

ATR_0 のモデル論的 Ordinal Analysis

東北大学理学研究科 高橋 康博 (Yasuhiro Takahashi)

概要

ここでは, [1] に基づき 2 階算術の部分体系 ATR_0 についてのモデル論的 ordinal analysis を紹介する. この方法では, cut-elimination を使うことなしに, ATR_0 の proof-theoretic ordinal が求められる. また, Kruskal の定理が ATR_0 で証明できないことを H. Friedman の方針に従って述べる.

1 ATR_0 の proof-theoretic ordinal

[1] にある ATR_0 に対する結果を述べるために, いくつか定義をする.

定義 1.1 ordinal (notation のゲーデル数) α に対して, 基本列 $\alpha[n]$ (自然数全体から ordinal notation のゲーデル数の集合への関数) を以下のように定義する.

以下, λ は limit ordinal をあらわすものとする.

1. $0[n] = 0$.
2. $(\alpha + 1)[n] = \alpha$.
3. $(\alpha + \lambda)[n] = \alpha + (\lambda[n])$.
4. $\omega^{\alpha+1}[n] = \omega^\alpha \cdot (n + 2)$.
5. $\varphi(\alpha, \lambda)[n] = \varphi(\alpha, \lambda[n] + 1)$.
6. $\varphi(\alpha + 1, 0)[n] = \varphi_\alpha^{n+2}(1)$.
7. $\varphi(\alpha + 1, \beta + 1)[n] = \varphi_\alpha^{n+2}(\varphi(\alpha + 1, \beta) + 1)$.
8. $\varphi(\lambda, 0)[n] = \varphi(\lambda[n], \lambda[n])$.
9. $\varphi(\lambda, \beta + 1)[n] = \varphi(\lambda[n] + 1, \varphi(\lambda, \beta) + 1)$.
10. $\Gamma_0[n] = \gamma_{n+1}$.
11. $\Gamma_{\alpha+1}[n] = \gamma_{n+1}^{\Gamma_\alpha+1}$.
12. $\Gamma_\lambda[n] = \Gamma_{\lambda[n]+1}$.

上の $\varphi(\alpha, \beta)$ (これを $\varphi_\alpha(\beta)$ とかく) は, 次のような ordinal をあらわしている.

- $\varphi_0(\beta) = \omega^\beta$.
- $\varphi_\alpha(\beta) =$ 任意の $\alpha' \prec \alpha$ に対して, $\varphi_{\alpha'}(\gamma) = \gamma$ となる β 番目の γ .

また, $\gamma_0 = \varepsilon_0$, $\gamma_{n+1} = \varphi(\gamma_n, 0)$ であり, Γ_β は $\varphi_\alpha(0) = \alpha$ となる β 番目の α のことである.

以下, M を true arithmetic の超準モデルとする. また, 集合を $\{a_0, \dots, a_k\}$ とかいた場合には, $a_0 < \dots < a_k$ であるとする.

定義 1.2 M の部分集合 $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ と ordinal notation α に対し,

$$\alpha[A] = (\dots((\alpha[a_0])[a_1])\dots)[a_k]$$

とする. また, A が α -large であるとは, $\alpha[A] = 0$ となることである.

次の定理の証明を与えることが以下の目標である.

定理 1 $a, b \in M$ は超準元であるとし,

$$M \models [a, b] \text{ は } \Gamma_0\text{-large}$$

とする. このとき, ある cut $a \in I < b$ と M で code される finite set S があって,

$$\langle I, \{S_i^I \mid i \in I\} \rangle \models \text{ATR}_0$$

ただし, $S_i^I = \{x \in M \mid \langle x, i \rangle \in S\} \cap I$ とする.

定理 1 から ATR_0 の proof theoretic-ordinal は, 以下のように求められる. $b \in M$ を $[a, b]$ は Γ_0 -large となる最小のものとする. このとき, 定理 1 より, ある cut $a \in I < b$ と M で code される finite set S があって, $\langle I, \{S_i^I \mid i \in I\} \rangle$ は ATR_0 のモデルとなる. M における b の最小性より, 定理 1 から得られた ATR_0 のモデルでは, formula

$$\forall x \exists y ([x, y] \text{ は } \Gamma_0\text{-large})$$

は成り立たない. よって, ATR_0 で上の formula は証明できないことになる. 一方で, $\text{ATR}_0 + (\Gamma_0 \text{ までの超限帰納法})$ という体系では, 上の formula が証明できるので, 結局 ATR_0 では, Γ_0 までの超限帰納法が証明できないことになる. すなわち, ATR_0 の proof-theoretic ordinal は Γ_0 (以下) である. (注. Γ_0 より小さい ordinal α に対し, ATR_0 で $\text{WO}(\alpha)$ が証明できることについては, [8] 参照.)

2 定理1の証明

定義 2.1 M の部分集合 $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ (k は M の超準元) に対し, A の limit I を次のように定義する: 単調増加関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ に対し,

$$I = \{x \in M \mid \exists i \in \mathbb{N} \ x < f(i)\}.$$

定義 2.2 集合 $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ が spread out であるとは, 任意の $i \leq k-2$ に対し, $2^{a_i} < a_{i+1}$ となることである.

補題 2.3 M で code される集合 $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ (k は M の超準元) に対し, A が spread out で, I が A の limit ならば,

$$I \models I\Delta_0 + (\exp).$$

証明. I で Δ_0^0 -induction が成り立つことを示すには, Δ_0^0 -最小値原理が成り立つことを示せばよいが, これは M で最小値原理が成り立つことと, Δ_0^0 -formula は I と M の間で absolute であることによる. $\square$

定義 2.4 • 2 階算術の部分体系 ACA_0 は, 基本算術公理, Σ_1^0 -induction に次の公理 (ACA) を加えた体系である.

$$\exists Y \forall x (x \in Y \leftrightarrow \varphi(x))$$

ただし, φ は arithmetical formula である.

• 2 階算術の部分体系 ATR_0 は, ACA_0 に 次の公理 (ATR) を加えた体系である.

$$WO(<) \rightarrow \exists Y \forall b \forall x (x \in Y_b \leftrightarrow \varphi(x, Y_{<b}))$$

ただし, φ は arithmetical formula である.

• $(\Sigma_1^1\text{-AC})$ とは 次の公理とする.

$$\forall x \exists Y \varphi(x, Y) \rightarrow \exists Y \forall x \varphi(x, Y_x)$$

ただし, φ は Σ_1^1 -formula である.

定義 2.5 • 集合 S が $\Sigma_1^1\text{-AC}$ の ω -model であるとは (ACA) と $(\Sigma_1^1\text{-AC})$ の相対化が成り立つことである. ただし, second-order formula φ の S への相対化とは, 例えば, φ が $\forall X \exists Y \theta(X, Y)$ (θ は arithmetical) のときは, $\forall x \exists y \theta(S_x, S_y)$ と変換した formula である.

- 集合 S が 集合 T を含む Σ_1^1 -AC の ω -model であるとは, S は Σ_1^1 -AC の ω -model であり, ある i に対して $S_i = T$ となることである.
- 集合 H が c -level nested Σ_1^1 -AC hierarchy であるとは, 各 $0 < i \leq c$ に対して, H_i は $H_{<i}$ を含む Σ_1^1 -AC の ω -model となることである.

集合 T に対し, T の Turing jump T' を, $T' = \{x | \text{Tr}_{\Sigma_1^0}(x, T)\}$ と定義する. ただし, $\text{Tr}_{\Sigma_1^0}(x, Z) \equiv \exists y \Theta(x, y, Z)$ は complete Σ_1^0 truth predicate relative to Z で, Θ は Δ_0^0 である. また, $j^{a,b}(Z) = \{e < a | \exists y \leq b \Theta(e, y, Z)\}$ とする.

定義 2.6 集合 $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ ($k \geq 1$), S, T は finite set とする. A において S は T の Turing jump を近似するとは, 次が成り立つことである.

- 任意の $i < k$ に対して, $j^{a_i, a_{i+1}}(T) = j^{a_i, a_k}(T)$.
- $j^{a_{k-1}, a_k}(T) = \{x \in S | x < a_{k-1}\}$.

定義 2.7 集合 H が α -level jump hierarchy であるとは, 次が成り立つことである.

- $\gamma < \alpha$ ならば, $H_{\gamma+1} = (H_{\leq \gamma})'$.
- $\lambda \leq \alpha$ が limit notation ならば, $H_\lambda = H_{<\lambda}$.

定義 2.8 集合 $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ とする. A において集合 H は α -level jump hierarchy を近似するとは, 次が成り立つことである.

- $\gamma < \alpha, [\gamma] < a_i$ ($i \leq k$) ならば, $\{a_i, \dots, a_k\}$ において $H_{\gamma+1}$ は $H_{\leq \gamma}$ の Turing jump を近似する.
- $\lambda \leq \alpha$ が limit notation で $[\lambda] < a_k$ ならば, $H_\lambda = H_{<\lambda}$.

補題 2.9 次の性質をもつ $I\Delta_0 + (\exp)$ -definable function

$$\text{TruthCode}([\psi], x)$$

が存在する: $\langle N, \{H\} \rangle \models I\Delta_0 + (\exp) + (H \text{ は } \alpha\text{-level jump hierarchy})$

であり, $\psi(X_{\gamma_1}, \dots, X_{\gamma_k})$ は Σ_m^0 -formula であって, $\alpha \succeq \beta \succeq (\sup\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} + m)$ ならば,

$$\langle N, \{H\} \rangle \models \psi(H_{\gamma_1}, \dots, H_{\gamma_k}) \leftrightarrow \text{TruthCode}([\psi], \beta) \in H_\beta.$$

定義 2.10 M で code される集合 $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ (k は M の超準元, A は α -large, spread out), S は M の finite set とする. A において S は Σ_1^1 -AC の ω -model を近似するとは, M で code される集合 H と ordinal notation の有限列 $\langle \alpha_i \rangle, \langle \beta_i \rangle$ があって, 次をみたすことである.

- $A - \{a_0\}$ において H は ω^α -level jump hierarchy を近似する.
- $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < \beta_k < \dots < \beta_1 < \beta_0 = \omega^{\alpha[a_0]}$.
- $i < k - 4$ ならば, α_i と β_i の code は $2^{a_{i+1}^2}$ より小さい.
- $\varphi(X)$ は arithmetical formula で a_{i-1} ($0 < i < k$) より下で code されるとし,

$$\text{TruthCode}([\varphi(X_{\beta_i})], \beta_0) \in H_{\beta_0}$$

ならば, ある $\gamma \preceq \alpha_i$ があって,

$$\text{TruthCode}([\varphi(X_\gamma)], \beta_0) \in H_{\beta_0}.$$

- $T_{\langle a_i, \gamma, d \rangle} = \{e \mid \text{TruthCode}([\psi(e)], \gamma) \in H_\gamma\}$ (右辺の集合を以下では, $H_\gamma^{[d]}$ とかく) とすると,

$$S = \bigoplus_{a_i \in A, \gamma \prec \alpha_i, d < a_k} T_{\langle a_i, \gamma, d \rangle}$$

ただし, d は $\psi(x)$ の code である.

定義 2.11 A, T は M で code される集合とし, $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ (k は M の超準元), S は M の finite set とする. A において S は T を含む Σ_1^1 -AC の ω -model を近似するとは, A において S は Σ_1^1 -AC の ω -model を近似し, $H_0 = T$ となることである. (H は定義 2.10 のもの.)

定義 2.12 A, H は M で code される集合とし, $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ (k は M の超準元) とする. A において H は c -level nested Σ_1^1 -AC hierarchy を近似するとは, 各 $0 < i \leq c$ に対し, A において H_i は $H_{<i}$ を含む Σ_1^1 -AC の ω -model を近似することである.

補題 2.13 A, H は M で code される集合, I を A の任意の limit とし, $c \in I$ とする. このとき,

$$M \models A \text{ において } H \text{ は } c\text{-level nested } \Sigma_1^1\text{-AC hierarchy を近似する}$$

ならば,

$$\langle I, \{H^I\} \rangle \models H^I \text{ は } c\text{-level nested } \Sigma_1^1\text{-AC hierarchy.}$$

補題 2.14 M の部分集合 C は γ_c -large であるとする. このとき, M で code される ε_0 -large set $A \subset C$ と H が存在して, A において H は c -level nested Σ_1^1 -AC hierarchy を近似する.

nested Σ_1^1 -AC hierarchy と (ATR) には 次のような関係がある.

補題 2.15 ACA_0 上で次が成り立つ.

“任意の X に対して, X を含む Σ_1^1 -AC の ω -model が存在する” $\rightarrow$ (ATR).

証明. 任意の X に対して, X を含む Σ_1^1 -AC の ω -model が存在するとし, $\prec$ を well-ordering とする. $\varphi(x, Y)$ を任意の arithmetical formula としたときに, φ によって定義される $\prec$ にそった hierarchy が存在することを示せばよい. $\varphi(x, Y)$ の中のすべての set parameter を code することにより, 1つの集合とみることができる. よって, 仮定により, これらの parameter を含む Σ_1^1 -AC の ω -model S が存在する.

主張. 任意の c に対してある集合 W in S があって,

$$\forall b \prec c \forall x (x \in W_b \leftrightarrow \varphi(x, W_{\prec b}))$$

が成り立ち, b が c の predecessor でなければ, $W_b = \emptyset$ となる.

(主張の証明.) もし, ある c があって, どんな集合 W in S をとっても,

$$\forall b \prec c \forall x (x \in W_b \leftrightarrow \varphi(x, W_{\prec b}))$$

が成り立たないとする, (ACA) により, そのような c 全体の集合が存在し, $\prec$ が well-ordering であることから, $\prec$ について最小の c がとれる. このとき, 任意の $d \prec c$ に対しては, ある集合 W in S があって,

$$\forall b \prec d \forall x (x \in W_b \leftrightarrow \varphi(x, W_{\prec b}))$$

となる. (Σ_1^1 -AC) in S を使うことにより, ある W in S が存在して, 任意の $d \prec c$ に対し,

$$\forall b \prec d \forall x (x \in (W_d)_b \leftrightarrow \varphi(x, (W_d)_{\prec b}))$$

となるが, (ACA) in S により, この W を使って,

$$\forall b \prec c \forall x (x \in Y_b \leftrightarrow \varphi(x, Y_{\prec b}))$$

となる集合 Y in S が作られる. Y は c までの hierarchy なので, 仮定に矛盾する.

(主張の証明終わり.)

主張より, (Σ_1^1 -AC) in S と (ACA) in S を (主張の証明の中と同様に) 使って, $\prec$ のすべての元に対して定義された hierarchy をつくることできる. $\square$

定理1の証明. $[a, b]$ が Γ_0 -large であることから, $[a+1, b]$ は γ_{a+1} -large である. よって, 補題2.14により, ある ε_0 -large set $A \subset [a+1, b]$ と T が存在して, A において T は $(a+1)$ -level Σ_1^1 -AC hierarchy を近似する. I を A の limit, J を $\{0, \dots, a+1\}$ の limit とする. 各 $j \in J$ に対し, T_{j+1}^I は T_j^I を含む Σ_1^1 -AC の ω -model なので,

$$\langle I, \{(T_j^I)_i \mid i \in I, j \in J\} \rangle$$

は, “任意の X に対して, X を含む Σ_1^1 -AC の ω -model が存在する” を成り立たせることがわかる. (各 T_j^I は, $H_\gamma^{[a]}$ の形の集合を含んでいることから, (ACA) も成り立つ.) よって, 補題2.15により, $\langle I, \{(T_j^I)_i \mid i \in I, j \in J\} \rangle$ は (ATR) を成り立たせる. あとは, $\{(T_j^I)_i \mid i \in I, j \in J\}$ を適当に code することにより S が得られる. $\square$

3 Kruskalの定理の ATR_0 における証明不可能性

定義3.1 半順序 $\leq$ をもつ有限集合 T が finite tree であるとは, 次が成り立つことである.

- T は最小元をもつ. (この元を T の root とよぶ.)
- 各 $b \in T$ に対し, $\{a \in T \mid a \leq b\}$ は T の全順序部分集合.

定義3.2 T_1, T_2 を finite tree とする. T_1 の T_2 への embedding とは, 1対1写像 $f: T_1 \rightarrow T_2$ で, 任意の $a, b \in T_1$ に対し, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ となる写像のことである. ただし, $a \wedge b$ とは, a と b より小さい元の中の最大元をあらわす. また, embedding $f: T_1 \rightarrow T_2$ が存在するとき, $T_1 \leq T_2$ とかく.

定理2 (Kruskal) finite tree の任意の無限列 $\langle T_k \mid k < \omega \rangle$ に対し, ある i, j が存在して, $i < j < \omega$ かつ $T_i \leq T_j$ となる.

証明. [5] 参照. $\square$

以下, $\mathcal{T}$ をすべての finite tree の集合とし, Kruskalの定理の主張を $WQO(\mathcal{T})$ とあらわす. また, Γ_0 より小さい ordinal に対する notation system が well-ordered である, という主張を $WO(\Gamma_0)$ とあらわす.

定義3.3 primitive recursive mapping $o: \mathcal{T} \rightarrow \Gamma_0$ を次のように定義する. ($T \in \mathcal{T}$ に対し, T の元の個数を $|T|$ とかく.)

1. $|T| = 1$ のとき, $o(T) = 0$.
2. $|T| \neq 1$ のとき. このとき, $\text{root}(T)$ は, 有限個の immediate successor $b_1, \dots, b_m$ ($m \geq 1$) をもつ. T の subtree $T^i = \{c \in T \mid c \geq b_i\}$ とするとき, $o(T)$ を次のように定義する. ($o(T^1) \preceq o(T^2) \preceq \dots \preceq o(T^m)$ としてよい.)

$$o(T) = \begin{cases} \beta, & m = 1 \text{ のとき} \\ \beta + \alpha, & m = 2 \text{ のとき} \\ \varphi(\alpha, \beta), & m = 3 \text{ かつ } \beta \prec \varphi(\alpha, \beta) \text{ のとき} \\ \beta + \alpha, & m = 3 \text{ かつ } \beta = \varphi(\alpha, \beta) \text{ のとき} \\ \varphi(\beta, \alpha), & m \geq 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし, $\beta = o(T^1)$, $\alpha = o(T^2)$ である.

補題 3.4 任意の $\alpha \prec \Gamma_0$ に対し, ある finite tree T があつて, $o(T) = \alpha$ となる.

証明. 任意の $0 \prec \alpha \prec \Gamma_0$ に対して, $\alpha_i, \beta_i \prec \varphi(\alpha_i, \beta_i) \preceq \alpha$ ($1 \leq i \leq n$) を満たすような ordinal $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ が一意に存在して, $\alpha = \varphi(\alpha_1, \beta_1) + \dots + \varphi(\alpha_n, \beta_n)$ かつ $\varphi(\alpha_1, \beta_1) \preceq \dots \preceq \varphi(\alpha_n, \beta_n)$ とかけるので ([6] 参照), $o(T)$ の定義にしたがつて, T をつくればよい. $\square$

補題 3.5 finite tree T_1, T_2 に対し,

$$T_1 \leq T_2 \rightarrow o(T_1) \preceq o(T_2).$$

証明. Γ_0 より小さい ordinal $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ に対して, 次の性質が成り立つ. ([6] 参照)

- $\alpha \preceq \beta$ ならば, $\beta \preceq \beta + \alpha \preceq \varphi(\beta, \alpha)$.
- $\alpha \preceq \beta$ かつ $\beta \prec \varphi(\alpha, \beta)$ ならば, $\beta + \alpha \preceq \varphi(\alpha, \beta) \preceq \varphi(\beta, \alpha)$.
- $\alpha_1 \preceq \alpha_2$ かつ $\beta_1 \preceq \beta_2$ ならば, $\varphi(\alpha_1, \beta_1) \preceq \varphi(\alpha_2, \beta_2)$.

これらの性質と $o(T)$ の定義よりわかる. $\square$

補題 3.6 $WQO(T) \rightarrow WO(\Gamma_0)$.

証明. Γ_0 より小さい ordinal の無限列 $\langle \alpha_k \mid k < \omega \rangle$ があつて, $\alpha_k \succ \alpha_{k+1}$ ($\forall k \geq 0$) とする. 補題 3.4 より, finite tree のある無限列 $\langle T_k \mid k < \omega \rangle$ があつて, $o(T_k) = \alpha_k$ となる. 一方, Kruskal の定理により, ある $i < j$ があつて, $T_i \leq T_j$ となるので, 補題 3.5 により, $o(T_i) \preceq o(T_j)$, すなわち, $\alpha_i \preceq \alpha_j$ となり, $\langle \alpha_k \mid k < \omega \rangle$ のとり方に矛盾する. $\square$

定理 3 ATR_0 で Kruskal の定理は証明できない。

証明. もし、証明できるとすると、補題 3.6 により、 ATR_0 で $WO(\Gamma_0)$ が証明できることになるが、これは定理 1 から得られた結果に矛盾する。 $\square$

定義 3.3 と同様に、finite tree に Γ_{ε_0} までの ordinal を対応させることにより、次の補題が成り立つ。 ([7] 参照)

補題 3.7 $WQO(\mathcal{T}) \rightarrow WO(\Gamma_{\varepsilon_0})$.

上の補題と 次の定理により、 ATR_0 で補題 3.6 の逆、すなわち、

$$WO(\Gamma_0) \rightarrow WQO(\mathcal{T})$$

は証明できないことがわかる。

定理 4 $a, b \in M$ は超準元であるとし、

$$M \models [a, b] \text{ は } \Gamma_{\varepsilon_0}\text{-large}$$

とする。このとき、ある cut $a \in I < b$ と M で code される finite set S があって、

$$\langle I, \{S_i^I \mid i \in I\} \rangle \models ATR$$

ただし、 ATR とは、 ATR_0 に full second-order induction を加えた体系である。

実際、定理 4 で得られたモデルでは、 $WO(\Gamma_{\varepsilon_0})$ は成り立たないので、補題 3.7 より、Kruskal の定理は成り立たない。一方、 ATR の proof-theoretic ordinal は Γ_{ε_0} なので、 ATR のモデルで $WO(\Gamma_0)$ は成り立つ。すなわち、

$$\langle I, \{S_i^I \mid i \in I\} \rangle \models WO(\Gamma_0) + \neg WQO(\mathcal{T}).$$

よって、補題 3.6 の逆は、 ATR_0 で証明できない。

また、定理 4 の証明は、次の定義と補題から定理 1 の証明と同様である。

定義 3.8 集合 H が ω -level nested Σ_1^1 -AC hierarchy であるとは、任意の $i > 0$ に対して、 H_i は $H_{<i}$ を含む Σ_1^1 -AC の ω -model となることである。

定義 3.9 A, H は M で code される集合とし、 $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ (k は M の超準元) とする。 A において H は ω -level nested Σ_1^1 -AC hierarchy を近似するとは、 $0 < i < a_{j-1}$ ならば、 $\{a_{j+1}, \dots, a_k\}$ において H_i は $H_{<i}$ を含む Σ_1^1 -AC の ω -model を近似することである。

補題 3.10 M の部分集合 C は Γ_α -large であるとする。このとき、 M で code される α -large set $A \subset C$ と H が存在して、 A において H は ω -level nested Σ_1^1 -AC hierarchy を近似する。

参考文献

- [1] Jeremy Avigad and Richard Sommer, The model-theoretic ordinal analysis of theories of predicative strength, *The Journal of Symbolic Logic*, to appear.
- [2] Jeremy Avigad and Richard Sommer, A model-theoretic approach to ordinal analysis, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 3:17-52, 1997.
- [3] Jeremy Avigad, On the relationship between ATR_0 and $\widehat{ID}_{<\omega}$, *The Journal of Symbolic Logic*, 61:768-779, 1996.
- [4] Richard Sommer, Transfinite induction within Peano Arithmetic, *Annals of Pure and Applied Logic*, 76:231-289, 1995.
- [5] S.G. Simpson, Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees, *Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics* (Leo Harrington et al., editors), North-Holland, 1985.
- [6] J.H. Gallier, What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal Γ_0 ? A survey of some results in proof theory, *Annals of Pure and Applied Logic*, 53:199-260, 1991.
- [7] M. Rathjen and A. Weiermann, Proof-theoretic investigations on Kruskal's theorem, *Annals of Pure and Applied Logic*, 60:49-88, 1993.
- [8] K. Schütte, *Proof Theory*, Springer-Verlag, 1977.

[1,2]では、 ATR_0 の他に、1階や2階算術の多くの重要な体系に対して、ここで紹介した方法を使って proof-theoretic ordinal を求めている。[3]では、 ATR_0 と $\widehat{ID}_{<\omega}$ の関係について、[4]では、 PA のいろいろな部分体系の間の相対的な強さについて調べている。[5]では Kruskal の定理の ATR_0 における証明不可能性について述べているとともに、Kruskal の定理のある拡張が、 $\Pi_1^1-CA_0$ で証明できないことについても述べている。また、[6]では、[5]における Kruskal の定理の ATR_0 における証明不可能性の証明の不備を訂正している。[7]では、Kruskal の定理と Ackermann-ordinal の well-orderedness が同値であることを示している。