

Banach 空間に値をとるマルティンゲールの収束

九州大 エ 渡辺 寿夫

(本稿完結)

parameter space は普通の linear set で, state space が Banach 空間であるようなマルティンゲールについて述べる。

§ 1. Introduction.

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の, Banach 空間 E に値をとる, 確率変数 $x(\omega)$ の条件付平均値に関する次の結果が成立する。

「定理」 $x(\omega)$ を強可測, Bochner 可積分とする。子 $\mathcal{F}$ の sub- σ -field とすると, 次の性質をもつ確率変数 $E^{\mathcal{F}}(x|\mathcal{F})$ が (同値を除いて) 一意に存在する。

(1) $E^{\mathcal{F}}(x|\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ -強可測。

(2) $E^{\mathcal{F}}(x|\mathcal{F})$ は Bochner 可積分。

(3) 全ての $A \in \mathcal{F}$ に対して $\int_A x(\omega) dP = \int_A E^{\mathcal{F}}(x|\mathcal{F}) dP$ が成立する。

$T \in \text{linear set}$ と $\{x_t(\omega)\}_{t \in T}$ は X -valued な確率過程
 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ を t について単調増加 $\mathbb{B}$ の sub- σ -field の系とする。
 $x_t(\omega)$ が $\mathcal{F}_t$ -強く可測, Bochner 可積分な確率過程であって,

$$P(\mathcal{E}^s(x_t | \mathcal{F}_\sigma) = x_\sigma) = 1 \quad (\sigma \leq t)$$

が成立するとき, $\{x_t\}_{t \in T}$ はマルタンゲールという。

セミマルタンゲールを定義するためには, X に半順序が定義されていなければならない。 Y は positive cone R を有する Banach 空間とすると, 次の条件を満たす $\{y_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ はセミマルタンゲールという。

(1) y_t は $\mathcal{F}_t$ -強く可測,

(2) y_t は Bochner 可積分

$$(3) \quad P(\mathcal{E}^s(y_t | \mathcal{F}_\sigma) \geq y_\sigma) = 1 \quad (\sigma \leq t)$$

但し $x \geq y$ は $x - y \in R$ を意味する。

§2. Convergence theorem

$\{x_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ は X -valued マルタンゲールとする。

「定理」(Scalora [1])

X が reflexive のとき, 強く可測な確率変数 $x_0(\omega)$ が存在し, 全ての $f \in X^*$ に対して

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)) = 1$$

が成立する。

これより更に強く、次の結果が知られている。

「定理」 (A. and C. Ionescu Tulcea [2])

前定理と同じ条件の下で、 $\mathcal{F}_\infty = \bigvee \mathcal{F}_n$ -強可測な確変数 $x_\infty(\omega)$ が存在 ($P(\|x_n(\omega) - x_\infty(\omega)\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)) = 1$) が成立する。

$\mathcal{X}$ が reflexive という条件は外せなり。 $\mathcal{X}$ が reflexive でないとき上の定理が成立しなり反例は Chatterji [3] に與えられている。 $\mathcal{X}$ が reflexive でないときも次の形の収束定理が成立する。~~定~~

「定理」 (Neveu [4]) Z は強可測、且つ Bochner 可積分とする。 $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ は増大(又は減少)する $\mathcal{B}$ の sub- σ -field と

し $\mathcal{F}_\infty = \bigvee \mathcal{F}_n$ (又は $\mathcal{F}_\infty = \bigcap \mathcal{F}_n$) とおく。

$x_n = E^S(Z | \mathcal{F}_n)$ 、 $x_\infty = E^S(Z | \mathcal{F}_\infty)$ とすると

(1) $\int \|Z(\omega)\| dP < \infty$ のとき

$$\int \|x_n - x_\infty\| dP \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$P(\|x_n - x_\infty\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)) = 1$$

(2) $\int \|Z(\omega)\|^p dP < \infty \ (1 \leq p < \infty)$ のとき

$$\int \|x_n - x_\infty\|^p dP \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

§3 Application

以下, J. B. Walsh [4] による. I を compact metrizable な空間とし, $C(I)$ を I 上の連続関数からなる Banach 空間とする. この時 $C(I)$ -valued 確変数 $X(\omega) \equiv X(\cdot, \omega)$ ($t \in I, \omega \in \Omega$) は $X(t, \omega)$ が t に止めると可測のとき, $X(\omega)$ 自身強可測になる.

「定理」 $\{X_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ は $C(I)$ -valued 強可測確変数列 (即ち I 上の連続な確変過程の列) とする. $X_n(\omega)$ は互に独立で $\int \|X_n(\omega)\| dp < \infty$, $\int X_n(\omega) dp = 0$ とする. このとき次の二つの条件は同値である.

(1) $\int \|X(\omega)\| dp < \infty$ であるような強可測確変数 $X(\omega)$ が存在し

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(\omega) - X(\omega)\| = 0\right) = 1.$$

(2) (1) と同じ条件の $X(\omega) \equiv X(t, \omega)$ が存在し

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t, \omega) = X(t, \omega) \quad \forall t \in I_0\right) = 1$$

が I の可算 dense subset I_0 に対して成立する.

但し $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ である.

この定理は前節の最後の定理から容易に証明できる. この定理を用いると次の結果が得られる.

「例 1」 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ を平均値 0 分散 1 の独立な確変数列とする. $\{\varphi_j(u)\}_{j \geq 1}$ ($u \in [0, a]$) を $L^2([0, a] du)$ の

完全正規直交系と $(\Phi_j(t)) = \int_0^t \varphi_j(u) du$ とおくと

$$(*) \quad B(t) = \sum \eta_j \Phi_j(t) \quad t \in [0, a]$$

は Brown 運動である。(*) の右辺は各 t 毎に級数収束してより、

$$B(t) \in C[0, a], \quad E(\|B(t)\|) < \infty \quad \text{はわかってゐるから}$$

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq a} \left| \sum_{j=1}^N \Phi_j(t) \eta_j(\omega) - B(t, \omega) \right| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \right) = 1$$

がわかる。

「例 2」 Brown 運動 $B(t)$ に対して

$$\mathcal{F}_n = \sigma \left\{ B(0), B\left(\frac{1}{2^n}\right), \dots, B\left(\frac{k}{2^n}\right), \dots, B(1) \right\}$$

とおく。 $f_n(t) = E(B(t) | \mathcal{F}_n)$ は Brown 運動の折れ線による近似である。前節の最後の定理を用いると

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |f_n(t) - B(t)| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \right) = 1$$

がわかる。

文献

- [1] Scalora : Abstract martingale convergence theorem ; Pacific Jour. of Math 11. (1961)
- [2] A. and I. Ionescu Tulcea : Abstract ergodic theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963)
- [3] J. Neveu : Relations entre la théorie des martingales et la théorie ergodique, Ann. Inst. Fourier 15 (1965)

- [4] J. B. Walsh : A note on uniform convergence of
stochastic processes, Proc. Amer. Math. Soc. (1967)