

修士論文 (1998年度)

生態系における協同現象に対する 統計力学的アプローチ*

中央大学大学院理工学研究科物理学専攻

木崎伸也

Abstract

近年, 物を原子, 分子の集まりとして見るように, 生態系を要素の集まりと見なし, 統計力学の考え方, 手法を用いた研究が多くなされている. そのような中で本論は, 生態系の現象を, 協同現象, 特に相転移・臨界現象からの視点で扱う. ワタリバッタは生息密度に応じて形態, 習性が変化し, これを相変異と呼ぶ. そして生息密度が低いときには, バッタはそれぞれ別々に生息しているのだが, 生息密度が高くなるとバッタは集まる性質を持ち, 群れをつくり出す. 我々は, この現象は個々の相互作用で系の振る舞いが変わることから協同現象であると考え, 2つのスケールで相変異と大発生のモデル化を行う. この結果, バッタの相変異現象は相転移とみなせることを示し, バッタの大発生はその相変異が起こった場所の空間的な連結が重要であることを示す.

目次

1	ワタリバッタの相変異と大発生のモデル化	139
1.1	Intoroduction - ワタリバッタの生態	139
1.2	バッタの相変異における協同現象のモデル化	142
1.2.1	確率モデル	145
1.2.2	決定論モデル	147
1.2.3	議論	155
1.3	バッタの生活史のモデル化 - 粗視化したモデル	156
1.3.1	モデルの定義	156
1.3.2	季節移動と格子サイズの変動	158
1.3.3	シミュレーションの結果と議論	159

*本稿は, 中央大学大学院 1998 年度修士論文 (生態系における協同現象に対する統計力学的アプローチ, 木崎伸也) の第 3 章を抜粋したものである. 尚, 元の修士論文の第 1 章は Introduction, 第 2 章は森林における林冠ギャップの空間分布とイジングモデル [1] である.

1 ワタリバッタの相変異と大発生モデル化

1.1 Introduction - ワタリバッタの生態

ワタリバッタ (locust) の大発生は数千年前から農作物に多大な影響を与え、今もってアフリカでは深刻な問題となっている [2]. そのためワタリバッタの大発生の研究は古くから各地で行なわれ、1921 年ロシアの生態学者 Uvarov は、ワタリバッタは生息密度に応じていくつかの相を持つことを提案した [3]. 生息密度が低いときは、各ワタリバッタは他の種のバッタ (grasshopper) のように個別に生息し、このときワタリバッタは孤独相 (solitary phase) にあるという。しかし生息密度が高まると、ワタリバッタ個々の接触、フェロモンなどの相互作用により、集合性を持つようになり、ワタリバッタは群れを形成する。このときワタリバッタは群生相 (gregarious phase) にあるという。また、これらの 2 つの中間の相を中間相 (transient phase) という。このように密度が高くなり、ワタリバッタが孤独相から群生相になることを、相変異 (phase transition) という [3, 4, 5, 6, 7, 8]. この模式図を図 1 に示した。また、群生相のワタリバッタの写真を図 2 に示した。以後簡略化のため、バッタと表記したときはワタリバッタのことを指すとする。群生相のバッタは、孤独相のバッタより身体に対しての羽の長さが長くなり、また脂肪をエネルギー源として利用できるようになり [10], 風を利用して長距離移動が可能になる。このため群生相のバッタは集団で長距離を移動し、これがバッタの大発生として観測される。ここではバッタの大発生 (outbreak) を、群生相のバッタの数の急激な増加として定義する。また、多くのバッタが群生相になり群れをなすことを、相変異による群生化 (gregarisation) と呼ぶことにする。

群生相の性質は、そのバッタが生んだ幼虫に遺伝する。すなわち群生相の親から生まれた幼虫は最初から群生相の性質を持っているのである。バッタの孤独相から群生相への相変異は 2 世代以上を必要とすることがわかっているが、群生相の性質の遺伝により、このような世代を重ねての相変異が可能となっている [3, 11]. しかし、この群生相の性質は完全には遺伝されないので、群生相のバッタから生まれた幼虫が低密度で生育すると、2 世代以上かけて孤独相のバッタになる。

バッタの卵は一年の決まった時期に孵化し、通常卵が孵化する前にその親の成虫は死亡する。バッタが繁殖するには、食料としての草地と産卵場所としての裸地を同時に必要とする [3]. この条件を満たすため、バッタは相にかかわらず、乾季と雨季の季節に応じて長距離を移動し生息地を移す。

バッタの大発生はアフリカ大陸で未だ農作物に脅威を与えるものとして監視体制がひかれ、势力的に生理的研究、観測システムの開発、バッタの数のコントロールの研究がなされている [12]. バッタの数の変化を扱う数理的研究は、Hanrahan らや Antonov らによって行われている。Antonov らはアジアワタリバッタについて、そのライフサイクルをいくつかの段階に分け、各段階の個数に対する漸化式をつくった [2]. Hanrahan らは降雨によるチャイロワタリバッタの数の変化のモデル化を行った [13]. 彼らはまず、バッタの卵の状態からバッタが死亡するまでのライフサイクルをいくつかの段階に分けモデル化した。しかし、チャイロワタリバッタの場合、個対数に対するロジスティック方程式

$$N_{t+1} = N_t \exp[r(1 - N_t/k)] \quad (1)$$

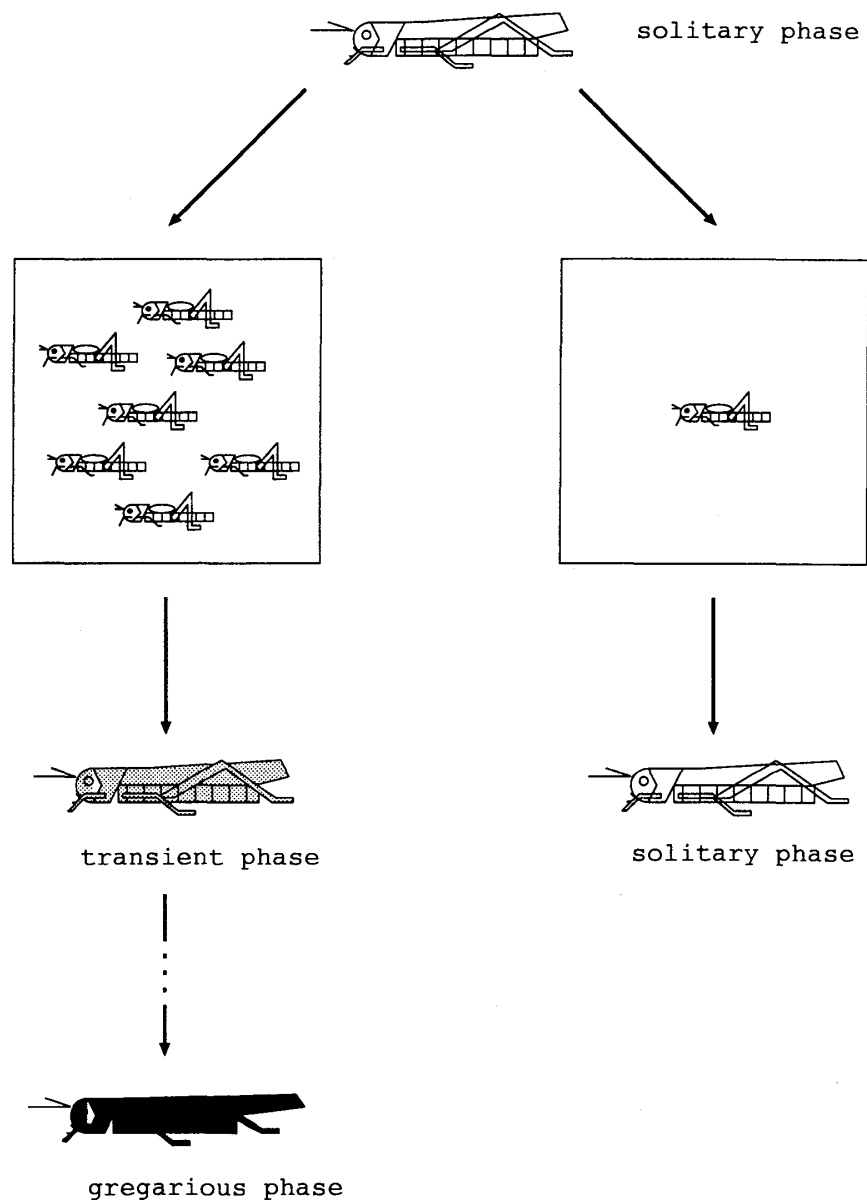
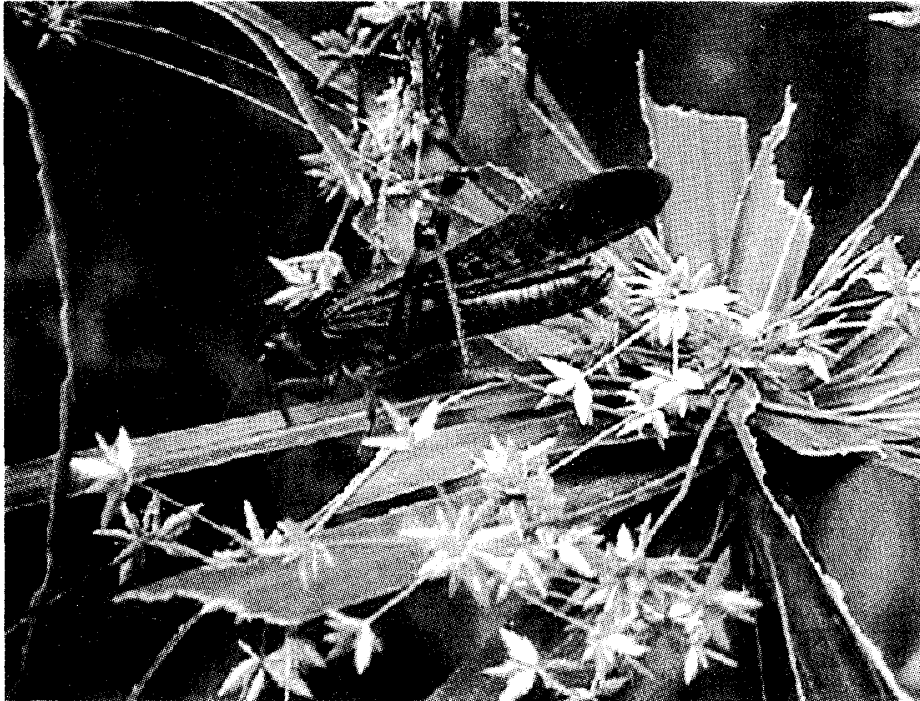


図 1: ワタリバッタの相変異の模式図. 文献 [9] の p.55 の図を参考に作成. 孤独相 (solitary phase) のバッタが高密度で成長すると, 2 世代以上かけて群生相 (gregarious phase) のバッタになる.



(a)



(b)

図 2: (a)群生相のトノサマバッタ.(b)集合している群生相のバッタ.
((a),(b)ともに東京都多摩動物公園昆虫館にて木崎が撮影. 集団飼育されているため 群生相のバッタしか出てこない.)

のパラメータ r を求めると、カオス的な振る舞いを示す $r > 2.69$ という領域にないことから、内生的な要因だけではバッタの数が増えることはない結論した。そして外因的な雨による卵の孵化、成長への影響が大発生に大きく影響していると考え、その効果をライフサイクルのモデルに組み込んだ。実測の雨量から過去の大発生の記録を再現できるかを議論したが、利用できるデータが処理されたバッタの数であることから現実とモデルの比較が難しいと結論した。

今回我々は、ワタリバッタの大発生は、個々の相互作用により系の振る舞いが大きく変化することから、統計力学の問題としてとらえた。そして、これを理解するには2つのスケールで現象をみる必要があると考えた。1つはミクロなスケールで起こる、局所的な密度依存型の現象の相変異、群生化を理解することである。もう1つはマクロなスケールで、局所的に起こったバッタの群生化が空間的にどう分布し、どう連結しているかが、ワタリバッタの大発生とどう関係しているかを理解することである。

そこで、次の2つのモデルを考える。微視的な視点からバッタ個々を1つの粒子とし、孤独相のバッタは斥力が働く粒子、群生相のバッタは引力が働く粒子とし、このとき系がバッタの初期密度に応じてどのように振る舞うかを調べる。この結果、ある「臨界密度」が存在し、ワタリバッタの相変異による群生化は相転移現象としてとらえられることを示す。次に、個体群動態の視点からバッタの集団を1つの粒子とし、季節移動も含めたバッタの生活史をモデル化し、季節移動の効果がバッタの群生化にどう影響するかを調べ、その空間構造を考える [14, 15]。

1.2 バッタの相変異における協同現象のモデル化

ワタリバッタは低密度で生息すると孤独相であるが、高密度になるとバッタ個々の相互作用により群生相のバッタが出現し、群れをつくる。直感的に、この相変異による群生化にはある「臨界密度」が存在して、孤独相のバッタしかない状態から群生相のバッタも存在する状態への相転移が起こりそうである。よって、この節ではこれを示すためにバッタの性質を基にしたモデルをつくり、相転移であることを示す。

ワタリバッタは孤独相では離れあい、群生相では集まりあうといった2つの相反した性質を持っている。この性質をモデル化しバッタ1匹を1つの粒子とみなすと、孤独相のバッタは斥力が働く粒子、群生相のバッタは引力が働く粒子とみなせる (図3参照)。また、相変

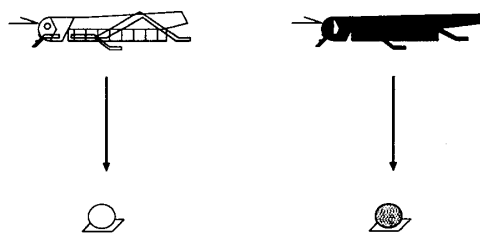


図 3: バッタ 1 匹を粒子 1 つとみなす。

異は、粒子どうしが接触する回数が増えると、斥力が働く粒子から引力が働く粒子へ変化する現象とみなせる (図 4 参照). 今回はこのようにバッタの集まりを接触回数によって斥力と引力が働くような粒子群とみなしモデル化する. つまり, 相変異によるバッタの形態の変化には注目せず, 相変異による習性の変化のみをモデルで考慮することにする.

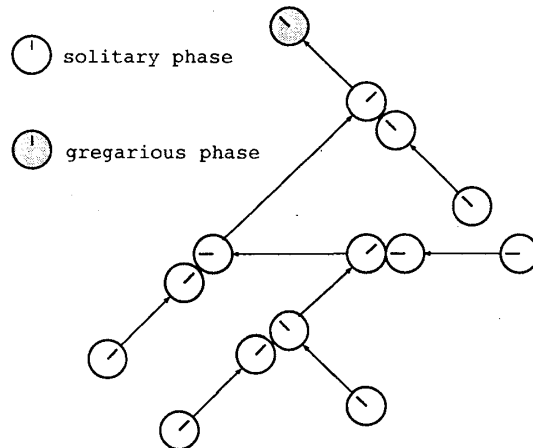


図 4: 粒子の衝突回数が増加すると群生相の粒子になる.

バッタが卵から孵化してある程度時間が経つと, バッタの個体数はあまり変動せず安定な状態になると思われる. このときを定常状態とみなし, これをモデルでの定常状態とする. つまりバッタの 1 世代のみを扱う. しかし, 前節で説明したようにバッタの相変異には 2 から 3 世代かかり, 1 世代では起こらない. そこで, ある程度その前の世代の段階で群生相の性質が強化されたとし, モデルにおける初期状態として, バッタは群生相になる直前の中間相であるとする. この中間相のバッタは低密度で育つと中間相のままだし, 高密度で育つと群生相になる可能性を持つ. つまり密度に応じて, 群生化が起こるか起こらないかが決まる状態を初期状態とする. 便宜上この中間相をモデルでは孤独相と呼ぶことにする. 粒子の他の粒子との接触回数がある値を超えると群生相になるとしたので, この値が初期状態におけるバッタの相がどれだけ群生相に近いかを表している.

ここで相変異による群生化を相転移としてとらえるためには, 空間, 時間ともに無限大にした定常状態を考える必要がある. しかし時間の無限大の極限は, バッタに寿命があるため困難になっている. そこで今回は粒子の生成, 消滅は考えない. しかし, バッタの履歴を考慮し, 粒子に記憶の効果を持たせることにする. 各粒子は他の粒子との接触回数を記憶しているが, ある一定の時間接触が起こらなかったら, 接触回数を 0 に戻すことにする (図 5 参照). この自然なタイムスケールの導入により, 時間無限大の極限を考えることができる.

バッタは一度群生相の「形態」を獲得すると死ぬまでその「形態」を持続ける. (子へこの「形態」は完全には遺伝せず, このとき群生相の「形態」の性質は弱まる.) しかしながら, 一度獲得した群生相の「習性」がその後まわりの環境によってどう変化するかは明らかでない. つまり, 一度獲得した群生相の「習性」が変化しない場合と, その後の環境によって変化し, 孤独相の「習性」に戻る場合が考えられる. 今回のモデルでは, 孤独相の粒

子のみ一定の時間接触がないとき接触回数を0に戻す場合と、群生相の粒子も0に戻す(つまり孤独相の粒子になる) 場合が考えられる. 今回は, 集合性を獲得したバツタでもその後低密度の場所に行くと集合性を失うとし, 群生相の粒子が一定の時間接触がないと孤独相の粒子になる場合を詳しく調べることにする (図6 参照).

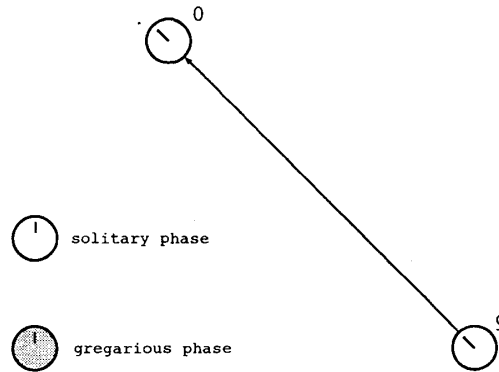


図 5: 一定時間接触がないとき, 過去のことは忘れ衝突回数を0に戻す. 接触回数を粒子の右上に書いた.

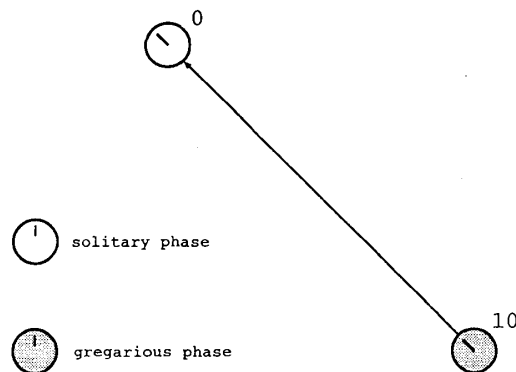


図 6: 群生相の粒子も一定時間接触がないと衝突回数を0に戻し, 孤独相の粒子になるとする.

相転移をみるために, 次のようにコントロールパラメータとオーダーパラメータをとる. 初期状態として, 接触回数0の粒子を密度 ρ でランダムに配置する. コントロールパラメータはランダムに配置された粒子の密度 ρ で, オーダーパラメータとして定常状態での群生相の粒子の平均密度 ρ_g ((6) 式, (25) 式参照) をとる.

このようなとき, 相変異による群生化が相転移としてとらえられるかを, 確率モデルと決定論モデルの2つで計算機シミュレーションにより考察する. 確率モデルでは, 群生相の粒子に単純に引力が働くとしてモデル化した. しかし, 単純な引力では群生相のバツタが示す

集合性は示せるが、行進行動を粒子にとらせることはできない。バッタの行進行動はバッタが集合性により集まったときに、風などの外場によって引き起こされると考えるとこれは問題ではないが、今回は自発的に行進行動をとるモデル（決定論モデル）も作り相変異による群生化が相転移としてとらえられるかを調べた。

1.2.1 確率モデル

モデルの定義

このモデルは、合金のモデルのような、上向きスピンの総数が保存するスピン系である。つまりスピンは反転 (flip) するのではなく、最近接格子点のスピンと交換 (exchange) するのである。2次元正方格子を考え、各格子点には1つだけ粒子が存在できて、格子点 $\mathbf{x}$ に粒子があるとき $\sigma(\mathbf{x}) \geq 1$ 、粒子がないとき $\sigma(\mathbf{x}) = -1$ とする。各粒子は状態を持ち、格子点 $\mathbf{x}$ にある粒子の状態を $\sigma(\mathbf{x})$ とする。ここで状態がとりうる数は自然数とする。よって、

$$\sigma(\mathbf{x}) \in \{-1\} \cup \mathbb{Z}^+ \quad (2)$$

である。ここで $\mathbb{Z}^+ = 1, 2, 3, \dots$ とした。後の定義よりこの状態数は、ある粒子の他の粒子との接触回数に1を足したものを表している。ここでパラメータ σ_c を導入する。この σ_c は孤独相の粒子と、群生相の粒子を分ける境の状態で、格子点 $\mathbf{x}$ の状態が $1 \leq \sigma(\mathbf{x}) < \sigma_c$ のときは孤独相、 $\sigma(\mathbf{x}) \geq \sigma_c$ のときは群生相の粒子とする。

ここで次の関数 $\mathcal{H}$ を定義する。

$$\mathcal{H} = - \sum_{\mathbf{x}} J(\sigma(\mathbf{x})) \sum_{\mathbf{y}: |\mathbf{x}-\mathbf{y}|=1} \text{sgn}(\sigma(\mathbf{x})) \text{sgn}(\sigma(\mathbf{y})). \quad (3)$$

ただし、 $\text{sgn}(a) = \frac{a}{|a|}$ である。また、 $J > 0$ として

$$J(\sigma(\mathbf{x})) = \begin{cases} -J & \text{if } 1 \leq \sigma(\mathbf{x}) < \sigma_c \\ +J & \text{if } \sigma(\mathbf{x}) \geq \sigma_c \\ 0 & \text{if } \sigma(\mathbf{x}) = -1 \end{cases} \quad (4)$$

とした。つまり、孤独相の粒子は反磁性、群生相の粒子は強磁性とみなせる。表記の便宜上、 $\sigma = \{\sigma(\mathbf{x})\}$ とし、配置 σ において $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の格子点の状態を入れ替えてできる配置を $\sigma^{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ とする。

このとき、次のようにして系を時間発展させる。(1) 配置 σ の中から、粒子が存在する点をランダムに1点選ぶ。この格子点を $\mathbf{x}$ とする。(2) $\mathbf{x}$ の最近接格子点にある粒子の数を $\sigma(\mathbf{x})$ に加える (粒子の接触)。(3) $\mathbf{x}$ の最近接格子点で粒子がない格子点から、ランダムに1点選び $\mathbf{y}$ とする。条件をみたさない場合は σ を次の状態とし、(1) に戻る。(4) $\mathcal{H}(\sigma^{\mathbf{x}\mathbf{y}}) \leq \mathcal{H}(\sigma)$ のとき、 $\sigma^{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ を次の状態とする (図7参照)。 $\mathcal{H}(\sigma^{\mathbf{x}\mathbf{y}}) > \mathcal{H}(\sigma)$ のとき、確率 $P = e^{-(\mathcal{H}(\sigma^{\mathbf{x}\mathbf{y}}) - \mathcal{H}(\sigma))}$ で $\sigma^{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ を次の状態とし、 $1 - P$ で σ を次の状態とする。

タイムステップは、(1) から (4) の作業を全粒子数回繰り返したら1進めることにする。今回のモデルにおいて各粒子は固有の時計を持っていて、それぞれ最後に他の粒子と接触した

時刻を覚えているとする。格子点 x に粒子があったとき、その粒子が最後に接触した時間を $t(\sigma(x))$ とする。各粒子の記憶の持続時間 t_c を導入すると、時刻 t において、 $\sigma(x) > 1$ を満たす全ての格子点 x に対して、 $t - t(\sigma(x)) \leq t_c$ のとき $\sigma(x)$ は変化させず、 $t - t(\sigma(x)) > t_c$ のとき $\sigma(x) = 1$ とする。つまり、ある一定の時間以上衝突の無い粒子は、記憶していた接触回数を再び 0 に戻すとする。

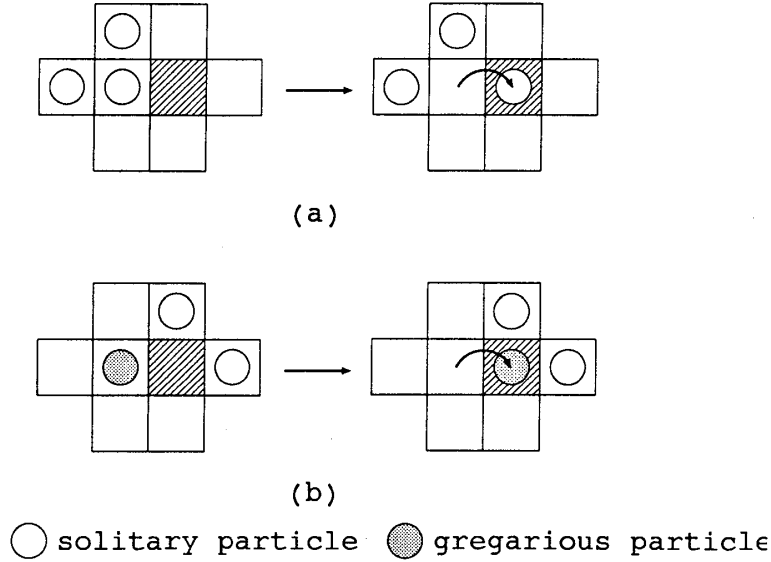


図 7: (a) 孤独相の粒子には斥力が働く。 (b) 群生相の粒子には引力が働く。

初期条件として、状態 1 の粒子を密度 ρ でランダムに配置し、以上のルールで時間発展させる。ここで、次の量を定義する。まず、格子サイズ L の有限の正方格子において、初期状態 σ から出発した時刻 t の群生相の粒子数を $N_g^\sigma(t)$ とする。時刻 t までのプロセスの平均 (アンサンブル平均) を $\langle \rangle_t$ 、初期状態についての平均を $\langle \rangle_\sigma$ としたとき、時刻 t の群生相の粒子の平均密度

$$\rho_g(\rho, \sigma_c, t_c; t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \left\langle \left\langle N_g^\sigma(t) \right\rangle_t \right\rangle_\sigma \quad (5)$$

を定義する。次に $t \rightarrow \infty$ をとり、群生相の粒子の平均密度を

$$\rho_g(\rho, \sigma_c, t_c) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_g(\rho, \sigma_c, t_c; t) \quad (6)$$

とする。今回は σ_c, t_c を固定し、粒子密度 ρ を変化させたとき、 $\rho_g(\rho, \sigma_c, t_c)$ が 0 から正になる境の粒子密度 ρ_c が存在し相転移が起こるかを調べる。

シミュレーションの結果

今回のシミュレーションにおいてパラメータは、 $\sigma_c = 10, t_c = 25, J = 1.0$ とした。つまり、25 タイムステップの間に一度も接触がないと、昔の接触を忘れる粒子が、過去を忘れないうちに9回接触すると群生相になる。ここで、これらのパラメータを使ったときの群生化が起こるときの密度のおおよその検討をつける。粒子は他の粒子がないとき、ランダムウォークするように動くので、時間 t と平均移動距離 r の関係は、

$$r = t^{1/2} \quad (7)$$

となる。よって平均自由時間 (mean free time) を t_m とすると、平均自由行程 (mean free path) r_m は $r_m = t_m^{1/2}$ となる。

$$\text{系の体積} = \text{平均自由行程} \times \text{粒子数} \quad (8)$$

であるので、系のサイズを L 、粒子数を N 、粒子密度を $\rho = N/L^2$ とすると、

$$\rho = \frac{1}{t_m^{1/2}} \quad (9)$$

という関係が導かれる。つまり、密度が高いほど平均自由時間は短くなる。平均自由時間 t_m が各粒子の記憶の持続時間 t_c より短くなると、接触回数が0に戻る前にまた接触が起こるので群生化が始まる。よって、 $t_c = 25$ としたとき、群生化が始まる臨界粒子密度 ρ_c は、

$$\rho_c < \frac{1}{t_c^{1/2}} = 0.2 \quad (10)$$

であることが予想できる。

格子サイズ $L = 50$ で粒子の密度 $\rho = 0.07$ のときの、群生相の粒子数の時間発展を図8に示した。 $t = 90000$ までは群生相の粒子数はほとんど出てこないが、 $t = 95000$ には群生化が始まり、急激に群生相の数が増えている。このときの粒子の空間配置の時間発展の様子を図9に示した。

このような群生化が起こりうる密度の領域を調べるため、粒子の密度 ρ に対する群生相の平均密度 ρ_g を図10に図示した。ここで、粒子密度 ρ において、 3×10^5 タイムステップ後の群生相の密度の100 タイムステップの時間平均を、50個の異なる初期配置に対して平均をとったものを ρ_g とした。今回のシミュレーションにおいて、すべての場合 3×10^5 タイムステップで群生相の粒子の密度は定常に達している。この図より臨界粒子密度 ρ_c があり、 ρ_c を境に孤独相の粒子しか存在しない相から、群生相の粒子も存在する相への相転移が起こっていることが予想できる。今回のパラメータでは $0.03 < \rho_c < 0.04$ と求まった。

1.2.2 決定論モデル

モデルの定義

確率モデルと同じく2次元正方格子を考え、各格子点には1つだけ粒子が存在できるとする。各粒子には番号をつけ、番号 i の粒子の座標を $\mathbf{x}_i$ 、進行方向を $\mathbf{d}_i$ 、衝突回数を n_i 、最後に他の粒子と接触した時刻を t_i で表わす。

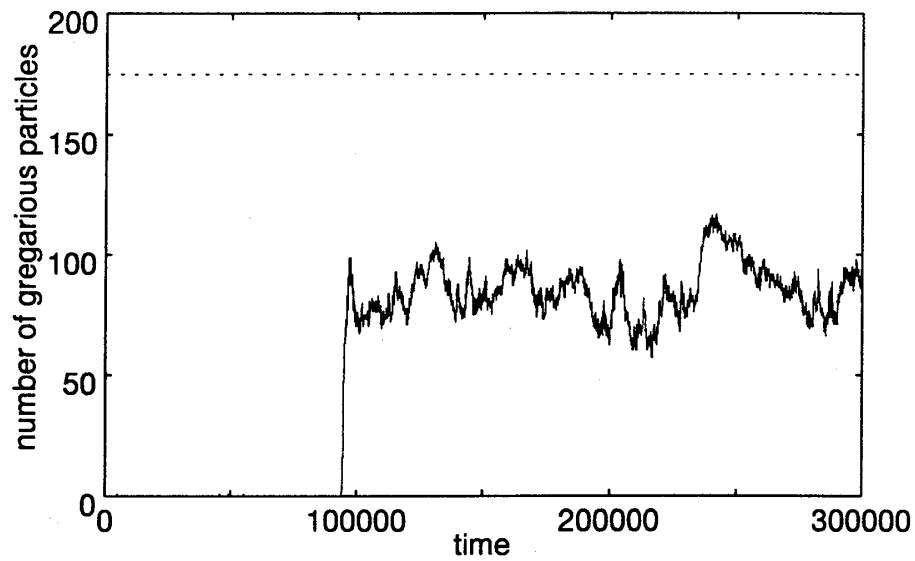


図 8: 確率モデルにおける, 粒子密度 0.1 のときの群生相の粒子数の時間発展の様子. 点線は全粒子数を示している.

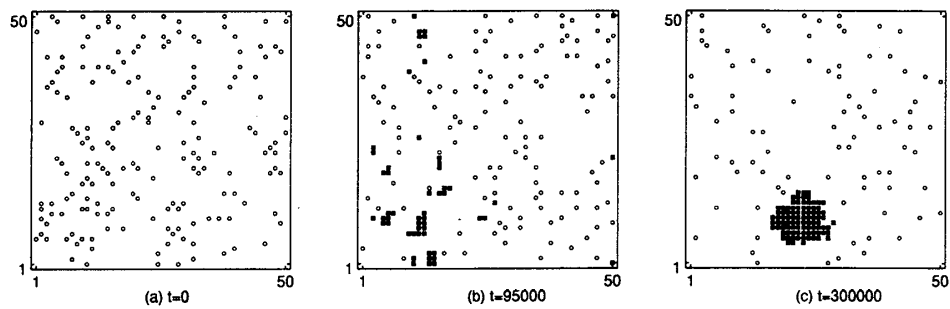


図 9: 確率モデルにおける系の時間発展のスナップショット. 粒子密度が 0.1 と高いため, 群生相化が起こり粒子が集合している. 孤独相を白丸, 群生相を黒い四角で示した.

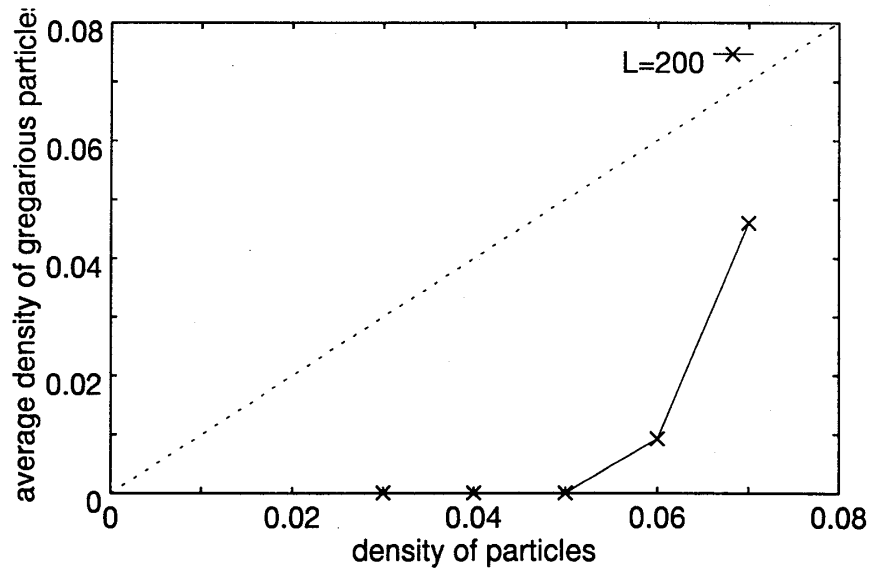


図 10: 確率モデルにおいて, 横軸に粒子の密度, 縦軸に群生相の粒子の平均密度をとっている. $\rho < 0.03$ では群生相の粒子は出てこないが, $\rho > 0.04$ では出はじめ, 相転移が起きていることが予想できる.

パラメータ n_c を導入し, 番号 i の粒子の衝突回数 n_i が n_c より少ないとき粒子は孤独相に属し, n_c 以上のとき群生相に属するとする.

各粒子は $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_4$ の 8 個の進行方向を持ち, 各タイムステップごとにその方向に粒子は移動しようとする (図 11 参照). ここで, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $e_3 = (1, 1)$, $e_4 = (1, -1)$ とした. よって, $d_i \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_4\}$ である.

ここで, x の Moore 近傍を $M(x) = \{x \pm e_1, x \pm e_2, x \pm e_3, x \pm e_4\}$ とする (図 12 参照). 各粒子はその Moore 近傍の粒子と相互作用する.

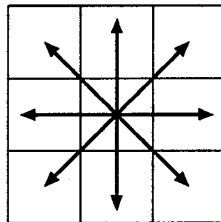


図 11: 粒子のとりうる進行方向.

次のプロセスを順番に行い, 系を時間発展させる.
ここで現在の時刻を t とする.

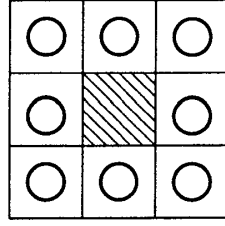


図 12: 粒子がある格子点が Moore 近傍である.

(i) 粒子の接触 番号 i の粒子の Moore 近傍にある粒子の数を N_i とする. つまり,

$$N_i = \sum_{\mathbf{y} \in M(\mathbf{x}_i)} \sum_j 1(\mathbf{x}_j = \mathbf{y}) \quad (11)$$

である. 但し

$$1(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \text{ is satisfied} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

と定義される. 各粒子はその Moore 近傍の粒子と接触して, 接触回数 n_i を次のように変化させる.

$$n_i \rightarrow n_i + N_i \quad (13)$$

(ii) 接触時刻の更新 各粒子において, その Moore 近傍に粒子があり接触したとき最後に接触した時刻を現在の時刻 t にする. つまり, 各粒子の最後に接触した時刻 t_i を次のように変化させる.

$$t_i \rightarrow \begin{cases} t & \text{if } N_i \geq 1 \\ t_i & \text{if } N_i = 0 \end{cases} \quad (14)$$

(iii) 接触回数のリセット 各粒子において, 時間 t_c の間他の粒子と接触がなかったとき, 接触回数を 0 にする. つまり, 各粒子の接触回数 n_i を次のように変化させる.

$$n_i \rightarrow \begin{cases} n_i & \text{if } t - t_i \leq t_c \\ 0 & \text{if } t - t_i > t_c \end{cases} \quad (15)$$

(iv) 進行方向の変化 各粒子はその Moore 近傍の粒子と相互作用する. このとき孤独相の粒子は, まわりの粒子から斥力が働き, これに対して群生相の粒子は, 自分自身の進行方向をまわりの粒子の進行方向に合わせるようにする (図 13 参照). これを式でかくと次のようになる.

$$\mathbf{d}_i \rightarrow \begin{cases} \frac{\mathbf{F}_i}{|\mathbf{F}_i|} & \text{if } |\mathbf{F}_i| \neq 0 \\ \mathbf{d}_i & \text{if } |\mathbf{F}_i| = 0 \end{cases} \quad (16)$$

ここで、次の F_i を定義した.

$$F_i = \begin{cases} - \sum_{\mathbf{y} \in M(\mathbf{x}_i)} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_i) \sum_j 1(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j) & \text{if } n_i < n_c \\ \sum_{\mathbf{y} \in M(\mathbf{x}_i)} \sum_j 1(\mathbf{y} - \mathbf{x}_j) \mathbf{d}_j & \text{if } n_i \geq n_c \end{cases} \quad (17)$$

- (v) 粒子の移動 各粒子は、進行方向の格子点に粒子がないとき、また粒子があってもその粒子が次のタイムステップで移動するとき、次のタイムステップで進行方向の格子点に移動する. もし2つ以上の粒子が同じ格子点に移動しようとした場合、それらの粒子は移動させない. その際、孤独相の粒子の進行方向は反転させ、群生相の粒子の進行方向はそのままにする. つまり、同じ格子点 $\mathbf{y}$ に移動しようとする粒子の番号の集合を $J(\mathbf{y})$ とすると $j \in J(\mathbf{y})$ に対して、

$$\mathbf{d}_j \rightarrow \begin{cases} -\mathbf{d}_j & \text{if } n_j < n_c \\ \mathbf{d}_j & \text{if } n_j \geq n_c \end{cases} \quad (18)$$

とする.

- (vi) 時刻の経過 時刻を1進める.

$$t \rightarrow t + 1 \quad (19)$$

以上の操作をまとめると、次のようになる. (1) 各粒子の状態に Moore 近傍にある粒子の数を足す (粒子の接触). (2) 各粒子において、最後に接触してからの時間が記憶持続時間を超えたら、接触回数を0にする. (3) 各粒子の進行方向を変える. (4) 各粒子をそれぞれの進行方向に移動させる. (5) 時刻を1つ進める.

初期条件として、接触回数0の粒子を密度 ρ でランダムに配置し、以上のルールで時間発展させる. ここで各粒子の進行方向はランダムに決める.

このような自走する粒子集団については、Vicsek らによって詳しく調べられている [16]. Vicsek らは、連続空間上で次のように進行方向を決める、速度の大きさが一定の質点の集団を考えた. 質点 i の進行方向を θ_i としたとき、

$$\theta_i(t+1) = \langle \theta_i(t) \rangle_r + \Delta\theta \quad (20)$$

と変化させる. 速度 $\mathbf{v}_i(t)$ は、

$$\mathbf{v}_i(t) = (v \cos \theta_i(t), v \sin \theta_i(t)) \quad (21)$$

で与えられ、位置 $\mathbf{x}_i(t)$ は、

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\Delta t \quad (22)$$

と変化させる. ここで、 $\Delta\theta$ は $[-\eta/2, \eta/2]$ の区間の一様乱数で、ノイズの効果を示している. $\langle \theta_i(t) \rangle_r$ は、質点 i を中心に半径 r の円にある質点の進行方向の角度を平均 (質点 i を含む) したものである. Δt は離散時間の間隔で1にとる. よって、ノイズの効果が小さいとき、こ

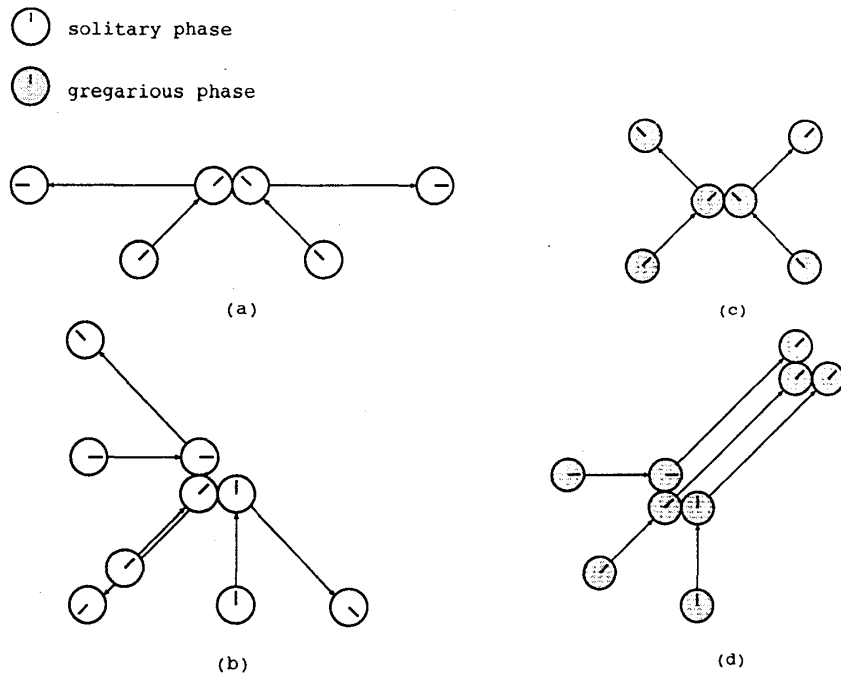


図 13: 孤独相の粒子の衝突の様子と群生相の粒子の衝突の様子. 孤独相の粒子には斥力が働く. 群生相の粒子は他の粒子の進行方向と合わせるようにする.

の質点の集団は近傍の素子と進行方向をそろえるように振る舞う. しかしノイズの効果が大きくなると, それぞればらばらの方向に進行するようになる. 彼らは, 初期条件として密度 ρ で質点をランダムに配置し, 上のようなルールに基づく N 個の質点の系において, 速度の大きさの平均

$$v_a = \frac{1}{Nv} \left| \sum_{i=1}^N v_i \right| \quad (23)$$

を考えた. 彼らは計算機シミュレーションにより, ノイズの大きさ η が小さいと質点のマクロな輸送が起こり $v_a > 0$ であるが, η を大きくすると $v_a > 0$ から $v_a = 0$ となることを示した. このことから, 密度を一定にし, 系のサイズと質点の数を無限大の極限を考えれば, η をコントロールパラメータ, v_a をオーダーパラメータとして 2 次相転移が起こると予想した. また同様に, ある η に対して粒子の密度を増やしていくと, $v_a = 0$ から $v_a > 0$ となることを計算機シミュレーションにより示し, 2 次相転移が起こると予想した.

今回の我々のモデルは, 粒子どうしの接触回数という視点を導入して, この Vicsek らのモデルを拡張したものになっている. 我々のモデルと Vicsek らのモデルの大きな違いは, 粒子の接触回数により粒子の振る舞いが変わるということである. 我々のモデルは, 全ての粒子が群生相の粒子だとすると, 格子版の Vicsek らのモデルになる. ただし我々のモデルは決定論モデルなので, $\eta = 0$ である. よって我々のモデルにおいても, (23) を定義すれば, 粒子密度を変化させると $v_a = 0$ から $v_a > 0$ となる相転移が起こるはずであるが, 今回はこ

の性質については調べなかった。¹

また、魚の群れにおける配向の秩序・無秩序相転移は、Niwaによって議論されている [18]. Niwa は、魚群の運動をノイズ項を含む運動方程式でモデル化し、3次元での群れの配向の転移の条件を調べた。群れの構成要素を限定しないより一般的な取り扱い、Shimoyama らによって行なわれた [19, 20]. 彼らはノイズを導入せず、力学モデルで群れを記述し、より複雑な群れの運動とパラメータの関係を議論した。

ここで、次の量を定義する。確率モデルで (5), (6) を定義したように、時刻 t の群生相の粒子の平均密度

$$\rho_g(\rho, \sigma_c, t_c; t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \langle N_g^\sigma(t) \rangle_\sigma \quad (24)$$

を定義し、群生相の粒子の平均密度を

$$\rho_g(\rho, \sigma_c, t_c) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_g(\rho, \sigma_c, t_c; t) \quad (25)$$

とする。ここで決定論モデルでは時間発展が決定論になっているので、アンサンブル平均の操作は無くなっている。これも確率モデルと同様に σ_c, t_c を固定し、粒子密度 ρ を変化させたとき、 $\rho_g(\rho, \sigma_c, t_c)$ が 0 から正になる境の粒子密度 ρ_c が存在し相転移が起こるかを調べる。

シミュレーションの結果

今回のシミュレーションにおいてパラメータは、 $n_c = 9, t_c = 5$ とした。確率モデルでは粒子はランダムウォークするように動くのに対し、決定論モデルでは粒子は直線的に動くので、確率モデルでは $t_c = 25$ としたのを、その平方根をとり決定論モデルでは $t_c = 5$ とした。また、確率モデルでの状態 σ_c は接触回数 n_c に 1 をたしたもののなので、接触回数に関するパラメータは 2 つのモデルで同じ値である。確率モデルで求めたように、決定論モデルでもおよそその ρ_c を求める。粒子は 1 タイムステップで 1 サイト移動するので、速度 1 とみなせる。よって、平均自由行程 r_m は、

$$r_m = t_m \times 1 \quad (26)$$

である。よって (8) より、 $t_c = 5$ とすると、

$$\rho_c < \frac{1}{t_c} = 0.2 \quad (27)$$

であることが予想できる。

¹その後の研究で、計算機シミュレーションによりこの密度を 0.01 と見積もった。国連の FAO (Food and Agriculture Organization) の観測指導書 [17] によると、群生相のバツタが現れる密度は 0.002 とされている (ここでモデルにおける格子間隔を 20 cm とした。 $n_c = 3, t_c = 10$ とすると $\rho_c \approx 0.002$ とできる)。よって、密度が 0.002 を超えると群生相のバツタが現れ、密度が 0.01 を超えるとバツタの行進が起こることが予想できる。つまり密度が 0.002 と 0.01 の間にあるときは、群生相のバツタ存在するが行進行動が起こっていないことが予想できる。

現実において、バツタが群生化しているが同一方向に進行しておらず、1 つの群れと見なせない状態が観測されている [17]. これは、この新しい相の間接的な観測例であると思われる。

格子サイズ $L = 100$ で粒子の密度 $\rho = 0.1$ のときの, 群生相の粒子数の時間発展を図 14 に示した. $t = 19000$ には群生化が始まり, 急激に群生相の数が増えている. このときの粒子の空間配置の時間発展の様子を図 15 に示した.

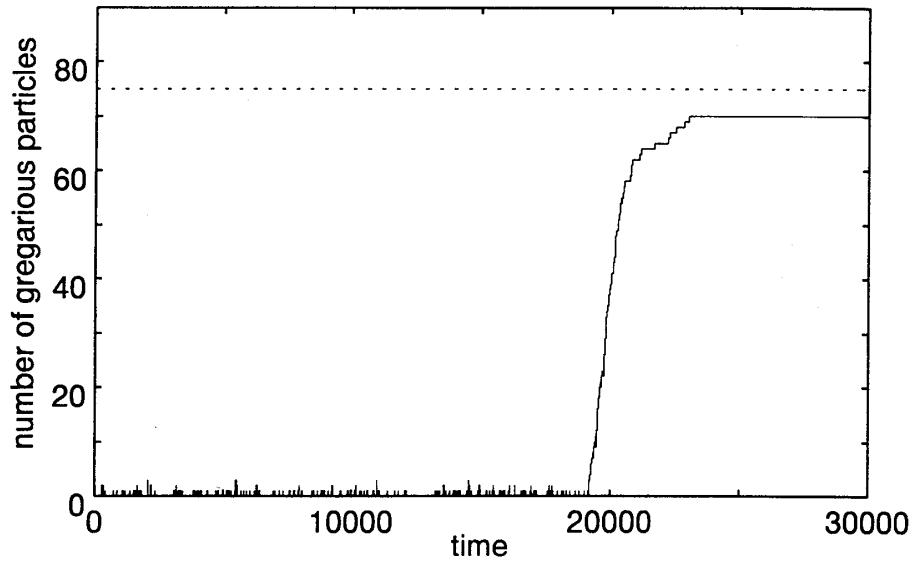


図 14: 決定論モデルにおける粒子密度 0.1 のときの群生相の粒子数の時間発展の様子. 点線は全粒子数を示している.

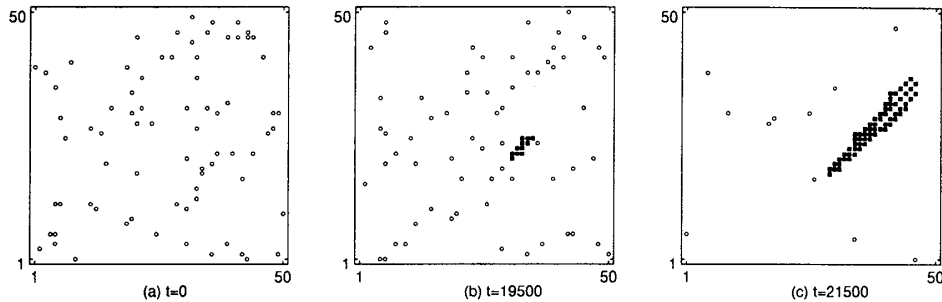


図 15: 決定論モデルにおける系の時間発展のスナップショット. 粒子密度が 0.1 と高いため, 群生相化が起こり, 行進行動が起こっている. 孤独相を白丸, 群生相を黒い四角で示した.

このような群生化が起こりうる密度の領域を調べるため, 粒子の密度 ρ に対する群生相の平均密度 ρ_g を図 16 に図示した. ここで, 粒子密度 ρ において, 3×10^4 タイムステップ後の群生相の密度の 100 タイムステップの時間平均を, 50 個の異なる初期配置に対して平均をとったものを ρ_g とした. 今回のシミュレーションにおいて, すべての場合 3×10^4 タイムステップで群生相の粒子の密度は定常に達している. この図より臨界粒子密度 ρ_c があり,

ρ_c を境に孤独相の粒子しか存在しない相から、群生相の粒子も存在する相への相転移が起こっていることが予想できる。今回のパラメータでは $0.01 < \rho_c < 0.02$ と求まった。

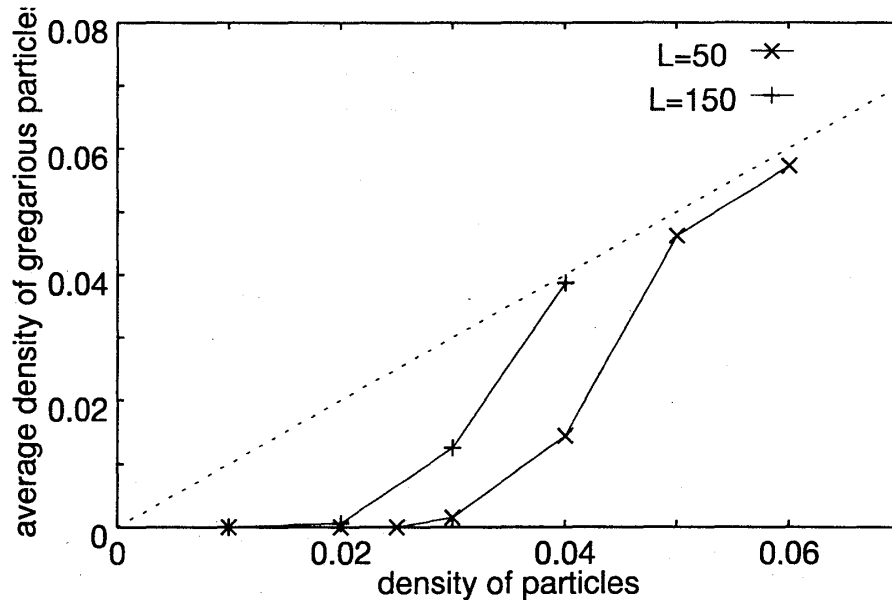


図 16: 決定論モデルにおいて、横軸に粒子の密度、縦軸に群生相の粒子の平均密度をとっている。 $\rho < 0.01$ では群生相の粒子は出てこないが、 $\rho > 0.02$ では出はじめ、相転移が起こっていることが予想できる。

1.2.3 議論

今回は特に群生相の粒子も一定の時間接触がないと、群生相の習性を失う (孤独相の粒子に戻る) としたが、上述したように群生相の粒子がその習性を獲得したら失うことはない場合も考えられる。この場合でも、確率モデル、決定論モデル両方で図 17 が示すように、相転移が起こることを予想している。しかし、この場合は 1 度でも群生相の粒子が出現するとその後ずっと群生相の粒子のままなので、低密度のときでもゆらぎの効果でたまたま群生相の粒子が出て残ってしまうかもしれない。よってこの場合、習性が戻るとする場合より慎重な取り扱いが必要だろう。

以上のように集合性に注目した確率モデル、行進行動に注目した決定論モデルにおいて、バッタの相変異による群生化は、孤独相の粒子しかない状態から群生相の粒子も存在する状態への相転移としてとらえられることを示した。それでは、このような相転移を伴う相変異は、大発生とどう関係しているのだろうか。次の節でより大きいスケールでみて、大発生は群生化したバッタ集団の空間的な連結と関係していることを示す。

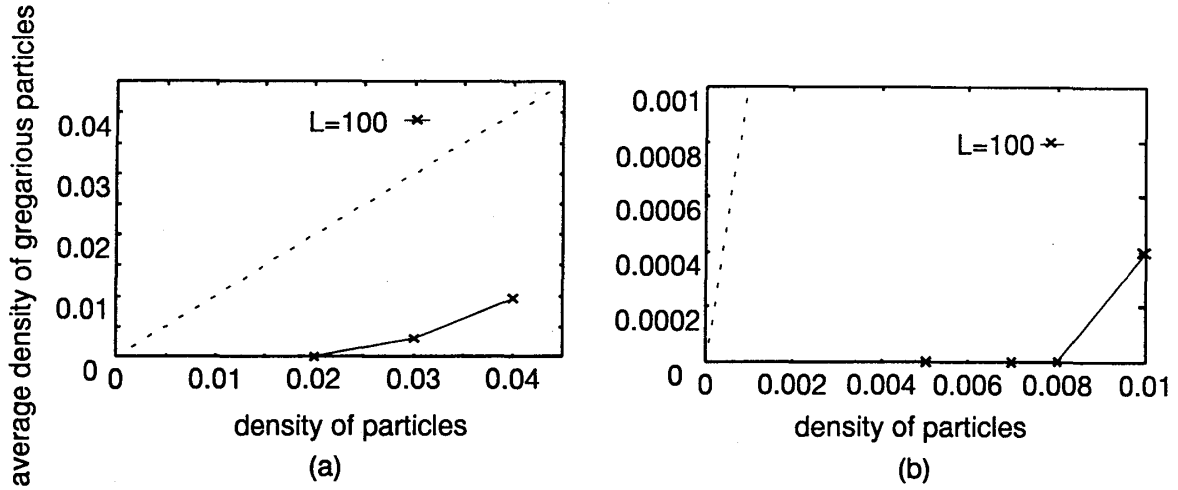


図 17: 群生相の粒子は孤独相の粒子に戻らない場合. (a) が確率モデルでの結果で, (b) が決定論モデルの結果である. 横軸に粒子の密度, 縦軸に群生相の粒子の平均密度をとっている. 群生相の粒子は孤独相の粒子に戻るとした場合と定性的な差はみられない.

1.3 バッタの生活史のモデル化 - 粗視化したモデル

1.3.1 モデルの定義

我々のバッタの個体群動態のモデルは, 正方格子上的確率的オートマトン (すなわち離散時間無限粒子系 [21]) で与えられる [14, 15]. バッタの局所密度は各サイト上の粒子の数として表わされる. すなわちバッタの集団を 1 つの粒子として表す (図 18 参照). ここで, バッタの相を考慮するために, 各粒子は n_g 個の状態を持つとする. 時刻 t のサイト x の i 番目の粒子の状態を $S_i(x)$ で表わす. もし $1 \leq S_i(x) \leq n_s$ ならその粒子は孤独相に属し, もし $n_s + 1 \leq S_i(x) \leq n_t$ なら中間相, $n_t + 1 \leq S_i(x) \leq n_g$ なら群生相に属するとする. 各粒子の状態は同一サイトに 2 個以上の粒子があるとき, 次のように時間変化させる. サイト x 上に k 個の粒子があったとき (ただし k は 2 以上の整数), その状態は,

$$S_i(x, t+1) = S_i(x) + k \quad (28)$$

と変化させる (図 19 参照).

粒子の生成, 消滅のルールは次のように定義する. 卵が孵化する周期を T_{birth} とする. $t = T_{\text{birth}} \times n$ (ただし n は整数) のとき, サイト x 上の各親粒子はサイト x と x の最近接のサイト y に子粒子を生み, 親粒子は消滅させる. このとき子粒子の状態を r 減少させる. すなわち,

$$S_{\text{child}}(z, t+1) = S_{\text{parent}}(x) - r, \text{ for } z = x \text{ or } z \in \{y : |x - y| = 1\}. \quad (29)$$

とする (図 20 参照). 粒子の消滅率 R_k は, その粒子があるサイト上の粒子数 k に比例して

大きくなり,

$$R_k = d + \delta(k - 1). \quad (30)$$

とする (図 21 参照).

群生相の各粒子は遷移率 D で, 最近接のサイトにランダムに移動する. この移動のときに, もし同じサイトに 2 つ以上の群生相の粒子があったときは, それらの群生相の粒子も一緒に移動させる (図 22 参照).

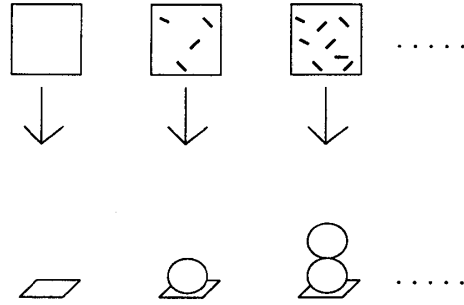


図 18: バッタの集団を粒子で表す.

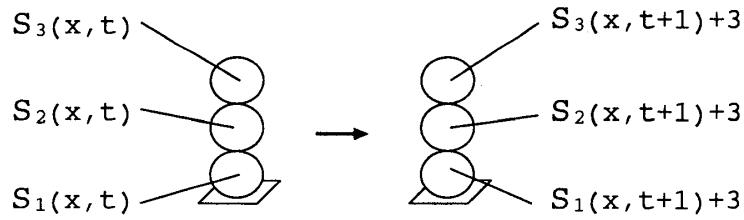


図 19: 粒子の状態の増え方.

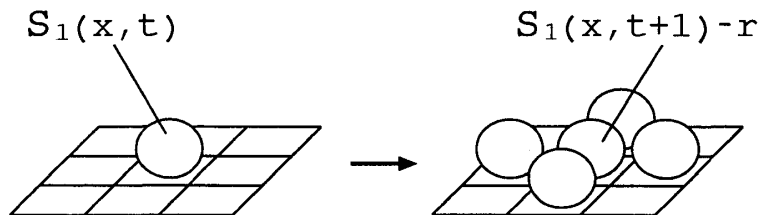


図 20: 粒子の生成の様子. 親粒子は最近接格子点と自分がいた格子点に子粒子を生み, 自分は消滅する.

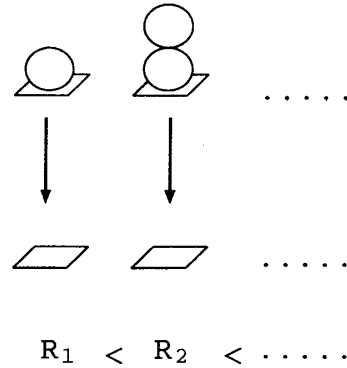


図 21: 粒子の消滅の様子. 同じサイトの粒子数が多いほど, 粒子の消滅率は高くなる.

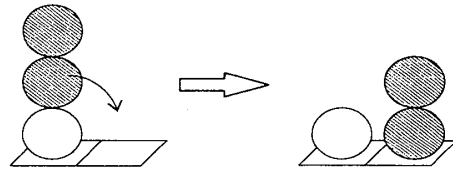


図 22: 群生相の粒子の拡散. 同じサイトにある群生相の粒子は一緒に移動する.

1.3.2 季節移動と格子サイズの変動

Uvarov は季節移動による環境の変化が, バッタの群生化を引き起こす原因であると主張した. もし季節移動の行き先の草地の面積が少ないと, バッタはその場所に集中することになる. この結果, 生息密度が高くなりバッタの群生相化が始まると Uvarov は考えた [3, 4].

今回のモデルでは, この季節移動による環境の変化を, 格子サイズを変動させることにより考慮する. ここでは格子サイズは草地の面積に対応する. バッタは風を利用して長距離移動するので, バッタ個々の空間分布は再配置される. しかしながら, 今回の粗視化したモデルでは細かい構造は無視し, 1つの粒子でバッタの集団を表した. よって単純化のため, バッタの集団の相対的な配置は, 季節移動において保存されると仮定する. ここで季節移動の周期を T_{mig} とする. $t = t_0 + T_{\text{mig}} \times \ell$ (ただし ℓ は整数) のとき, 現在の生息地の格子から次の生息地の格子へ移動させる (図 23 参照). 次の生息地の格子のサイズは, 現在の格子サイズの $4^{m(\ell)}$ 倍であると仮定する. この環境因子 $m(\ell)$ は整数で, ℓ の関数である. もし $m(\ell) = 1$ なら, 現在の格子の (x, y) 上の粒子は, 次の格子の $(x \times 2 - 1, y \times 2 - 1)$ に移す. もし $m(\ell) = -1$ なら, 現在の格子の (x, y) 上の粒子は, 次の格子の $(\lfloor (x+1)/2 \rfloor, \lfloor (y+1)/2 \rfloor)$ に移す. ここで $\lfloor z \rfloor$ は z を超えない最大の整数を意味する. もし $m(\ell) = 0$ なら, 配置は変化させない. $m(\ell) > 1$, $m(\ell) < -1$ のときは, それぞれ $m(\ell) = 1$, $m(\ell) = -1$ のときの操作を $|m(\ell)|$ 回繰り返す. よって $m(\ell)$ が正のとき格子サイズが大きくなり, $m(\ell)$ が負のとき格子サイズが小さくなり集中化がおこる.

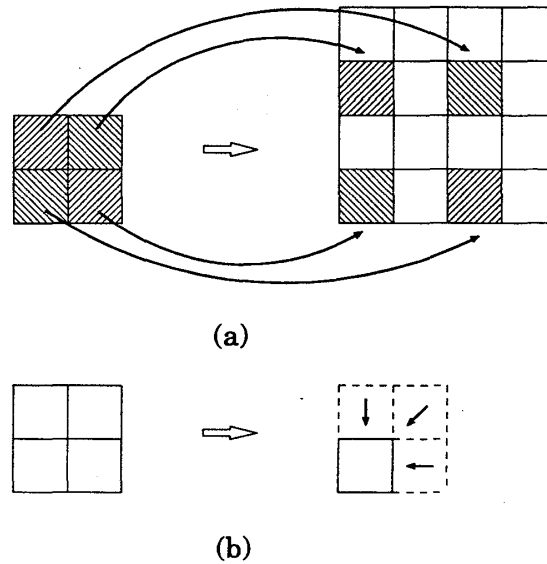


図 23: 格子サイズの変化のさせ方. (a) $m(\ell) = 1$ (格子サイズ拡大) のとき. (b) $m(\ell) = -1$ (格子サイズ縮小) のとき. 元の格子の 4 つの格子点の粒子は, 1 つの格子点に集中する.

1.3.3 シミュレーションの結果と議論

以上で定義したモデルを計算機シミュレーションによりその振る舞いを調べる. 境界条件は周期的境界条件にし, パラメータは, $d = 0.42$, $\delta = 0.2$, $D = 0.2$, $n_s = 10$, $n_t = 20$, $n_g = 30$, $r = 9$, $T_{\text{birth}} = 5$, $T_{\text{mig}} = 12$, $t_0 = -2$ とした. 初期条件は 100×100 上の正方格子の (x, y) に状態 1 の粒子を 1 つおいた. ここで, x と y は 5 の倍数である. つまり初期のバツタの密度は低くしてある.

図 24 に $m(200) = 1$, $m(201) = -1$, $m(207) = 1$, $m(208) = -1$, $m(\ell) = 0$ for other ℓ としたときの孤独相と群生相の粒子数の時間発展の様子を示した. $t = t_0 + 201 \times T_{\text{mig}}$ のとき, 最初の集中化が起こっている. しかし, このとき始めは群生相の粒子が少し現れるが, その後その数は減少し群生相の粒子数は増加していかない. $t = t_0 + 208 \times T_{\text{mig}}$ に, 1 度目の集中化の影響が消える前に 2 度目の集中化が起こっている. このとき群生相の数は急激に増加し群生化が始まっている. しかしながら, 1 度目と 2 度目の集中化の時間間隔を今より長くすると, 群生化しないことがわかった. このことから 1 度目の集中化の効果の減衰率は, 次の集中化に対する応答を決める上で重要であることがわかる.

また, 計算機シミュレーションにより, 続いて起こる集中化の時間間隔だけでは, その集中による応答が決まらないことがわかった. いくつかの事例では, 一回の集中化で群生化が始まったからである. この結果は, 粒子の集中が起こる直前の, 群生相の粒子の分布の空間構造が重要であることを示している. よって群生化が起こるに前には, パーコレーションネットワークのような特別な空間構造が, 集中化によって維持, もしくは誘因されていることが予想できる.

今回のモデルでは季節移動による環境の変化を草地の面積 (格子サイズ) の変化で表し

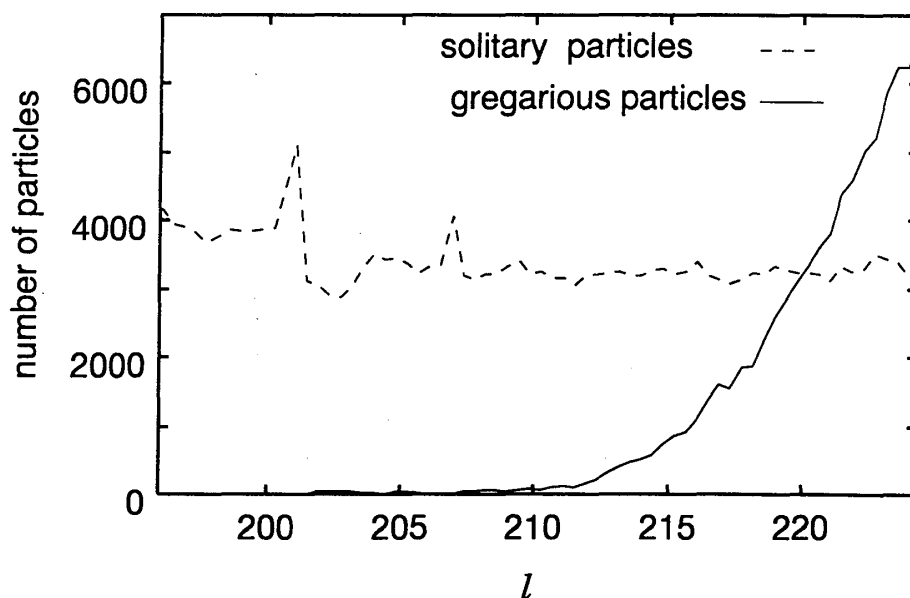


図 24: 群生相の数の時間変化. 点線が孤独相の粒子数, 実線が群生相の粒子数を示す. $l = 201$ と $l = 208$ で格子サイズは小さくなり, 集中化が起こっている.

た. 今後, 雨量と草地の面積の関係を明らかにし, 現実の雨量のデータによって今回のモデルにおける格子サイズの時間変化を決め, ワタリバツタの大発生の予想に挑戦してみたい.

謝辞

本研究において以下の方々にお世話になりました. この場をお借りし, お礼申し上げます.

佐藤一憲氏 (静岡大学工学部システム工学科) には, 数理生態学の視点から, ワタリバツタのモデルについて多くの有用なコメントを頂きました. 今野紀雄氏 (横浜国大応用数学), 宇佐見義之氏 (神奈川大学) には, 横浜数理セミナーにおいて, ワタリバツタの大発生のモデルの発表の機会を与えて頂き, 多くの有用なコメントを頂きました. また, 今野氏, 種村秀紀氏 (千葉大学理学部) には, バツタの相変異のモデルにおける相転移について, コメントを頂きました. 高安秀樹氏 (ソニーコンピューターサイエンス研究所), 高安美佐子氏 (慶応義塾大学理工学部) には, バツタの相変異のモデルについて話を聞いて頂き, コメントを頂きました.

香取研究室の土屋智子氏, 高松寿郎氏, 島村美裕紀氏 (お茶の水女子大学大学院人間文化研究科) には, 普段の香取研コロキウムにおいて多くの議論をして頂きました. また, 土屋氏には文章を丁寧に読み間違いを指摘して頂き, 本修士論文の図版の作成も手伝って頂きました.

最後に, 指導教官である香取眞理先生には, 卒業研究からの3年間を通じ, 多くのことを教えて頂きました. また, 解説記事及び論文の投稿, 海外の研究会での発表と, 様々な貴重な体験をバックアップして頂きました. 心から感謝します.

参考文献

- [1] 林冠ギャップとは、森林において、ある高さ (例えば 20m) より高い枝葉がない場所のことである。この林冠ギャップ領域は拡大する傾向があることが観測されている。我々はこの現象に対し熱平衡統計力学の知識を適用し、この林冠ギャップの空間分布が、イジングモデルのギブス分布でその性質を非常によく再現できることを示した。M. Katori, S. Kizaki, Y. Terui, T. Kubo, *Fractals* **6**, 81 (1998). S. Kizaki, M. Katori, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999).
- [2] S.Krall, R.Peveling, D.Ba Diallo, ed., *New Strategies in Locust Control*, (Birkhäuser, Boston, 1997).
- [3] B.P.Uvarov, *Grasshoppers and Locusts Vol.I.*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1966).
- [4] 巖俊一, 「巖俊一生態学論集」, (思索社, 1988).
- [5] 巖俊一, 花岡資, 「生物の異常発生」 (生態学講座 32), (共立出版, 1972).
- [6] 伊藤嘉昭, 藤崎憲治, 斎藤隆, 「動物たちの生き残り戦略」, NHK ブックス (日本放送出版協会, 1990).
- [7] 小沢正昭, 「群れの科学-大きさの調節機能-」 (研成社, 1991).
- [8] J.Roffey and G.Popov, *Nature*, **219**, 446 (1968).
- [9] 矢島稔, 「黒いトノサマバッタ」 (偕成社, 1998).
- [10] 茅野春雄, 「昆虫の長距離飛行の分子的メカニズム」, *科学* **61**, No.11, pp.743-751 (1991).
- [11] P.E.Ellis, *Animal Behav.* **7**,91 (1959).
- [12] 木村滋, 「昆虫に学ぶ」 (工業調査会, 1996).
- [13] P. Nailand and S.A. Hanrahan, *South Africa Journal of Science*, **89**, 420 (1993).
- [14] S. Kizaki and M. Katori, *Physica A* **266**,313 (1999).
- [15] 香取眞理, 木崎伸也, 「ワタリバッタ大発生のシナリオと確率モデル」 *Computer Today* (サイエンス社), 1998 年 5 月号, pp.10-17.
- [16] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O.Shochet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1226 (1995).
- [17] *The Desert Locust Guidelines* (Food and Agriculture Organization, Rome, 1994). <http://www.fao.org/news/global/locusts/Locuhome.htm> からダウンロードできる。

- [18] H. Niwa, J. Theor. Biol. **171**, 123 (1994).
- [19] N. Shimoyama, K. Sugawara, T. Mizuguchi, Y. Hayakawa, M. Sano, Phys. Rev. Lett. **79**, 3870 (1996).
- [20] 早川美德, 水口毅, 数理科学, **424**, 63 (1998).
- [21] R.Durrett, Lecture Notes on Particle Systems and Percolation, (Wadsworth & Brooks /Cole, California, 1988).