

氏 名	かわ ぐち しゅう 川 口 周
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2102 号
学位授与の日付	平成 11 年 5 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	HEIGHT AND ARITHMETIC INTERSECTION FOR A FAMILY OF SEMI-STABLE CURVES (半安定曲線族についての高さと算術的交叉)

(主 査)
調文調査委員 教 授 丸 山 正 樹 教 授 河 野 明 助教授 森 脇 淳

論 文 内 容 の 要 旨

申請者の主論文における研究は、Faltings-Hriljac による数論曲面における Hodge の指数定理を高次元の数論的多様体をベースとする安定曲線の族に拡張することに関するものであり、Gillet と Soulé により高次元の場合まで拡張された算術的サイクルの交叉理論と相対的な数論的 Riemann-Roch 公式のすばらしい応用である。

もう少し詳しく申請者の主論文の結果を述べることにする。 $f: X \rightarrow Y$ を射影的な数論的多様体の間の安定曲線とする。さらに、 K を Y の関数体、 C を f の生成ファイバーとし、 C は幾何学的に既約で非特異と仮定する。また、 $\bar{L}$ を X 上のエルミート計量をもった直線束とする。まず、はじめに、 Y が数論的曲線の場合、すなわち、 K が代数体で、 O_K で K の整数環を表すとき、 $Y = \text{Spec}(O_K)$ と書いている場合である。これが、Faltings-Hriljac の算術的な Hodge の指数定理の状況で、その結果は次の様に書ける。 $\bar{L}$ が、各ファイバー上で数値的に自明で、そのエルミート計量が平坦であると仮定すると、

$$\widehat{\deg}(\bar{L} \cdot \bar{L}) = -2[K: \mathbb{Q}] \hat{h}_\theta(L_K)$$

である。ここで、 $\widehat{\deg}(\bar{L} \cdot \bar{L})$ は数論曲面上での L の自己交点数、 $\hat{h}_\theta(L_K)$ は C のヤコビ多様体における L_K のデータ因子 θ にかんする Néron-Tate の高さ関数である。この結果を、ある条件下で、一般の Y に拡張したのが申請者の主論文の結果である。拡張する際、左辺と右辺をどの様に解釈するかと言う問題があるが、申請者は次のように行った。まず、右辺であるが、申請者は森脇による算術的高さ関数を用いた。これは、算術的な意味での偏極 $\bar{H}$ を Y に固定すれば K -有理点の分布をよく反映する高さ関数 $\hat{h}_\theta^H$ が定義できるというものである。左辺としては、 $\widehat{\deg}(\bar{L} \cdot \bar{L} \cdot f^*(\bar{H}) \cdot \text{tr. deg}_{\mathbb{Q}}(K))$ を考えた。

証明は、おおまかに言って次の様に行われる。

- (1) de Jong による alteration (Z 上の variety は正則な variety で cover されるという結果) を用いて、 Y が正則であり、 $f: X \rightarrow Y$ に切断がある場合に帰着させる。
- (2) Deligne による Picard functor に関する結果と Gillet-Soulé による数論的 Riemann-Roch に定理を用いて、 $\widehat{\deg}(\bar{L}^{\otimes n} \cdot \bar{L}^{\otimes n} \cdot f^*(\bar{H}) \cdot \text{tr. deg}_{\mathbb{Q}}(K))$ と $\hat{h}_\theta^H(L_K^{\otimes n})$ を関係づける。ここで、比較する際、解析的ねじれの漸近的挙動の結果が必要で、Faltings の delta 関数に関する結果を用いてこの困難を克服する。
- (3) $\hat{h}_\theta^H$ が二次形式であることを用いて、最終的な等式を導く。

さらに、申請者は主論文のなかで、 L の計量の仮定、及び、 L の特異ファイバーにおける仮定がない場合は、不等式

$$\widehat{\deg}(\bar{L} \cdot \bar{L} \cdot f^*(\bar{H}) \cdot \text{tr. deg}_{\mathbb{Q}}(K)) \leq -2 \hat{h}_\theta(L_K)$$

が成立することも示しており、その等号条件も詳しく調べている。

論文審査の結果の要旨

数論的な問題を幾何学的な観点で試みる方法は古来種々の方法がある。Grothendieck のスキーム論もその一つであり、スキーム論とその発展は Weil 予想の解決に大きく貢献した。ただそのスキーム論の中に、理論的に抜け落ちている観点がある。それは、スキーム論という点は付値論の立場からみると非アルキメデスの点であり、アルキメデスの点を排除しているということである。このことは、古典的な Diophantus 幾何をスキーム論的な視野から捉えることの大きな障害であった。

こうした困難を克服する方法が Arakelov 幾何である。この方法論が発展するにあたり、モデルになったのがスキーム論を有効に用いることができる関数体上での類似である。そこにおいて最も重要な道具は、サイクルの交叉理論と Riemann-Roch 公式であった。それを数論曲面上でいかに行えばいいかを示したのが Arakelov であり、さらにそこにあるいろいろな技術的な困難を克服したのが Faltings である。その後、Gillet と Soulé により高次元の場合まで拡張された。Faltings が数論曲面上でサイクルの交叉理論と Riemann-Roch 公式を確立し、最初に示した結果が算術的な Hodge の指数定理である。(Faltings と独立に Hriljac も同様の結果を示している。) この算術的な Hodge の指数定理を高次元の数論的多様体をベースとする安定曲線の族にまで拡張したのが、申請者の主論文の結果である。

もう少し詳しく申請者の主論文の結果を述べることにする。 $f: X \rightarrow Y$ を射影的な数論的多様体の間の安定曲線とする。さらに、 K を Y の関数体、 C を f の生成ファイバーとし、 C は幾何学的に既約で非特異と仮定する。また、 $\bar{L}$ を X 上のエルミート計量をもった直線束とする。まず、はじめに、 Y が数論的曲線の場合、すなわち、 K が代数体で、 O_K で K の整数環を表すとき、 $Y = \text{Spec}(O_K)$ と書けている場合である。これが、Faltings-Hirijac の算術的な Hodge の指数定理の状況で、その結果は次の様に書ける。 $\bar{L}$ が、各ファイバー上で数値的に自明で、そのエルミート計量が平坦であると仮定すると、

$$\widehat{\deg}(\bar{L} \cdot \bar{L}) = -2[K: \mathbb{Q}] \hat{h}_\theta(L_K)$$

である。ここで、 $\widehat{\deg}(\bar{L} \cdot \bar{L})$ は数論曲面上での L の自己交点数、 $\hat{h}_\theta(L_K)$ は C のヤコビ多様体における L_K のデータ因子 θ にかんする Néron-Tate の高さ関数である。この結果を、ある条件下で、一般の Y に拡張したのが申請者の主論文の結果である。拡張する際に、困難として次の点が考えられる。

- (1) 上の式を、一般の Y の場合どのように定式化するか?
- (2) 定式化できたとしても、種々の技術的困難をいかに克服するか?

まず、(1) についての最大の難関は意味のある Néron-Tate の高さ関数の定義である。 Y が高次元のとき K は関数体になるので、非アルキメデスの付値のみによる幾何学的な Néron-Tate の高さ関数は得られるが、これは K -有理点の分布をあまりよく反映しない。ところが、幸いにして、最近、森脇によって、関数体の場合の算術的高さ関数が定義され、それを用いて申請者は (1) の困難を克服した。

次に (2) についてであるが、ここでは細かく述べられないが、申請者は、数論的代数幾何の最近の種々の結果を用いている。例えば、Deligne による Picard functor に関する結果、Gillet-Soulé による数論的交叉理論と数論的 Riemann-Roch に定理、de Jong による alteration、森脇による関数体の場合の算術的高さ関数の諸性質等である。

このように、申請者の論文は数論的代数幾何の高度な手法を用いるもので、今後のこの方面での研究に大きく貢献するものである。よって、本申請論文は博士(理学)の学位論文として価値のあるものとして認める。

なお、平成 11 年 4 月 9 日、主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心とし、それに関連した研究分野について口頭試問した結果、合格と認めた。