

ある連立遅延微分方程式系の星形周期解 — 数値的根拠と精度保証 —

筑波大学・システム情報系 高安 亮紀*

Akitoshi Takayasu
Faculty of Engineering, Information and Systems,
University of Tsukuba

1 遅延微分方程式系の星形周期解

次の連立遅延微分方程式系を考える.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\alpha (1 - |\mathbf{x}(t)|^2) R(\theta) \mathbf{x}(t-1). \quad (1.1)$$

ここで $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \left(|\theta| < \frac{\pi}{2} \right), |\mathbf{x}|^2 = x^2 + y^2$$

である. この方程式系は原ら [1-3] によってスカラー遅延微分方程式

$$\dot{x}(t) = -\alpha[1 + x(t)]x(t-1), \quad \dot{x}(t) = -\alpha[1 - x^2(t)]x(t-1)$$

の自然な拡張として考えられ, その解のふるまいの一部が証明され, 数値的にも観測された. まず, 十分小さな α に対しては零解に収束することが示されている.

定理 1.1 (Hara et al. [1]). *The zero solution of $\dot{\mathbf{y}}(t) = -\rho R(\theta)\mathbf{y}(t-1)$ is asymptotically stable if and only if $0 < \rho < \pi/2 - |\theta|$.*

次に, α を増加させるとあるところで Hopf 分岐を起こし, 非自明な周期解が発生することが示されている.

定理 1.2 (Hara [2]). *If $\alpha > \pi/2 - |\theta| > 0$, then (1.1) has non-constant periodic solutions such that*

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \omega t \\ y(t) = r \sin \omega t \end{cases} \quad (\theta > 0), \quad \begin{cases} x(t) = r \cos(-\omega t) \\ y(t) = r \sin(-\omega t) \end{cases} \quad (\theta < 0),$$

where

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - |\theta| \right)}, \quad \omega = - \left(\frac{\pi}{2} - |\theta| \right).$$

一方で, 「定理 1.2 の周期解 ((CO) とする) 以外に周期解をもつか」という動機で, 文献 [2] では数理的考察が行われ, 次の数学的予想を残している.

予想 1.3 (Hara [2]). *There exists $\alpha_0 > \pi/2 - |\theta| > 0$ such that*

1. if $\alpha_0 \geq \alpha > \pi/2 - |\theta|$, then (CO) is the only nonconstant stable periodic solution of (1.1).

*takitoshi@risk.tsukuba.ac.jp

2. if $\alpha > \alpha_0$, then (CO) is an unstable periodic solution. Moreover, when $\theta = \pi/n$ and the initial function $(\phi(t), \psi(t))$ satisfies $0 < \phi^2(0) + \psi^2(0) < 1$.
- If n is a rational number, solution orbit of (1.1) asymptotically converges to the star shaped (or polygonal) periodic solution with p -vertices.
 - If n is an irrational number, each solution orbit densely fills out the annular region centered at the origin with radii $\sin \theta$ and 1.

上記予想に関連して、文献 [3] では

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\alpha (1 - |\mathbf{x}(t)|^2) R(\theta) \mathbf{x}([t]) \quad ([\cdot]: \text{floor function})$$

という遅延微分方程式系に対して、予想 1.3 と同じ解のふるまいを証明している。

定理 1.4 (Hara et al. [3]). *There exists $\alpha_0 > 0$ such that*

1. *if $0 < \alpha \leq \alpha_0$, then there does not exist any nonconstant periodic solution.*
2. *if $\alpha > \alpha_0$ and $\theta/\pi \in \mathbb{Q}$, then there exists star-shaped periodic solutions.*
3. *if $\alpha > \alpha_0$ and $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$, then each solution orbit with $\|\mathbf{x}(0)\| < 1$ densely fills out an annular region centered at the origin.*

しかしながら、予想 1.3 自体の解決はいまだなされていない。本研究は予想 1.3 の 2. の星形周期解を対象にその存在をフーリエ・スペクトル法を用いて数値的な観点から観察し、予想を計算機援用証明によって解決することを目的とする。実際、文献 [2] ではいくつかの数値計算によって星形周期解を観測している。

2 フーリエ・スペクトル法による星形周期解の求解

周期解の存在を数値的に観測するために、フーリエ・スペクトル法で数値計算する。はじめに (1.1) 式を成分毎に展開する。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\alpha[1 - (x^2(t) + y^2(t))] (x(t - \tau) \cos \theta - y(t - \tau) \sin \theta) \\ &= -\alpha(x(t - \tau) \cos \theta - y(t - \tau) \sin \theta) \\ &\quad + \alpha(x^2(t)x(t - \tau) \cos \theta - x^2(t)y(t - \tau) \sin \theta) \\ &\quad + \alpha(y^2(t)x(t - \tau) \cos \theta - y^2(t)y(t - \tau) \sin \theta) \\ \dot{y}(t) &= -\alpha[1 - (x^2(t) + y^2(t))] (x(t - \tau) \sin \theta + y(t - \tau) \cos \theta) \\ &= -\alpha(x(t - \tau) \sin \theta + y(t - \tau) \cos \theta) \\ &\quad + \alpha(x^2(t)x(t - \tau) \sin \theta + x^2(t)y(t - \tau) \cos \theta) \\ &\quad + \alpha(y^2(t)x(t - \tau) \sin \theta + y^2(t)y(t - \tau) \cos \theta) \end{aligned}$$

周期 L として未知関数 x, y のフーリエ級数展開を考える。

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\omega t}, \quad y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{ik\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{L}.$$

フーリエ級数の性質から微分および遅延項は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik\omega a_k e^{ik\omega t}, \quad \dot{y}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik\omega b_k e^{ik\omega t} \\ x(t - \tau) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_\tau)_k e^{ik\omega t}, \quad (a_\tau)_k = e^{-ik\omega\tau} a_k \\ y(t - \tau) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b_\tau)_k e^{ik\omega t}, \quad (b_\tau)_k = e^{-ik\omega\tau} b_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t)^2 y(t - \tau) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a * a * b_\tau)_k e^{ik\omega t} \\
x(t)^2 x(t - \tau) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a * a * a_\tau)_k e^{ik\omega t} \\
y(t)^2 y(t - \tau) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b * b * b_\tau)_k e^{ik\omega t} \\
y(t)^2 x(t - \tau) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b * b * a_\tau)_k e^{ik\omega t}.
\end{aligned}$$

ここで $a * b * c$ は複素点列 $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $b = (b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ に対する離散たたみ込みを表す.

$$(a * b * c)_k := \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = k \\ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}}} a_{k_1} b_{k_2} c_{k_3}.$$

これらを方程式 (1.1) に代入すると可算無限個の代数方程式となる.

$$\begin{aligned}
f_k(\omega, a, b) &:= ik\omega a_k + \alpha \cos \theta(a_\tau)_k - \alpha \sin \theta(b_\tau)_k \\
&\quad - \alpha \cos \theta(a * a * a_\tau)_k + \alpha \sin \theta(a * a * b_\tau)_k \\
&\quad - \alpha \cos \theta(b * b * a_\tau)_k + \alpha \sin \theta(b * b * b_\tau)_k = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \\
g_k(\omega, a, b) &:= ik\omega b_k + \alpha \sin \theta(a_\tau)_k + \alpha \cos \theta(b_\tau)_k \\
&\quad - \alpha \sin \theta(a * a * a_\tau)_k - \alpha \cos \theta(a * a * b_\tau)_k \\
&\quad - \alpha \sin \theta(b * b * a_\tau)_k - \alpha \cos \theta(b * b * b_\tau)_k = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

代数方程式の未知数は $\mathbf{X} = (\omega, a, b)$ で未知数 ω を決定する位相条件が必要である. 典型的な位相条件は, $\mathbf{x}_0$ (参照軌道という) を適当に与えて

$$\int_0^{2\pi} \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}_0(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (x(t)\dot{x}_0(t) + y(t)\dot{y}_0(t)) dt = 0.$$

積分位相条件という. すなわち各係数で表現すると

$$\eta(\omega, a, b) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_k i k (a_0)_{-k} + b_k i k (b_0)_{-k}) = 0$$

を位相条件として課す. そして $\mathbf{X}$ に対する写像 F を次のように定義する.

$$F(\mathbf{X}) := \begin{bmatrix} \eta(\omega, a, b) \\ f(\omega, a, b) \\ g(\omega, a, b) \end{bmatrix}.$$

フーリエ・スペクトル法では近似解を計算するために, f_k, g_k を波数 N で打ち切る. 打ち切った写像 $F^{(N)} : \mathbb{C}^{4N+3} \rightarrow \mathbb{C}^{4N+3}$ は次のように定義される.

$$F^{(N)}(\mathbf{X}^{(N)}) := \begin{bmatrix} \eta(\omega, a^{(N)}, b^{(N)}) \\ f^{(N)}(\omega, a^{(N)}, b^{(N)}) \\ g^{(N)}(\omega, a^{(N)}, b^{(N)}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(N)} := (\omega, a^{(N)}, b^{(N)}) \in \mathbb{C}^{4N+3}.$$

波数 N で打ち切った写像に対して, ニュートン法によって, $F^{(N)}(\bar{\mathbf{X}}^{(N)}) \approx 0$ をみたす近似解

$$\bar{\mathbf{X}}^{(N)} = (\bar{\omega}, \bar{a}_{-N}, \dots, \bar{a}_N, \bar{b}_{-N}, \dots, \bar{b}_N) \in \mathbb{C}^{4N+3}.$$

を数値計算する.

ニュートン法には写像 $F^{(N)} : \mathbb{C}^{4N+3} \rightarrow \mathbb{C}^{4N+3}$ のヤコビ行列が必要.

$$DF^{(N)}(\mathbf{X}^{(N)}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \partial_{a_j} \eta & \dots & \dots & \partial_{b_j} \eta & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ \partial_{\omega} f_k^{(N)} & \dots & \partial_{a_j} f_k^{(N)} & \dots & \dots & \partial_{b_j} f_k^{(N)} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ \partial_{\omega} g_k^{(N)} & \dots & \partial_{a_j} g_k^{(N)} & \dots & \dots & \partial_{b_j} g_k^{(N)} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \end{bmatrix}.$$

添字の範囲を $|k|, |j| \leq N$ として $DF^{(N)}(\mathbf{X}^{(N)})$ の各ブロックは以下で与えられる.

$$\begin{aligned} \partial_{a_j} \eta &= ij(a_0)_{-j}, \quad \partial_{b_j} \eta = ij(b_0)_{-j} \\ \partial_{\omega} f_k^{(N)} &= ik a_k - \alpha \cos \theta (ik \tau (a_{\tau})_k - (a * a * \mathcal{D} b_{\tau})_k - (b * b * \mathcal{D} a_{\tau})_k) \\ &\quad + \alpha \sin \theta (ik \tau (b_{\tau})_k - (a * a * \mathcal{D} b_{\tau})_k - (b * b * \mathcal{D} b_{\tau})_k) \\ \partial_{\omega} g_k^{(N)} &= ik b_k - \alpha \cos \theta (ik \tau (b_{\tau})_k - (a * a * \mathcal{D} b_{\tau})_k - (b * b * \mathcal{D} b_{\tau})_k) \\ &\quad - \alpha \sin \theta (ik \tau (a_{\tau})_k + (a * a * \mathcal{D} a_{\tau})_k + (b * b * \mathcal{D} a_{\tau})_k). \end{aligned}$$

さらに $(\mathcal{D} a_{\tau})_k := ik \tau e^{-ik \omega \tau} a_k$ として,

$$\begin{aligned} \partial_{a_j} f_k &= (ik \omega + \alpha c_k \cos \theta) \delta_{j,k} + 2\alpha \sin \theta (a * b_{\tau})_{k-j} \\ &\quad - \alpha \cos \theta (2(a * a_{\tau})_{k-j} + c_j (a * a_{\tau})_{k-j} + c_j (b * b)_{k-j}) \\ \partial_{b_j} f_k &= -\alpha c_k \sin \theta \delta_{j,k} - 2\alpha \cos \theta (b * a_{\tau})_{k-j} \\ &\quad + \alpha \sin \theta (c_j (a * a)_{k-j} + 2(b * b_{\tau})_{k-j} + c_j (b * b)_{k-j}) \\ \partial_{a_j} g_k &= \alpha c_k \sin \theta \delta_{j,k} - 2\alpha \cos \theta (a * b_{\tau})_{k-j} \\ &\quad - \alpha \sin \theta (2(a * a_{\tau})_{k-j} + c_j (a * a)_{k-j} + c_j (b * b)_{k-j}) \\ \partial_{b_j} g_k &= (ik \omega + \alpha c_k \cos \theta) \delta_{j,k} - 2\alpha \sin \theta (b * a_{\tau})_{k-j} \\ &\quad - \alpha \cos \theta (c_j (a * a)_{k-j} + 2(b * b_{\tau})_{k-j} + c_j (b * b)_{k-j}). \end{aligned}$$

ここで $c_j = e^{-ij \omega \tau}$ とした. ニュートン法の収束条件は $\|F^{(N)}(\bar{X})\|_1 < 5 \times 10^{-10}$ とし, 適当な初期値から数値計算を行ったところ以下のような周期解を得た.

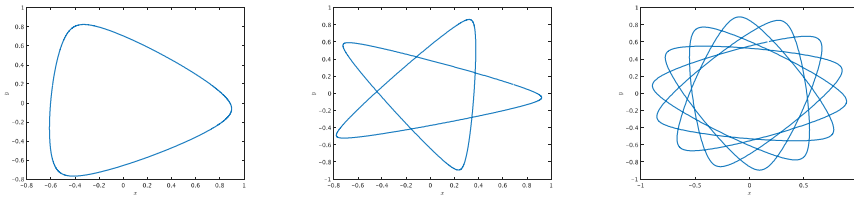


図 1: 星形周期解の概形 ($\theta = \pi/6, \pi/10, \pi/7$).

3 数値実験結果

前節で紹介したフーリエ・スペクトル法によって得た数値解を紹介し, 計算結果から得られる知見を紹介する. はじめに文献 [3] では, 自然数 n に対して $\theta = \pi/n$ の場合, $p(\pi - 2\pi/n) = 2\pi m \iff m = p(n-2)/(2n)$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在すれば, p 回折り返す p -星形周期解があることが予想されている.

まず $\theta = \pi/3$ の場合 ($n = 3$), $m = 1$, $p = 6$ であり六角形の周期解が得られると予想できる. 実際, 図 2 にあるように得られた周期解のプロファイル (左図) は六角形となった. さらにフーリエ級数の各係数の絶対値のプロット (右図) に注目すると, フーリエ係数の絶対値の両端は約 10^{-18} 程度まで小さくなっており, 数値計算で使用する浮動小数点数の精度ギリギリまで小さくなっている. そのためこの近似周期解は数値的に十分良い精度であるといえる. さらに, 添字が $k \neq 6l \pm 1$, $l \in \mathbb{Z}$ となる係数に対して $|a_k|, |b_k| \approx 0$ となることが観測された. さらにニュートン法で得られた周波数 ω をもとに復元された周期 L は約 12 であった.

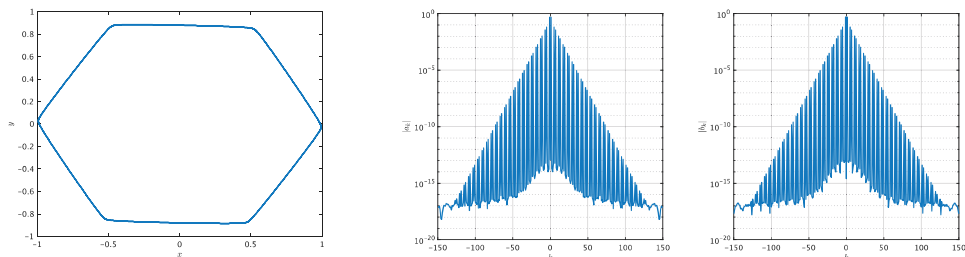


図 2: フーリエ・スペクトル法による星形周期解の数値解 ($\theta = \pi/3$, $\alpha = 6$, $N = 150$, $L \approx 12$, $p = 6$, $m = 1$), (左) 周期解のプロファイル, (右) x, y のフーリエ級数の絶対値のプロット

次に $\theta = \pi/4$ の場合は $m = 1$, $p = 4$ であり, 図 3 にある得られた周期解のプロファイル (左図) は四角形となった. さらにフーリエ級数の各係数の絶対値のプロット (右図) に注目すると, 添字が $k \neq 4l \pm 1$, $l \in \mathbb{Z}$ となる係数に対して $|a_k|, |b_k| \approx 0$ となることが観測された. さらにニュートン法で得られた近似周期 L は約 8 であった.

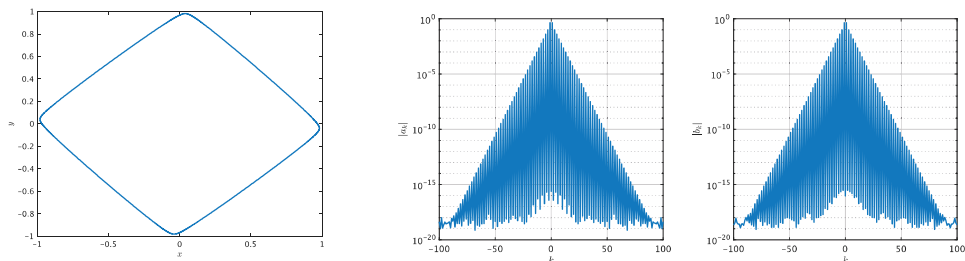


図 3: フーリエ・スペクトル法による星形周期解の数値解 ($\theta = \pi/4$, $\alpha = 4$, $N = 100$, $L \approx 8$, $p = 4$, $m = 1$), (左) 周期解のプロファイル, (右) x, y のフーリエ級数の絶対値のプロット

さらに $\theta = \pi/5$ の場合を図 4 に示す. このとき $m = 3$, $p = 10$ であり, 周期解のプロファイル (左図) は多少複雑な多角形となった. さらにフーリエ級数の各係数の絶対値のプロット (右図) に注目すると, 添字が $k \neq 10l \pm 3$, $l \in \mathbb{Z}$ となる係数に対して $|a_k|, |b_k| \approx 0$ となることが観測され, さらにニュートン法で得られた近似周期 L は約 20 であった.

以下, 図 4 から図 8 に $\theta = \pi/5, \pi/6, \pi/7, \pi/10, \pi/35$ の各周期解のプロファイルおよびフーリエ係数の絶対値のプロットを示す. 数値計算によって得られた結果をまとめて表 1 に記す. 表 1 にまとめた結果から推測されることが二つある. 一つは周期解の周期 L が $2p$ となること. もう一つは得られた非零のフーリエ係数の添字が $pl \pm m$ ($l \in \mathbb{Z}$) となることである. これらは数値的に観測された予測のため証明されていないが, 星形周期解の存在を証明するための手がかりになると思われる.

表 1: 図 2 から図 8 で得られた数値解のデータ ($l \in \mathbb{Z}$)

θ	L	p	m	非零のフーリエ係数の添字
$\pi/3$	12	6	1	$6l \pm 1$
$\pi/4$	8	4	1	$4l \pm 1$
$\pi/5$	20	10	3	$10l \pm 3$
$\pi/6$	6	3	1	$3l \pm 1$
$\pi/7$	28	14	5	$24l \pm 5$
$\pi/10$	10	5	2	$5l \pm 2$
$\pi/35$	140	70	34	$70l \pm 34$

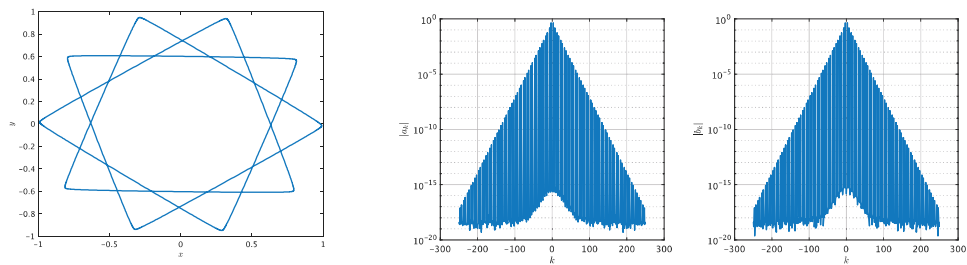


図 4: フーリエ・スペクトル法による星形周期解の数値解 ($\theta = \pi/5$, $\alpha = 4$, $N = 250$, $L \approx 20$, $p = 10$, $m = 3$), (左) 周期解のプロファイル, (右) x, y のフーリエ級数の絶対値のプロット

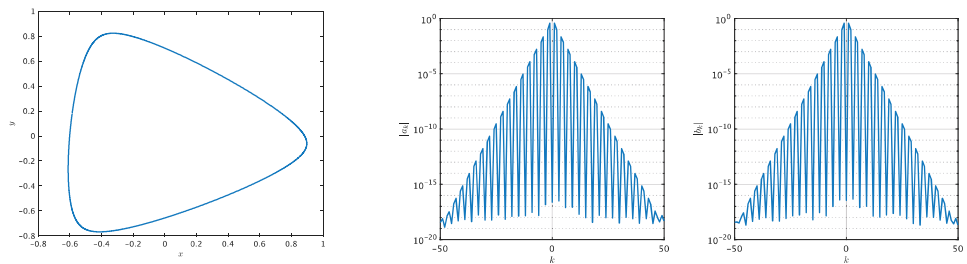


図 5: フーリエ・スペクトル法による星形周期解の数値解 ($\theta = \pi/6$, $\alpha = 2.6$, $N = 50$, $L \approx 6$, $p = 3$, $m = 1$), (左) 周期解のプロファイル, (右) x, y のフーリエ級数の絶対値のプロット

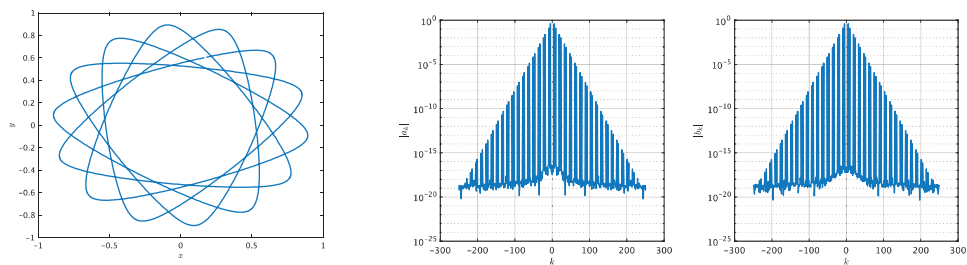


図 6: フーリエ・スペクトル法による星形周期解の数値解 ($\theta = \pi/7$, $\alpha = 2.5$, $N = 250$, $L \approx 28$, $p = 14$, $m = 5$), (左) 周期解のプロファイル, (右) x, y のフーリエ級数の絶対値のプロット

4 ディスカッション

数値計算によって得た近似周期解をもとに Newton-Kantorovich の定理に基づく周期解の精度保証付き数値計算が（例えば [4, 5] のような方法で）可能である。今回の星形周期解にも精度保証付き数値計算を試みたが、いずれの場合も精度保証が失敗した。これは予想 1.3 にある θ/π が有理数であるときのみ周期解が存在することからくる特異性に起因するものである。すなわち、周期解が存在するパラメータの値は何らかの意味で分岐点となっており、単純なニュートン法による定式化では精度保証付き数値計算ができない。そのため、今回は高精度な数値解が得られたものの、精度保証付き数値計算で周期解の存在検証はできなかった。

そこで、今後の研究の発展のため、数値的に観測された結果から導きたいことをまとめておく。まず、非零のフーリエの係数の添字 ($pl \pm m$) は、おそらく星形を作るためのフーリエ級数に対する対称性である。例えば、

$$(x(t), y(t)) = 2 \sin 2t - \cos 3t, \sin 3t - 2 \cos 2t$$

という媒介変数表示された座標系は星形図形（図 9）を作り、フーリエ係数の添字は $k = \pm 2, \pm 3$ に相当する。これは図 7 で観測された非零のフーリエの係数 $5l \pm 2$ で $l = -1, 0, 1$ の場合の一部である。そこでこのような星形図形を作る一般的な対称性がフーリエ級数にあるのか？を確認したい。

次に、今回の数値計算の方法によって、 θ を設定し数値計算すると p, m の値が得られるので、周期解の周期が $2p$ であることを示せないか？と考えている。実はこの p は星形周期解の折り返し回数と一致し、 m は星形図形を書くために必要な周回수에一致する。例えば、図 9 のような星形図形では、折り返しの回数は 5 で p と一致する。さらに図形を描画するためには原点を中心に 2 周筆を走らせる必要がある。これは $m = 2$ に一致する。さらに $p \geq m$ が成り立つことも観測された。

最後に、星形周期解の精度保証付き数値計算に関して、今後の展望を記しておきたい。はじめに遅延微分方程式系 1.1 を

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

と複素数値関数 z を利用すると、

$$\dot{z} = -\alpha (1 - |z|^2) e^{i\theta} z(t-1)$$

という一つの複素数値遅延微分方程式で書くことができる。この表記によって、2 変数の遅延微分方程式系よりもより解のふるまいの簡明な理解ができるのではないかと期待できる。例えば、今回星形周期解の周期が $2p$ と自然数である可能性が高いため、 $z_n(t) \equiv z(t+n)$ となる関数に対して、複素常微分方程式系

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\alpha (1 - |z_1|^2) e^{i\theta} z_0 \\ \dot{z}_2 &= -\alpha (1 - |z_2|^2) e^{i\theta} z_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{2p-1} &= -\alpha (1 - |z_{2p-1}|^2) e^{i\theta} z_{2p-2} \\ \dot{z}_0 &= -\alpha (1 - |z_0|^2) e^{i\theta} z_{2p-1} \end{aligned}$$

の周期解が存在すれば、 $z_{2p} = z(t+2p) = z(t) = z_0$ となる周期解を得られる。この方針の良い点は遅延微分方程式を考えることなく、常微分方程式系の周期解を考えることで得られるところである。常微分方程式の周期解の計算機援用証明はフーリエ級数を使った Newton-Kantorovich の定理に基づく方法以外にも、厳密な求積法を利用するシューティング法を利用できる可能性もある。今後の研究の発展に期待したい。

謝辞

本稿を執筆するにあたり研究室の卒業生である野澤健三さんに感謝の意を表します。彼の数多の数値計算の上に本稿は成り立っています。さらに、星形周期解という魅力的な研究対象を教えてくださいました石渡哲哉先生（芝浦工大）、中田行彦先生（青山学院大学）、石渡恵美子先生（東京理科大学）にも厚く御礼申し上げます。

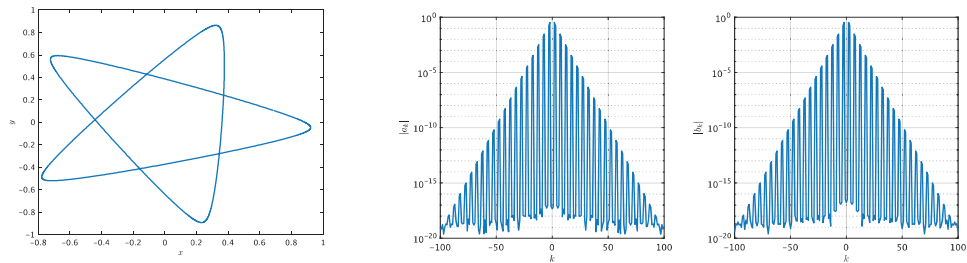


図 7: フーリエ・スペクトル法による星形周期解の数値解 ($\theta = \pi/10$, $\alpha = 2.5$, $N = 100$, $L \approx 10$, $p = 5$, $m = 2$), (左) 周期解のプロファイル, (右) x, y のフーリエ級数の絶対値のプロット

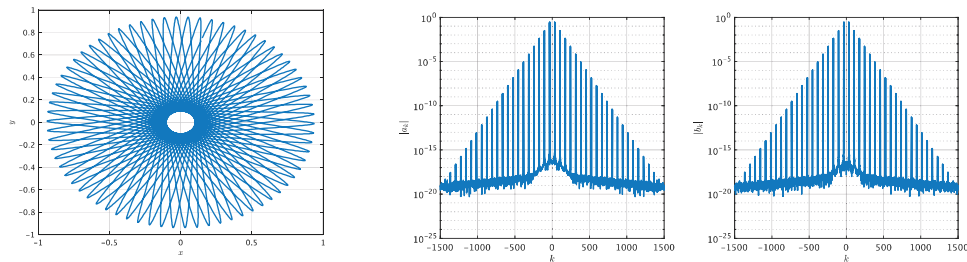


図 8: フーリエ・スペクトル法による星形周期解の数値解 ($\theta = \pi/35$, $\alpha = 2.5$, $N = 1500$, $L \approx 140$, $p = 70$, $m = 34$), (左) 周期解のプロファイル, (右) x, y のフーリエ級数の絶対値のプロット

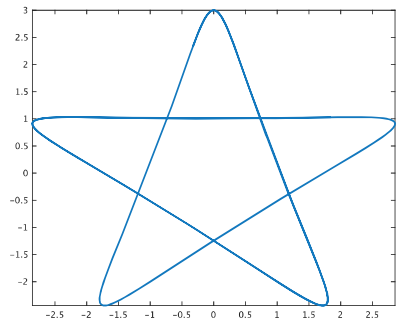


図 9: 媒介変数表示 $(x(t), y(t)) = 2 \sin 2t - \cos 3t, \sin 3t - 2 \cos 2t$ で描画される星形図形.

参考文献

- [1] Hara T. and Sugie J. , “Stability region for systems of differential-difference equations”, *Funkcialaj Ekvacioj*, 39 (1996): 69–86.
- [2] Hara T., “The asymptotic stability and star shaped periodic solutions for delay differential system” *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 30 (1997): 4555–4563.
- [3] Hara T., Sakata S., “Star-shaped periodic solutions for $\dot{x}(t) = -\alpha\{1 - \|x(t)\|^2\} R(\theta)x([t])$ ”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 49 (2002): 455–470.
- [4] Lessard J.-P., “Continuation of solutions and studying delay differential equations via rigorous numerics”, in van den Berg J. B. and Lessard J.-P. eds., *Rigorous numerics in dynamics*, pp. 81–122, Providence, Rhode Island, 2018. American Mathematical Society.
- [5] Oishi S., “Numerical inclusion of exact periodic solutions for time delay duffing equation”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 372(2020): 112620, 24 pages.