数理解析研究所講究録
357巻 1979年 208-218

ある種の擬微分作用素とその準楕円性への応用

東京電機大 理工学部　荒牧 淳一

0. 序

本講演では、特性集合 Σ が有限個の閉錐部分多様体 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ の和集合となる擬微分作用素 P を考察する。ある種の横断性条件と包含性条件の下で P が準楕円型となるための必要十分条件を与える。

$n=1$ のとき、我々の考えるクラスは Helffer[5] によって与えられたクラス $L^{m,M}_{k}(X;\Sigma)$, さらに $k=2$ のときには Sjöstrand[8] によって与えられたクラス $L^{m,M}_{c}(X;\Sigma)$ と一致する。(Helffer[4] も参照)． $n=1$, $M=k=2$ で Σ が包合的なときには Boutet de Monvel[1] は我々のクラスより一般な $OPS^{-m,-M}$ にパラメトリックスをもつための必要十分条件を得た。これはまた P が損失1の準楕円型であるための必要十分条件でもある。一般の M, k については [5] は損失 $\frac{M}{k}$ の準楕円型であることを証明するために、P に対する左パラメトリックスを、

構成した。これは[1]の一般化である。

我々は[5]で開発された手法を使い P に関するある種の不変量を定義し、それを用いて P が準楕円的であるための必要十分条件を述べる。証明については概略を述べるにとどめる。

1. 定義と結果

X を N 次元パラコンパクト C^∞-多様体, $T^*X\setminus 0$ を X の余接バンドルからゼロ切断面を除いたものとする。

<u>定義 1.1</u>　$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ を $T^*X\setminus 0$ における余次元 $p_1, p_2, \cdots p_n$ の閉錐部分多様体, m を実数, $M_1, M_2, \cdots M_n$ を非負整数, $k_1, k_2, \cdots k_n$ を 2 以上の整数とする。このとき擬微分作用素 P が、クラス $OPL^{m, M_1, \cdots M_n}_{k_1, \cdots k_n}(X; \Sigma_1, \Sigma_2, \cdots \Sigma_n)$ に属するとは、各局所座標系 $U \subset X$ において P の表象 $p(x,\xi)$ が次の(1.1)〜(1.3)を満たすときをいう：

(1.1)　$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x,\xi)$, ここで $p_{m-j} \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N \setminus 0))$ であり, $m-j$ 次の正値斉次性をもつ。

(1.2)　U に含まれる各コンパクト集合 K に対して, 定数 $C_K > 0$ が存在して $(x,\xi) \in K \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$, $|\xi| \geq 1$ のとき

$$\frac{|p_{m-j}(x,\xi)|}{|\xi|^{m-j}} \leq C_K \prod_{l=1}^{n} d_l(x,\xi)^{(M_l - k_l j)_+}$$

(1.3)　Uに含まれる各コンパクト集合Kに対して、定数 $C'_K>0$ が存在して $(x,\xi)\in K\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)$, $|\xi|\ge 1$ のとき

$$\frac{|p_m(x,\xi)|}{|\xi|^m}\ge C'_K\prod_{l=1}^{n} d_l(x,\xi)^{M_l}$$

ここで $d_l(x,\xi)=\inf_{(y,\eta)\in\Sigma_l}\{|y-x|+|\eta-\frac{\xi}{|\xi|}|\}$ であり、$s\in\mathbb{R}$ に対して $(s)_+=\sup(0,s)$ である。

注意 1.2.　もしある i に対して $M_i=0$ ならば $OPL^{m,M_1,\dots,M_n}_{k_1,\dots,k_n}(X;\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)=OPL^{m,M_1,\dots,M_{i-1},M_{i+1},\dots,M_n}_{k_1,\dots,k_{i-1},k_{i+1},\dots,k_n}(X;\Sigma_1,\dots,\Sigma_{i-1},\Sigma_{i+1},\dots,\Sigma_n)$ となる。また $P\in OPL^{m,M_1,\dots,M_n}_{k_1,\dots,k_n}(X;\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)$ のとき P の特性集合 Σ は $\Sigma_1,\dots,\Sigma_n$ の和集合となる。

定義 1.3.　$q_1, q_2\in L^{m,M_1,\dots,M_n}_{k_1,\dots,k_n}$ ((1.1)～(1.3)をみたす表象のクラス) とするとき、$T^*X\setminus 0$ のある錐近傍 U で $q_1\equiv q_2$ とは、$q_1-q_2\in L^{m,M_1+(k_1-1),\dots,M_n+(k_n-1)}_{k_1,\dots,k_n}$ であるとする。

このとき次が成立する。

命題 1.4.　$P\in OPL^{m,M_1,\dots,M_n}_{k_1,\dots,k_n}(X;\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)$ とする。(実際は (1.1) と (1.2) を満たすだけでよい)。このとき、各 $\rho\in\Sigma$ に対して $I_\rho=\{i\,;\,\rho\in\Sigma_i\}=(i_1,\dots,i_s)$ とおくと、ある ρ の錐近傍 U が存在して U で

$$q\overset{\text{def}}{=}\exp\Big(-\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\Big)p=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^t}{t!}\Big(\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\Big)^t p$$

と定義すると $\mathfrak{g}$ は $L^{m, M_{i_1}, \cdots, M_{i_s}}_{k_{i_1}, \cdots, k_{i_s}} / L^{m, M_{i_1}+(k_{i_1}-1), \cdots, M_{i_s}+(k_{i_s}-1)}_{k_{i_1}, \cdots, k_{i_s}}$ で考えたとき、局所斉次正準変換 $\tau ; T^*X \setminus \{0\} \longrightarrow T^*R^N \setminus \{0\}$ の F で不変である。このことは F を τ に付随した積分型フーリエ積分作用素，P' を $P' = FPF^{-1}$ の表象，$\mathfrak{g}'$ を P' から上の公式により作られる表象とすると $\mathfrak{g}'(\tau(\rho')) = \mathfrak{g}(\rho')$，$(\rho' \in U)$ を意味する。

次に $\mathfrak{g} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{g}_{m-j} \in L^{m, M_{i_1}, \cdots, M_{i_s}}_{k_{i_1}, \cdots, k_{i_s}} / L^{m, M_{i_1}+(k_{i_1}-1), \cdots, M_{i_s}+(k_{i_s}-1)}_{k_{i_1}, \cdots, k_{i_s}}$ として $T_\rho(T^*X \setminus \{0\})^{\sum_{\ell=1}^{s}(M_{i_\ell} - k_{i_\ell} \cdot j)}$ 上の $\sum_{\ell=1}^{s}(M_{i_\ell} - k_{i_\ell} \cdot j)$ -線型形式 $\tilde{\mathfrak{g}}_{m-j}$ を次で定義する：

$X^1_{i_1}, X^2_{i_1}, \cdots, X^{M_{i_1}-k_{i_1}\cdot j}_{i_1}, \cdots, X^1_{i_s}, \cdots, X^{M_{i_s}-k_{i_s}\cdot j}_{i_s} \in T_\rho(T^*X \setminus \{0\})$ に対して

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{m-j}(\rho)(X^1_{i_1}, \cdots, X^{M_{i_s}-k_{i_s}\cdot j}_{i_s}) =$$

$$= \prod_{\ell=1}^{s} \frac{1}{(M_{i_\ell} - k_{i_\ell} \cdot j)!} (\tilde{X}^1_{i_1} \cdots \tilde{X}^{M_{i_s}-k_{i_s}\cdot j}_{i_s} \mathfrak{g}_{m-j})(\rho).$$

ここで $\tilde{X}$ は X の ρ の近傍への拡張である。

<u>注意1.5.</u> (1) 上の $\tilde{\mathfrak{g}}_{m-j}$ の定義は $\mathfrak{g}$ のクラスのとり方に独立、また $\tilde{\mathfrak{g}}_{m-j}$ は対称である。

(2) $n=1$, $M_1 = k_1$ のときは $\mathfrak{g}_m(x,\xi) = P_m(x,\xi)$, $\mathfrak{g}_{m-1}(x,\xi) =$
$= P_{m-1}(x,\xi) - \frac{1}{2i}\sum_{\ell=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\ell}\frac{\partial}{\partial \xi_\ell} P_m(x,\xi)$ である。

我々はさらに $\rho \in \Sigma$ に対して次の定義をする。

$$\tilde{\mathfrak{g}}(\rho, X) = \sum_{j=0}^{J_{I_\rho}} \tilde{\mathfrak{g}}_{m-j}(\rho)(X, \cdots, X), \quad X \in T_\rho(T^*X \setminus \{0\})$$

ここで $J_{I_\rho} = \mathrm{Max}\{M_{i_\ell}/k_{i_\ell} ; 1 \leq \ell \leq s\}$ である。

$$\Gamma_\rho = \{ \tilde{q}_\rho(\rho, X) \,;\, X \in T_\rho(T^*X \setminus \{0\}) \}\text{。}$$

注意1.6.　$n=1$, $M_1 = k_1$ のときは

$$\tilde{q}_\rho(\rho, X) = (\text{transversal hessian of } P_m) + (\text{subprincipal symbol})$$

となる。

次に我々は $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$ に次のような横断性条件と包含性条件を仮定する：

(H.1)　各 $\rho \in \Sigma$ に対して $I_\rho = (i_1, \cdots, i_s)$ とおくとき $p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_s}$ 個の C^∞-実数値斉次関数 $u_{i_j}^k$, $1 \le k \le p_{i_j}$, $1 \le j \le s$, が ρ の錐近傍で存在して、そこで

$$\Sigma_{i_j} = \{ u_{i_j}^1 = u_{i_j}^2 = \cdots = u_{i_j}^{p_{i_j}} = 0 \}$$

とかける。また $du_{i_j}^k$ は ρ で1次独立であるとする。

(H.2)　各 i, j に対して $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ は包合的である。すなわち $u_i^1, \cdots, u_i^{p_i}$, $u_j^1, \cdots, u_j^{p_j}$ を (H.1) の如き関数とするとき $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ 上

$$\{ u_i^k, u_j^l \} = 0$$ が成りたつ。

(H.3)　$\sum_{l=1}^{N} \xi_l \frac{\partial}{\partial \xi_l}$, $H_{u_{i_j}^k}$ $(1 \le k \le p_{i_j}, 1 \le j \le s)$ は ρ で1次独立である。

ここでハミルトン-ヤコビのベクトル場 H_f とポアソンの括弧式はそれぞれ次の公式で定義される：

$$H_f = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right),$$

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right).$$

このとき我々は次の定理を得る：

定理 1.7. $P \in OPL^{m,M_1,\cdots,M_n}_{k_1,\cdots,k_n}(X;\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n)$ とする。(H.1), (H.2), (H.3) を仮定するとこのとき P が $\rho\in\Sigma$ で損失 M_{I_ρ} の準楕円型であるための必要十分条件は Γ_ρ が原点を含まないことである。ここで $I_\rho=(i_1,\cdots,i_\ell)$ とするとき $M_{I_\rho}=\dfrac{M_{i_1}+\cdots+M_{i_\ell}}{k_{i_1}+\cdots+k_{i_\ell}}$ でありまた P が ρ で損失 M_{I_ρ} の準楕円型であるとは $u\in\mathcal{D}'(X)$, ρ で $Pu\in H^s$ のとき ρ で $u\in H^{s+m-M_{I_\rho}}$ が成りたつことであるとする。

さらに我々は次を得る：

系 1.8. 上定理における仮定が成り立つとする。各 $\rho\in\Sigma$ に対して Γ_ρ が原点を含まないとすると、P は損失 M の準楕円型である。ここで $M=\mathrm{Max}\{M_{I_\rho};\rho\in\Sigma\}$ であり、P が損失 M の準楕円型であるとは、$u\in\mathcal{D}'(X)$, $Pu\in H^s$ のとき $u\in H^{s+m-M}$ が成り立つこととする。

注意 1.9. (1) 我々は定理の証明において P の左パラメトリックスをクラス $L^{M_{I_\rho}-m}_{\rho,\delta}$ に構成する。ここで $\rho=1-\frac{1}{k}$, $\delta=0$, $k=\mathrm{Min}\{k_j;1\le j\le n\}$ である。（クラス $L^{M_{I_\rho}-m}_{\rho,\delta}$ については Hörmander [6] を参照されたい。）

(2). M_{I_ρ} が $\rho\in\Sigma$ に対して定数ならば系の条件は必要でもある。

(3). $n=1$ のときこの定理は Helffer [5] によって証明された。

2. 命題1.4の証明の概略.

$\rho \in \Sigma$, $I_\rho = (i_1, \cdots, i_s)$ とすると C^∞-実数値斉次関数 $u^k_{i_\ell}$ ($1 \le k \le p_{i_\ell}$, $1 \le \ell \le s$) を適当に選んで微局所的に

$$\Sigma_{i_\ell} = \{ u^1_{i_\ell} = \cdots = u^{p_{i_\ell}}_{i_\ell} = 0 \}$$

とできる。ここで $u^k_{i_\ell}$ は位数 $\dfrac{1}{k_{i_1} + \cdots + k_{i_s}}$ の斉次性をもつと仮定してよい。次に $U^k_{i_\ell}$ を主表象が $u^k_{i_\ell}$ である擬微分作用素とする。このとき $P \in OPL^{m, M_{i_1}, \cdots, M_{i_s}}_{k_{i_1}, \cdots, k_{i_s}}$ ならば Taylor の公式から P は次のように書ける:

$$P = \sum_{j=0}^{J_{I_\rho}} \sum_{\substack{(\alpha)_\ell \in [1,2,\cdots,p_{i_\ell}]^{M_{i_\ell} - k_{i_\ell} \cdot j} \\ 1 \le \ell \le s}} A_{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, j} (U)^{(\alpha)_1}_{i_1} \cdots (U)^{(\alpha)_s}_{i_s}$$

ここで $A_{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, j}$ は位数 $m - \dfrac{M_{i_1} + \cdots + M_{i_s}}{k_{i_1} + \cdots + k_{i_s}}$ の擬微分作用素で記号については次のとおりである:

$$J_{I_\rho} = \mathrm{Max} \left\{ \frac{M_{i_\ell}}{k_{i_\ell}} ; 1 \le \ell \le s \right\},$$

$$(\alpha)_\ell = (\alpha^1_\ell, \cdots, \alpha^{M_{i_\ell} - k_{i_\ell} \cdot j}_\ell), \quad \alpha^k_\ell \in \{1, \cdots, p_{i_\ell}\},$$

$$(U)^{(\alpha)_\ell}_{i_\ell} = U^{\alpha^1_\ell}_{i_\ell} \cdots\cdots U^{\alpha^{M_{i_\ell} - k_{i_\ell} \cdot j}_\ell}_{i_\ell} \ .$$

次に我々は

$$q_{m-j} = \sigma_{m-j} \Big(\sum_{\substack{(\alpha)_\ell \in [1, \cdots, p_{i_\ell}]^{M_{i_\ell} - k_{i_\ell} \cdot j} \\ 1 \le \ell \le s}} A_{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, j} (U)^{(\alpha)_1}_{i_1} \cdots (U)^{(\alpha)_s}_{i_s} \Big)$$

, $j = 0, 1, \cdots, J_{I_\rho}$ とおく。

このとき次の補題を必要とする:

補題 2.1. $Q = \sum_{\substack{(\alpha)_l \in [1,\dots,p_{i_l}]^{M_{i_l}-k_{i_l}j} \\ 1 \le l \le s}} A_{\alpha_1,\dots,\alpha_s,j} (U)_{i_1}^{(\alpha)_1} \cdots (U)_{i_s}^{(\alpha)_s}$

を上で得られたものとする。このとき Q の表象 q は次で与えられる：

$$q \equiv \exp\left(\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)\cdot \sigma_{m-j}(Q) \quad \mathrm{mod}\ L^{m,\,M_{i_1}+(k_{i_1}-1),\dots,M_{i_s}+(k_{i_s}-1)}_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}。$$

証明については[5]を参照。

この補題を使うと P の表象 p は

$$p \equiv \exp\left(\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)\cdot q \quad \mathrm{mod}\ L^{m,\,M_{i_1}+(k_{i_1}-1),\dots,M_{i_s}+(k_{i_s}-1)}_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}$$

で与えられる。故に命題 1.4 は証明された。

3. 定理1.7の証明の概略

(1) 十分性

$P \in OPL^{m,M_1,\dots,M_n}_{k_1,\dots,k_n}(X;\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)$, $\rho \in \Sigma$, $I_\rho = (i_1,\dots,i_s)$ とする。このとき仮定(H.1), (H.2), (H.3) の下で、ハミルトン－ヤコビの理論を使うと、局所的斉次正準変換 κ; $T^*X \setminus \{0\} \longrightarrow T^*\mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ で Σ_{i_l} が $\Sigma'_{i_l} = \{(x,\xi) \in T^*\mathbf{R}^N \setminus \{0\}\,;\, \xi_{p_1+\cdots+p_{i_{l-1}}+1} = \cdots = \xi_{p_1+\cdots+p_l} = 0\}$, $l = 1, 2, \dots, s$ に移るものがある。また定理の条件、結論ともに正準変換の下では不変であるから、我々は $X = \mathbf{R}^N$, $\Sigma_{i_l} = \{(x,\xi) \in T^*\mathbf{R}^N \setminus \{0\}\,;\, \xi_{p_1+\cdots+p_{i_{l-1}}+1} = \cdots = \xi_{p_1+\cdots+p_l} = 0\}$ の場合に帰着されたことになる。簡単のために記号 $(U)_{i_l}$ と同様に $(\xi)_{i_l} = (\xi_{p_1+\cdots+p_{i_{l-1}}+1}, \dots, \xi_{p_1+\cdots+p_{i_l}})$ と書く

ことにする。このとき $\mathbb{P}$ は次の形に書ける：

$$(3.1)\qquad \mathbb{P} = \sum_{j=0}^{J_{I_\rho}} \sum_{\substack{(\alpha)_\ell \in [1,\cdots,p_{i_\ell}]^{M_{i_\ell}-k_{i_\ell}j} \\ 1\le \ell \le s}} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}(D_x)_{i_1}^{(\alpha)_1}\cdots(D_x)_{i_s}^{(\alpha)_s},$$

ここで $A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,j}$ は位数 $m-\sum_{\ell=1}^{s} M_{i_\ell}+j(\sum_{\ell=1}^{s}k_{i_\ell}-1)$ の擬微分作用素である。このとき命題 1.4 によれば我々の仮定は次のようになる：

$$\rho \text{ の適当な錐近傍で } \quad P' = \sum_{j=0}^{J_{I_\rho}} P_{m-j} \neq 0 .$$

以下この条件の下で Boutet de Monvel [1] の議論をすこし修正したものを使えば結論が得られる。

(2) 必要性.

ある $\rho=(x^0,\xi^0)\in\Sigma$ で Γ_ρ が原点を含んだとすると、ρ の錐近傍で $\mathbb{P}$ を (3.1) の形に書いておいて次を証明すれば十分である。すなわち $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ で $WF(u)\subset\{(x^0,\lambda\xi^0)\,;\,\lambda>0\}$, $\mathbb{P}u\in H^s$ (ρ で) であるが $u\notin H^{s+m-M_{I_\rho}}$ となるものの存在を示せばよい。簡単のため次の記号を使う：

$$M=\sum_{\ell=1}^{s}M_{i_\ell},\quad K=\sum_{\ell=1}^{s}k_{i_\ell},$$

$$x=((x)_{i_1},\cdots,(x)_{i_s},t),\quad \xi=((\xi)_{i_1},\cdots,(\xi)_{i_s},\tau).$$

我々は $x^0=0$, $\xi^0=((0)_{i_1},\cdots,(0)_{i_s},0,\cdots,0,\tau_N=1)$ と仮定してよい。このとき仮定からある $((\xi)_{i_1},\cdots,(\xi)_{i_s})$ が存在して

$$(3.2)\qquad \sum_{j=0}^{J_{I_\rho}}\sum_{(\alpha)_\rho} a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_\rho,j}(0,\cdots,0,\tau_N)\,(\xi)_{i_1}^{(\alpha)_1}\cdots(\xi)_{i_\rho}^{(\alpha)_\rho}=0 .$$

ここで $a_{\alpha_1,\cdots,\alpha_\rho,j}$ は $A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_\rho,j}$ の位数 $m-M+j(k-1)$ の斉次項である。ここで $((\xi)_{i_1},\cdots,(\xi)_{i_\rho})$ に重さ 1, τ に重さ $k/(k-1)$ を指定すると (3.2) の左辺は Lascar [9] の意味での $(1, k/(k-1))$ 型 $(km-M)/(k-1)$ 次斉次表象となる。故に次の命題から結論を得る：

<u>命題 3.1.</u> P が (3.1) の形であり (3.2) をみたすとする。このとき $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ で $WF(u)\subset\{(x^0,\lambda\xi^0)\,;\,\lambda>0\}$, s で $Pu\in H^s$ であるが $u\notin H^{s+m-M_{I_\rho}}$ なるものが存在する。

証明については [9] を参照。

<u>例 3.2.</u> (1) $\mathbb{R}^N$ で $P(x,D)=D_1^{M_1}D_2^{M_2}\cdots D_n^{M_n}+\lambda(x,D)$, $(n\le N)$ ここで $\lambda(x,D)$ は位数 $\sum_{i=1}^{n}M_i-1$ の擬微分作用素 $(M_i\ge 2)$ である。このとき $M_i=k_i$ とすると P が損失 1 の準楕円型であるための必要十分条件はすべての $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して $\xi_1^{M_1}\xi_2^{M_2}\cdots\xi_n^{M_n}+\lambda^0(x,\xi)\neq 0$ となることがわかる。ここで $\lambda^0(x,\xi)$ は $\lambda(x,D)$ の主表象とする。

(2) $\mathbb{R}^3$ で $P(x,D)=D_1^6(D_2^2+D_3^2)+iD_1^3(D_1^4+D_2^4+D_3^4)+D_1^6+D_2^6+D_3^6$ とする。このとき $M_1=6$, $k_1=3$, $M_2=k_2=2$ とすると P は損失 2 の準楕円型である。

参考文献

[1] Boutet de Monvel,L.: Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators ,Comm.Pure and Appl.Math.,27(1974),585-639.

[2] Duistermaat,J.J and Hörmander,L.: Fourier integral operators II,Acta Math.,128(1972),183-269.

[3] Grigis,M,A and Lascar,R.: Équations locales d'un systéme de sous-variétés involutives,C.R.Acad.Sc.Paris,283(1976) 503-506.

[4] Helffer,B.: Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples,J.Math.pures et apll.,55(1975) ,207-215.

[5] _________ : Invariant associés a une classe d'opérateurs pseudo-différentiels et applications à L'hypoellipticité, Ann.Inst.Fourier,Grenoble,26(1976),55-70.

[6] Hörmander,L.: Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations,Amer.Math.Soc.Symp.Pure Math.10(1966),Singular integrals 138-183.

[7] ___________ : Fourier integral operators I,Acta Math.,127 (1971),79-183.

[8] Sjöstrand,J.: Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics,Arkiv för Mat.12(1974),85-130.

[9] Lascar,R.: Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogénes,Ann. Inst.Fourier,Grenoble,27(1977),79-123.