i) = \sigma^V(\sigma^L(P_i))$ をえる. すなわち, $\text{gr}^\Lambda(I) = \text{gr}^V(\text{gr}^L(I))$.

$\sigma^{L^1}(P_i)$ が linear form F, V の両方で *homogeneous* となっていない様な $\{P_i\}_{i=1}^r$ のなかで i の最小な物を P_{i_0} とする. 今仮に $i_0 = 1$ とする. 実際 L^1 が $\mathcal{P}(P_i)$ 上の傾きの中の一つであることより, P_{i_0} の存在は言える.

$$\sigma^{L^1}(P_1) := \sigma^V(\sigma^L(P_1)) + \sum_{k=1}^s M(a_k, b_k).$$

とおく. ここで, $M(a_k, b_k)$ は F, V の両方で *homogeneous* となる要素で,

$$\text{ord}_F(M(a_k, b_k)) = a_k, \quad \text{ord}_V(M(a_k, b_k)) = b_k, \quad a_1 > \cdots > a_s.$$

とする.

Weierstrass-広中の割算定理より,

$$M(a_1, b_1) = \sum_{i=1}^r \gamma_i \sigma^V(\sigma^L(P_i)) + \gamma,$$

$$\text{lexp}_V(\gamma_i \sigma^V(\sigma^L(P_i))) \leq_V \text{lexp}_V(M(a_1, b_1)).$$

と書け, F, V で *homogeneous* となる γ_i, γ がある.

- $\gamma \neq 0$ なら, $\text{gr}^\Lambda(I)$ が斉次イデアルであることにより, $M(a_1, b_1) \notin \text{gr}^V(\text{gr}^L(I))$. $\text{gr}^{L^1}(I)$ が slope でないと仮定する. 仮定から, $\text{gr}^{L^1}(I)$ は *homogeneous* より,

$$\text{gr}^{L^1}(I) = \text{gr}^F(\text{gr}^{L^1}(I)).$$

F に関する補題より, $L^1 > L' > L$ なる L' が存在し,

$$\text{gr}^F(\text{gr}^{L^1}(I)) = \text{gr}^F(\text{gr}^{L'}(I)).$$

V に関する補題より, $L^1 > L'' > L$ なる L'' が存在し,

$$\text{gr}^V(\text{gr}^L(I)) = \text{gr}^V(\text{gr}^{L''}(I)).$$

L^1 と L との間に module の slope は存在しないから, $L'' = L'$ と仮定して良く,

$$\text{gr}^{L'}(I) = \text{gr}^V(\text{gr}^{L''}(I)) = \text{gr}^F(\text{gr}^{L'}(I)).$$

よって,

$$\text{gr}^{L^1}(I) = \text{gr}^V(\text{gr}^L(I)).$$

$$\sigma^{L^1}(P_1) \in \text{gr}^{L^1}(I) \text{ であるから,}$$

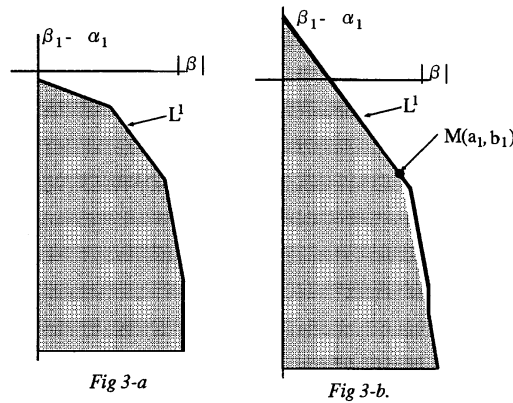
$$\sigma^{L^1}(P_1) \notin \text{gr}^V(\text{gr}^L(I)) \text{ に矛盾.}$$

よって L^1 は module の slope である.

- $\gamma = 0$ のとき, $(\Gamma_i$ を γ_i の *preimage* ($\sigma^V(\sigma^L(\Gamma_i)) = \gamma_i$)) とし,

$$P_1^{(1)} := P_1 - \sum_{i=1}^r \Gamma_i P_i, \quad \text{ord}_L(M(a_1, b_1)) < \text{ord}_L(\sigma^L(P_1)).$$

P_1 の *Newton diagram* は Fig 3. 図左, とすると, $P_1^{(1)}$ の *Newton diagram* は Fig 3. 図右の太実線部分のようになる.



すなわち, $\sigma^L(P_1) = \sigma^L(P_1^{(1)})$.

以上より, $\sigma^V(\sigma^L(P_1)) = \sigma^V(\sigma^L(P_1^{(1)}))$ であるから, $L^1 > \Lambda > L$ なる任意の Λ で

$$\sigma^\Lambda(P_1^{(1)}) = \sigma^V(\sigma^L(P_1)).$$

$\sigma^{L^1}(P_1^{(1)})$ が F, V で *homogeneous* でないなら,

$$\sigma^{L^1}(P_1^{(1)}) = \sigma^V(\sigma^L(P_1^{(1)})) + \sum_{j=1}^{s'} M(a'_j, b'_j).$$

$M(a'_j, b'_j)$ は F, V の両方で *homogeneous* で,

$$\text{ord}_F(M(a'_j, b'_j)) = a'_j, \quad \text{ord}_V(M(a'_j, b'_j)) = b'_j.$$

で任意の j で $a'_j < a_1$ が成立. Weierstrass-広中の割算定理以下を P_1 を $P_1^{(1)}$ に置き換えて繰り返す.

すると, この *loop* は, $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}; a < a_1, L^1(a, b) = \text{ord}_{L^{(1)}}(P_1)\}$ が有限な領域なので, いつかは止まる. 結果, $\sigma^{L^1}(P_1^{(k)}) \notin \text{gr}^V(\text{gr}^L(I))$ または, $\sigma^{L^1}(P_1^{(k)})$ は F, V で *homogeneous* を得る. $\sigma^{L^1}(P_1^{(k)})$ が F, V で *homogeneous* なとき, $P_1^{(k)}$ を P'_1 とし, 生成元を $\{P'_1, P_2, \dots, P_r\}$ とし, 一番ははじめから繰り返す. そのさい必要なら L^1 のかわりに L^2 を新しくとる.

$$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}; L^1(a, b) \leq \text{ord}_{L^1}(P_i), b \geq \text{ord}_V(\sigma^L(P_i)), a \leq \text{ord}_F(\sigma^L(P_i))\}.$$

この領域を図示すると, Fig 4. の斜線部分になる. この領域は有限な領域なので, 1 回の *loop* ごとに L^1 が Fig 4. の矢印の方向に動くので, 斜線部分の点は上記の操作により最低 1 個ずつ消える. これにより L^1 は有限回の操作により傾き V に到達することが可能である.

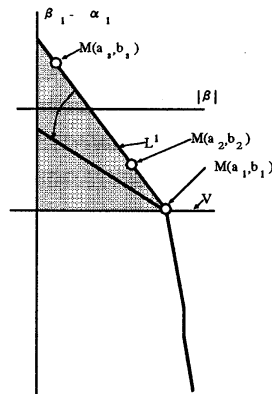


Fig 4.

以上の証明より, オペレーターの slope から module の slope を有限回の操作により求めることが出来ることが証明できた. $\square$

4 kan/sml への実装

本プログラムでは $Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x = 0\}$ とし, "[] /P set" で囲まれた方程式系の不確定特異点度を計算するようにプログラムしている. サンプルとし Appell の 2 変数超幾何関数のみたす偏微分方程式系を用意している. ここでは Appell の超幾何関数 F_1 に関する偏微分方程式系の原点での計算を例にとり説明する.

4.1 使用方法

sml を起動後 `sm1>$slope.sm1$ run ;` とすると,

```
operators
[ x*Dx^2+y*Dx*Dy-x^2*Dx^2-x*y*Dx*Dy+r*Dx-x*a*Dx-x*b*Dx-y*b*Dy-x*Dx-a*b ,
  -x*y*Dx*Dy-y^2*Dy^2+x*Dx*Dy+y*Dy^2-x*b'*Dx-y*a*Dy-y*b'*Dy-y*Dy+r*Dy-a*b' ]
```

と計算する方程式系を表示する.

本プログラムでは L -order のグレブナ基底を求めるための L を決定するために,

```
[ (x,y,a,b,r,g,a',b',r',g') ring_of_differential_operators
[
  [(x) 0 (y) 0 (Dx) 1 (Dy) 1 (a) 0 (b) 0 (r) 0 (g) 0
  (a') 0 (b') 0 (r') 0 (g') 0 (Da) 0 (Db) 0 (Dr) 0 (Dg) 0
  (Da') 0 (Db') 0 (Dr') 0 (Dg') 0]
  [(x) -1 (y) 0 (Dx) 0 (Dy) -1 (a) 0 (b) 0 (r) 0 (g) 0
  (a') 0 (b') 0 (r') 0 (g') 0 (Da) 0 (Db) 0 (Dr) 0 (Dg) 0
  (Da') 0 (Db') 0 (Dr') 0 (Dg') 0]
] weight_vector 0
] define_ring /RingV set
```

と ring を定義し, この上で計算したグレブナ基底を grP と出力し, その要素の slope の最小の傾きより小さい傾きを L とする. 次に "`sm1>slope ;`" と入力すると計算が始まる.

```

sm1>$slop.sm1$ run ;
operators
[      x*Dx^2+y*Dx*Dy-x^2*Dx^2-x*y*Dx*Dy+r*Dx-x*a*Dx-x*y*b*Dy
-x*Dx-a*b , -x*y*Dx*Dy-y^2*Dy^2+x*Dx*Dy+y*D*b'*Dx-y*a*Dy-y*
b'*Dy-y*Dy+r*Dy-a*b' ]
sm1> 6. 7. 8o
Completed (GB with sugar).
sm1>slope ;
5. 6. 7. 8o
Completed (GB with sugar).
[      x*Dx^2+y*Dx*Dy-x^2*Dx^2-x*y*Dx*Dy+r*Dx-x*a*Dx-x*y*b*Dy-
x*Dx-a*b , -x*y*Dx*Dy-y^2*Dy^2+x*Dx*Dy+y*D*b'*Dx-y*a*Dy-y*b'
*Dy-y*Dy+r*Dy-a*b' , -y*a*Dx*Dy+y*Dy-y*Dx*Dy-x*y*b*Dx*Dy-y^2
*b*Dy^2+x*a*Dx*Dy+x*b*Dx*r*Dx*Dy+y*b*Dy^2+x*Dx*Dy-a*b'*Dx+r*b'
*Dx-b'*Dx-x*b*x-y*a*b*Dy-y*b*b'*Dy-y*b*Dy+a*b*Dy+b*Dy-a*b*b' ,
x**Dx*Dy-x*y^2*r*Dx*Dy+y^3*a*Dy^2-y^3*r*Dy^2-y^2*a*Dy2*r*Dy^2
+x*y*Dx*Dy+x^2*y*b*Dx*Dy+x*y^2*b*Dy^2-x^2*a*y-x^2*b*Dx*Dy+x^2*r
*Dx*Dy-x*y*b*Dy^2-x^2*Dx*Dy+x*y*Dx-x*y*r*b'*Dx+y^2*a^2*Dy-y^2*
a*r*Dy+y^2*a*b'*Dy-y'*Dy+x*a*b'*Dx-x*r*b'*Dx+y^2*a*Dy-y^2*r*Dy
-y*a*r*Dy2*Dy+x*b'*Dx+x^2*b*b'*Dx+x*y*a*b*Dy+x*y*b*b'*Dy+x*y-x*
a*b*Dy-x*b*Dy+y*a^2*b'-y*a*r*b'+x*a*b*b' ]
sm1>[      [      [      1 , 0 ] ] , [      [      1 , 0 ] [      [      1 , 0 ] ]
, [      [      1 , 0 ] ] ]
sm1>
[      1 , 0 ]
sm1>END

```

結果は $[1, 0]$ を出力する。これは傾きが $\frac{0}{1}$ すなわち 0 を意味し、原点においては確定特異点型の微分方程式系だと分かる。この例の場合 MMX 166M メモリ 32M の計算機を使用し約 3 秒で計算が終了する。

4.2 function の説明

- terms: 入力 "grP" にあらわれる単項式をリストにする。
- diagram: Newton diagram を求める。
- garbage: Newton polygon の頂点を求めリストにする。
- opt-slopev: Newton polygon の辺の傾きをリストにする。
- startL: L -order のグレブナ基底を求めるための L を求める。
- GB: 入力 L, P より P の L -order のグレブナ基底を求める。
- garbage-sl: "opt-slopev" により求められた辺の傾きで重複しているものを削除する。
- selectL1: L より大きい Newton polygon 上の辺の傾きの中で最小の傾き L^1 を求める。

- selectg: グレブナ基底の中から傾き L^1 を持つ P_i を求め P_1 とする.
- Masbs: $\sigma^{L^1}(P_1) = \sigma^V(\sigma^L(P_1)) + \sum M(a_k, b_k)$ なる $M(a_k, b_k)$ を求める.
- primL1.func: $\sigma^{L^1}(P_1)$ を求める.
- primL.func: $\sigma^L(P_1)$ を求める.
- primVL.func: $\sigma^V(\sigma^L(P_1))$ を求める.
- primVL1.func: $\sigma^V(\sigma^{L^1}(P_1))$ を求める.
- sumM.func: $M(a_1, b_1)$ を求める.
- gamma: $M(a_1, b_1) = \sum \gamma_i \sigma^V(\sigma^L(P_1)) + \gamma$ なる γ_i, γ を求め, A_n -module A_n/I の slope を求める.

参考文献

- [B.W] Becker.T, Weispfenning.V, "Gröbner bases. (Graduate Mboxes in Mathematics)", Springer, New York
- [C.L.O] Cox.D, Little.J, O'Shea.D, "Ideals, Varieties, and Algorithms. (Undergraduate Mboxes in Mathematicd)", Springer, New York
- [Hi.U] 広中 平祐, ト部 東介, "解析空間入門 (数学ライブラリー 1)", 朝倉書店
- [Lit] 飯高 茂, "可換環論", 岩波講座 基礎数学 代数学 iV, 岩波書店
- [Kan] 金子 晃, "ニュートン図形・特異点・振動積分", 上智大学講究録 No. 1
- [La] Laurent.Y, "Polygon de Newton et b-function pour les modules microdifférentials", Ann. Sci. ent. Ec. Norm. sup. , 4e série 20 (1987) 391-441
- [Oak1] 大阿久 俊則, "グレブナ基底と線形偏微分方程式系", 上智大学数学講究録 No. 38
- [Oak2] Toshinori Oaku, "Algorithms for the b-function and Dmodule associated with a polynomial", Journal of Pure and Applied Algebra 117 & 118 (1997) 495-518
- [Oak3] Toshinori Oaku, "GRÖBNER BASES FOR D-MODULES ON A NON-SINGULAR AFFINE ALGEBRAIC VARIETY", Tohoku Math.J. 48 (1996) 575-600
- [Oak4] Toshinori Oaku, "Computation of the Characteristic Variety and the Singular Locus of a System of Differential Equations with Polynomial Coefficients", Japan J. Indust. Appl. math., 11 (1994) 485-497
- [O.K] 大島 利雄, 小松彦三郎, "1 階偏微分方程式", 岩波講座 基礎数学 解析学 (II) iii, 岩波書店
- [S.C.G] A.SSI, F.J.CASTRO-JIMÉNEZ and J.M.GRANGER, "How to calculate the slopes of a D-module", Compositio Mathematica 104 (1996) 107-123
- [Sh.O] 下山 武司, 大阿久 俊則, "D-加群のグレブナ基底の計算とその応用", 京都大学数理解析研究所 講究録 811 (1992) 113-126
- [Tak] Nobuki. Takayama, "kan/sm1", <http://www.math.kobe-u.ac.jp/KAN>
- [Yok] 横沼 健雄, "テンソル空間と外積代数", 岩波講座 基礎数学 線形代数 iV, 岩波書店