

シュレディンガー作用素の固有関数の増大度

立命館大学
京都工芸繊維大学

荒井正治 (Masaharu ARAI)
内山 淳 (Jun UCHIYAMA)

1 序

問題と解法を明らかにするために最も簡単な場合から考えよう。 u を $-u'' - \lambda u = 0$, $\lambda > 0$ の解とする。この時、 $u = C \sin(\sqrt{\lambda}x + \alpha)$ であるから、 $u \neq 0$ であっても $|u|$ を下からすくい上げて評価することはできない。しかし、 $|u'|^2 + \lambda|u|^2$ についてはそれが可能である。

次に u を

$$(1.1) \quad -u'' + q(x)u = 0$$

の非自明解とする。次の問題を考えよう。

問題 1.1 u に依らない正値関数 $\Phi(x)$ と $k(x)$ が存在して

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) [|u'|^2 + k(x)|u|^2] > 0$$

となるための $q(x)$ の条件を求めよ。

簡単のため q も u も実数値関数としよう。

$$\Phi(x) = \exp \int^x \gamma(t) dt$$

$$F(x) = \Phi(x) [u'^2 + k(x)u^2]$$

と置く。 $F(x)$ を微分すると、(1.1) を使って

$$(1.2) \quad F'(x) = \Phi(x) [\gamma u'^2 + 2(k+q)uu' + (\gamma k + k')u^2]$$

を得る。

STEP I 任意の u, u' に対して (1.2) の右辺が非負となるような γ, k を求めること。

例えば $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$ と分解でき

$$(1.3) \quad q_1' + \gamma q_1 + \gamma^{-1} q_2^2 \leq 0$$

となる $\gamma(x) > 0$ が存在するならば $k(x) = -q_1(x)$ と取れば良い。特に、 $q_1 = -\lambda$ (λ : 正定数) の時は $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |q_2(x)|$ とすればよい。

STEP I がうまくいったとしよう。

STEP II u は (1.1) の解であるから、任意の点 x_1 において $F(x_1) > 0$ であり、STEP I より $F(x)$ は非減少関数であるから

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} F(x) \geq F(x_1) > 0$$

を得る。

同様の問題を偏微分方程式

$$(1.4) \quad -\Delta u + q(x)u = 0$$

について考えよう。

$$\Phi(r) = \exp \int^r \gamma(t) dt$$

と置き、(1.4) の両辺に $2\Phi(|x|)\partial_r \bar{u}$ をかけ、 $s < |x| < t$ で積分し、部分積分をして、実数部分を取ると

$$\begin{aligned} (1.5) \quad & \left(\int_{|x|=t} - \int_{|x|=s} \right) \Phi \{ 2|\partial_r u|^2 - |\nabla u|^2 \} dS \\ & = \int_{s < |x| < t} \Phi \left[\left(\gamma - \frac{n-1}{r} \right) |\partial_r u|^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{2}{r} - \gamma - \frac{n-1}{r} \right) (|\nabla u|^2 - |\partial_r u|^2) + 2\operatorname{Re} [q(\partial_r \bar{u})u] \right] dx \end{aligned}$$

を得る。これと部分積分によりえられる公式

$$(1.6) \quad \left(\int_{|x|=t} - \int_{|x|=s} \right) \Phi(|x|) k(x) |u(x)|^2 dS \\ = \int_{s < |x| < t} \Phi \left[2k \operatorname{Re}[(\partial_r u) \bar{u}] + \left\{ \partial_r k + \left(\gamma + \frac{n-1}{r} \right) k \right\} |u|^2 \right] dx$$

とを辺々加えて

$$(1.7) \quad F(t) - F(s) = \int_{s < |x| < t} |x|^{-1} \Phi G dx$$

$$(1.8) \quad F(t) = \int_{|x|=t} \Phi \left\{ 2|\partial_r u|^2 - |\nabla u|^2 + k(x)|u(x)|^2 \right\} dS$$

の形の式を得る。

常微分の場合の STEP I と同様に

$$\forall u \quad \text{に対して} \quad G \geq 0$$

が示せたとしよう。さらに、

STEP II' $F(r_1) > 0$ なる r_1 が存在する

ことが言えると、問題 1.1 は解決することとなるが、(1.8) の右辺の被積分関数は $u, \partial_j u$ の二次形式と見たとき正定値ではないので、STEP II' は正しいかどうか分からない。それを回避するために 4 節の STEP IV 以降の考察と、補助関数 ρ と ϕ の導入とを必要とした。

なお、(1.8) の右辺の被積分関数が $u, \partial_j u$ の二次形式と見て正定値であることを要しないのであれば、そこに cross term $(\partial_j u) \bar{u}$ が加わっても良いであろう。そこで、4 節では (1.5) を導くにあたって (1.4) の両辺に $2\Phi(|x|) \partial_r \bar{u}$ をかけたところを $\Phi(|x|)(2\partial_r \bar{u} + g\bar{u})$ をかけることにする。

2 定理

$u(x) \in H_{loc}^2(\Omega)$ を

$$(2.1) \quad -\Delta u + (q_1(x) + q_2(x))u(x) = 0 \quad \text{in } \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geq R_0\}$$

を満たす、台が有界ではない関数とする。

以下 $r = |x|$ とし $' = \frac{d}{dr}$ とする。

以後次の仮定 (Q), (A) をおく。

(Q.1) $q_1(x)$ は実数値関数であり次の性質を満たす：

$\forall w(x) \in H_{loc}^1(\Omega)$ に対して

$$\sqrt{|q_1(x)|}w(x) \in L_{loc}^2(\Omega) \text{ かつ } \sqrt{|\partial_r q_1(x)|}w(x) \in L_{loc}^2(\Omega).$$

(Q.2) $q_2(x)$ は複素数値関数でもよいが次の性質を満たす：

$\forall w(x) \in H_{loc}^1(\Omega)$ に対して $\sqrt{|q_2(x)|}w(x) \in L_{loc}^2(\Omega)$.

(A) $i = 1, 2$ に対して以下の性質を満たす $[R_0, \infty)$ で連続な関数 $\psi_i(r)$, $\sigma_i(r)$, $\eta_i(r)$ が存在する。

$$(A.1) \quad \psi_i(r) > 0,$$

$$(A.2) \quad \sigma_i(r) > 0 \text{ かつ 有界},$$

$$(A.3) \quad \eta_i(r) \leq 2 \text{ かつ 有界},$$

$$(A.4) \quad \sigma_i(r) - \eta_i(r) \in C^1([R_0, \infty)) \text{ かつ}$$

$$\left\{ \left(\sigma_2(r) - \eta_2(r) \right) - \left(\sigma_1(r) - \eta_1(r) \right) \right\}' = O(r^{-1}),$$

(A.5) 定数 $a_1 > 1$, $a_2 > 0$ が存在して

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\psi_i(r)^2}{\sigma_i(r)} \left[r \partial_r q_1(x) + \eta_i(r) q_1(x) + \frac{a_i}{\sigma_i(r)} \left| r q_2(x) + \frac{1}{4} \{ \sigma_i(r) - \eta_i(r) \}' \right|^2 \right] < 0,$$

$$(A.6) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\psi_i(r)}{r \sigma_i(r)} = 0,$$

(A.7) 正定数 C_1 , C_2 と連続関数 $\tau(r)$ が存在して、

$$C_2 \sigma_2(r) \leq \tau(r) \leq C_1,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi_2(r)}{\sqrt{\sigma_2(r)}} \exp \left(\int_{R_0}^r \frac{\tau(t) - \eta_2(t)}{2t} dt \right) = 0.$$

<仮定終わり>

さて

$$(2.2) \quad \Phi_i(r) = \exp \left(\int^r \frac{\sigma_i(t) + \eta_i(t)}{2t} dt \right)$$

と置こう。

定理 2.1 以上の仮定が満たされているとき

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \Phi_1(|x|) \left[|\partial_r u|^2 + \left(\frac{1}{r^2} + (q_1)_- \right) |u|^2 \right] dS > 0$$

が成り立つ。ここで

$$(q_1)_-(x) = \text{Max} \{ 0, -q_1(x) \}$$

である。

定理 2.2 さらに、

(Q.3) 定数 $0 < a_3 < 1$, $\delta \geq 0$, $C_3 > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ (q_1)_-(x) + \left(\text{Re}[q_2] + \frac{1}{4r}(\sigma_1 - \eta_1)' \right)_-(x) \right\} |w|^2 dx \\ & \leq \int_{\Omega} \{ a_3 |\nabla w(x)|^2 + C_3 r^\delta |w|^2 \} dx \end{aligned}$$

がすべての $w(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成り立つとしよう。

このとき

$$(1) \quad \liminf_{R \rightarrow \infty} R^\delta \Phi_1(R) \int_{R < |x| < R+1} |u|^2 dx > 0$$

が成り立つ。

$$(2) \quad \text{さらに} \quad \int^\infty R^{-\delta} \Phi_1(R)^{-1} dR = \infty \quad \text{であれば} \quad u(x) \notin L_2(\Omega)$$

である。

注 2.3 最も基本的な仮定は (A.5) の $i=1$ である。これは $n=1$, $\sigma_1 \equiv \eta_1$ のときには、 $\gamma = x^{-1}\sigma_1 = x^{-1}\eta_1$ と置くことにより (1.3) とほぼ同値となる。なお、ここで $\sigma_1 = \eta_1$ を仮定しなくてもよいのは、1節の最後に注意した g の導入のご利益である。

また、(A.3) の中の $\eta_i \leq 2$ は偏微分特有の仮定であり、常微分の場合には不要である。

注 2.4 定理の主張の中には $i=1$ しか現れていないことに注意しよう。 σ_1 を固定すると η_1 が小さく取れば取れるほど良い定理と言うことになる。他方、 η_2 しか現れない仮定 (A.7) は η_2 が大きければ大きいほど満たしやすい仮定である。そこで $i=1, 2$ と分けることとした。

3 例

$$q_1(x) = -r^\alpha + V_1(x) - \lambda, \quad q_2(x) = V_2(x) + r^{-1}Q'(r)$$

なる場合を考えよう。ここで

$$\alpha > 0, \quad -\infty < \lambda < \infty \text{ は定数}$$

$$V_1(x), Q(r) \text{ は実数値関数}$$

$$\partial_r V_1 = o(r^{\alpha-1}\theta(r)), \quad V_1 = o(r^\alpha\theta(r)), \quad V_2 = o(r^{(\alpha/2)-1}\theta(r)), \quad Q(r) = o(\theta(r))$$

とし $\theta(r)$ は

$$\theta(r) = 1, \quad \log r, \quad (\log r)^{-1-\varepsilon_0} \quad (\varepsilon_0 > 0)$$

のどれかとしよう。

このとき、次が成り立つ。

命題 3.1

1) $\theta(r) \equiv 1$ のときは

$$\begin{cases} \int_{R < |x| < R+1} |u|^2 dx \geq C_\varepsilon R^{-(\alpha/2)-\varepsilon} & \text{for any } \varepsilon > 0, \\ u \notin L^2(|x| > R_0), & \text{if } 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

2) $\theta(r) = \log r$ のときは

$$\begin{cases} \int_{R < |x| < R+1} |u|^2 dx \geq C_\varepsilon R^{-(\alpha/2)} (\log R)^{-\varepsilon} & \text{for any } \varepsilon > 0, \\ u \notin L^2(|x| > R_0), & \text{if } 0 < \alpha \leq 2. \end{cases}$$

3) $\theta(r) = (\log r)^{-1-\varepsilon_0}$ のときは

$$\begin{cases} \int_{R < |x| < R+1} |u|^2 dx \geq CR^{-(\alpha/2)} \\ u \notin L^2(|x| > R_0), & \text{if } 0 < \alpha \leq 2. \end{cases}$$

この証明に先立って、 $Q(r)$ の例をあげておく。 $Q(r) = -\int_r^\infty t^{-\varepsilon_1} e^t \sin e^t dt$ は $Q(r) = O(r^{-\varepsilon_1})$ なので上の仮定を満たすが、 $r^{-1}Q'(r) = r^{-1-\varepsilon_1} e^r \sin e^r$ なので q_2 自身は非常に大きくなり得ることに注意しておこう。

証明 $\beta_2 < \beta_1 = \alpha$, $0 < \varepsilon < 2^{-1}(2 + \alpha)$ に対して

$$\sigma(r) = \sigma_i(r) = \varepsilon\theta(r) - 2Q(r), \quad \eta_i(r) = \varepsilon\theta(r) + 2Q(r) - \beta_i$$

とおくと (A.4) が満たされ

$$(\sigma_i - \eta_i)' = -4Q', \quad \sigma_i + \eta_i = 2\varepsilon\theta - \beta_i$$

である。 $Q = o(1) \cdot \theta$ だから R_1 を十分大きく取ることにより $r > R_1$ に対して $|Q(r)| < (\varepsilon/4)\theta(r)$ とできる。よって

$$(3.1) \quad (\varepsilon/2)\theta(r) < \sigma(r) < (3\varepsilon/2)\theta(r) \leq (3\varepsilon/2),$$

$$(3.2) \quad (\varepsilon/2)\theta(r) - \beta_i < \eta_i(r) < (3\varepsilon/2) - \beta_i < 2 - (\varepsilon/2) \quad \text{for } r > R_1$$

となり、(A.2), (A.3) が満たされる。次に $\psi_i(r) = r^{-\alpha/2}$ ($i = 1, 2$) とおくと (A.1), (A.6) は明かである。 $r q_2 + 4^{-1}(\sigma - \eta_i)' = r V_2$ に注意すると

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow \infty} \sigma^{-1} \psi_i^2 \left\{ r \partial_r q_1 + \eta_i q_1 + a_i \sigma^{-1} |r q_2 + 4^{-1}(\sigma - \eta_i)'|^2 \right\} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \sigma^{-1} r^{-\alpha} \left\{ -(\alpha + \eta_i) r^\alpha + (r \partial_r V_1 + \eta_i V_1) - \eta_i \lambda + a_i \sigma^{-1} |r V_2|^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\leq -\liminf_{r \rightarrow \infty} (\alpha + \eta_i) \sigma^{-1} + \limsup_{r \rightarrow \infty} \{o(1) \cdot \sigma^{-1} \theta(r) - \eta_i \lambda \sigma^{-1} r^{-\alpha} + o(1) \cdot \sigma^{-2} \theta(r)^2\}$$

を得るが、 $\beta_2 < \beta_1 = \alpha$ と (3.1), (3.2) より第一項は負、第二項は零となり、(A.5) が満たされる。

さらに、 τ を $0 < \tau < \alpha - \beta_2$ となる定数にとると (A.7) も満たされる。

このとき、

$$\Phi_1(R) = \exp \left(\int_{R_0}^R (2t)^{-1} \{ \sigma(t) + \eta_1(t) \} dt \right) = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-(\alpha/2)} \exp \left(\varepsilon \int_{R_0}^R \frac{\theta(t)}{t} dt \right),$$

$$\exp \left(\varepsilon \int_{R_0}^R \frac{\theta(t)}{t} dt \right) \begin{cases} = \text{Const } R^\varepsilon, & \text{if } \theta(r) \equiv 1 \\ = \text{Const } (\log R)^\varepsilon, & \text{if } \theta(r) = (\log r)^{-1} \\ \leq \text{Const}, & \text{if } \theta(r) = (\log r)^{-1-\varepsilon_0}. \end{cases}$$

である。 $\delta = \alpha$ として (Q.3) が満たされるから、定理 2.2 により命題 3.1 が示された。

4 証明の概要

STEP I $\gamma_i(r), g_i(r), \rho(r), k_i(x)$ ($i = 1, 2$) を後に定める実数値関数とする。 $\Phi_i(r) = \int^r \gamma_i(t) dt$ と置く。 $v(x) = e^{\rho(r)} u(x)$ と置き、(2.1) を v の方程式に書き換えると

$$-\Delta v + 2\rho' \partial_r v + \{q_1 + q_2 + \rho'' + (n-1)r^{-1}\rho' - \rho'^2\} v = 0$$

となる。この両辺に $\Phi_i(r) (2\partial_r \bar{v} + g_i \bar{v})$ をかけ、 $(R_0 <) s < |x| < t$ で積分し、部分積分をして、実数部分を取る。それと (1.6) で u を v に置き換えた式とを辺々加えると

$$\begin{aligned} & \left(\int_{|x|=t} - \int_{|x|=s} \right) \Phi_i \{ 2|\partial_r v|^2 - |\nabla v|^2 + g_i \text{Re}[(\partial_r v) \bar{v}] + k_i(x) |v|^2 \} dS \\ &= \int_{s < |x| < t} \Phi_i \left[\left(4\rho' + \gamma_i - \frac{n-1}{r} + g_i \right) |\partial_r v|^2 + \left(\frac{2}{r} - \gamma_i + g_i - \frac{n-1}{r} \right) (|\nabla v|^2 - |\partial_r v|^2) \right. \\ & \quad \left. + \text{Re} \left[\left\{ \gamma_i g_i + 2q_1 + 2\bar{q}_2 + g_i' + 2 \left(\rho'' + \frac{n-1}{r} \rho' - \rho'^2 + g_i \rho' \right) + 2k_i \right\} (\partial_r v) \bar{v} \right] \right. \\ & \quad \left. + \left\{ g_i (q_1 + \text{Re}[q_2]) + g_i \left(\rho'' + \frac{n-1}{r} \rho' - \rho'^2 \right) + \partial_r k_i + \left(\gamma_i + \frac{n-1}{r} \right) k_i \right\} |v|^2 \right] dx \end{aligned}$$

を得る。

σ_i, η_i を仮定に現れる関数とし、 $\phi(r)$ を後に定める関数として、

$$\gamma_i(r) = \{ \sigma_i(r) + \eta_i(r) \} / (2r), \quad g_i(r) = \{ \sigma_i(r) - \eta_i(r) \} / (2r) + (n-1)/r,$$

$$k_i(x) = -q_1(x) + \rho'(r)^2 + (g_i(r)^2/4) - \phi(r)$$

と置くと、上式は

$$(4.1) \quad F_i(t; \rho, \phi) - F_i(s; \rho, \phi) = \int_{s < |x| < t} r^{-1} \Phi_i(r) G_i(x; \rho, \phi) dx \quad (i = 1, 2)$$

と書ける。ここで F_i, G_i は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F_i(t; \rho, \phi) &= \int_{|x|=t} \Phi_i(r) \{2|\partial_r v|^2 - |\nabla v|^2 + g_i(r) \operatorname{Re}[(\partial_r v)\bar{v}] \\ &\quad + \left(-q_1(r) + \rho'(r)^2 + \frac{1}{4}g_i(r)^2 - \phi(r)\right) |v|^2\} dS \\ G_i(x; \rho, \phi) &= \tilde{G}_i(x) + 4r\rho'(r)|\partial_r v|^2 + 2r\left(\rho'' + \frac{n-1}{r}\rho' + g_i\rho' - \phi\right) \operatorname{Re}[(\partial_r v)\bar{v}] \\ &\quad + r\left\{2\rho'\rho'' + \frac{\eta_i(r)}{r}\rho'^2 + g_i\left(\rho'' + \frac{n-1}{r}\rho'\right) - \phi' - \left(\gamma_i + \frac{n-1}{r}\right)\phi\right\} |v|^2 \\ \tilde{G}_i(x) &= \sigma_i(r)|\partial_r v|^2 + (2 - \eta_i(r))(|\nabla v|^2 - |\partial_r v|^2) \\ &\quad + 2\operatorname{Re}\left[\left\{rq_2 + \frac{1}{4}(\sigma_i(r) - \eta_i(r))'\right\}(\partial_r \bar{v})v\right] + rg_i\left(\gamma_i + \frac{g_i}{2} - \frac{1}{r}\right) \operatorname{Re}[(\partial_r v)\bar{v}] \\ &\quad + \left[-\{r\partial_r q_1 + \eta_i(r)q_1\} \right. \\ &\quad \left. + g_i\left\{r\operatorname{Re}[q_2] + \frac{1}{4}(\sigma_i(r) - \eta_i(r))'\right\} + \frac{1}{4}g_i^2(r\gamma_i + n - 3)\right] |v|^2. \end{aligned}$$

なお、仮定 (Q.1), (Q.2) は部分積分の正当性のために使われている。

STEP II 仮定 (A.1)–(A.6) より

$$G_1(x; 0, 0) \geq 0 \quad \text{for } \forall |x| \geq \exists R_1 \geq R_0$$

を示すことができる。

STEP III

$$\exists R_* > R_1 \quad \text{s.t.} \quad F_1(R_*, 0, 0) > 0$$

$\Rightarrow$ 定理 2.1 が成り立つ。

実際、(4.1) と STEP II より $F_1(r; 0, 0)$ は非減少関数であり、 $\rho \equiv 0$ の時は $v = u$ であることと、 $|g_1(r)| \leq \text{Const } r^{-1}$ に注意すると

$$\begin{aligned} F_1(r; 0, 0) &= \int_{|x|=r} \Phi_1(r) \left\{ 2|\partial_r u|^2 - |\nabla u|^2 + g_1 \text{Re}[(\partial_r u)\bar{u}] + (-q_1 + g_1/4)|u|^2 \right\} dS \\ &\leq \text{Const} \int_{|x|=r} \Phi_1(r) \left\{ |\partial_r u|^2 + \left(\frac{1}{r^2} + (q_1)_- \right) |u|^2 \right\} dS \end{aligned}$$

を得るからである。

STEP IV

$$\rho_1(r) = \int_{R_0}^r \left\{ \exp \left(\int_{R_0}^s \frac{\tau(t) - \eta_2(t)}{2t} dt \right) \right\} ds$$

とおく。 $\phi(r)$ が

$$(4.2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi_2(r)^2}{\sigma_2(r)} r \left\{ r\phi(r)^2 + \left| \phi'(r) + \left(\gamma_2(r) + \frac{n-1}{r} \right) \phi(r) \right| \right\} = 0$$

を満たすならば、

$$\exists R_2 \geq R_1, \quad \exists M > 0, \quad \text{s.t.} \quad G_2(x; m\rho_1, \phi) \geq 0 \quad \text{for} \quad \forall |x| \geq R_2, \quad \forall m \geq M.$$

この証明には、(A.7) を使う。

STEP V ρ_1, ϕ を上の通りとすると

$$\exists R_3 \geq R_2, \quad \exists m_0 > M, \quad \text{s.t.}$$

$$F_2(r; m_0\rho_1, \phi) \geq F_2(R_3; m_0\rho_1, \phi) > 0 \quad \text{for} \quad \forall r \geq R_3.$$

実際、 $v = e^{\rho} u$ により $F_2(r; m_0\rho_1, \phi)$ を u を使って表しておく。 $e^{-2m\rho_1(r)} F_2(r; m\rho_1, \phi)$ は m の 2 次式であって

$$m^2 \text{ の係数} = 2 \int_{|x|=r} \Phi_2(r) \rho_1'^2 |u|^2 dS$$

である。 $\text{supp}[u]$ が compact ではないから上の量が正となる $r = R_3$ が存在し、 m_0 を十分大きく取ると、求める式の第二の不等式を得る。第一の不等式は (4.1) と STEP IV より従う。

STEP VI ϕ を (4.2) を満たす関数とする。 r の関数 $\rho_2(r; R)$ を

$$\rho_2(r; R) = C(R) \log r$$

とおき、定数 $C(R)$ を

$$m_0 \rho'_1(r) = \rho'_2(r; R) \quad \text{at } r = R$$

を満たすように取る。このとき、

$$F_2(r; \rho_2(\cdot; R_4), \phi) \geq F_2(r; \rho_2(\cdot; R_4), \phi)|_{r=R_4} > 0 \quad \text{for } \forall r \geq \exists R_4 \geq R_3$$

である。なぜなら、STEP IV と同様にして、

$$G_2(x; \rho_2(\cdot; R_4), \phi) \geq 0 \quad \text{for } \forall |x| \geq \exists R_4$$

を得るから、(4.1) より $F_2(r; \rho_2(\cdot; R_4), \phi)$ は単調非減少関数である。また、 v を u に戻すことにより

$$F_2(r; \rho_2(\cdot; R_4), \phi) = \exp[2\{\rho_2(r; R_4) - m_0 \rho_1(r)\}] \cdot F_2(r; m_0 \rho_1, \phi) \quad \text{at } r = R_4$$

であることが分かるが、STEP V よりこれは正である。

STEP VII 次のいずれかが成り立つことは明らかである。

$$\text{Case 1} : \forall R_5 \geq R_0, \exists R_6 \geq R_5 \quad \text{s.t.}$$

$$\left. \frac{d}{dr} \int_{|x|=r} \frac{\Phi_1}{r} (2\rho'_2 + g_2 - g_1) |u|^2 dS \right|_{r=R_6} \leq 0;$$

$$\text{Case 2} : \exists R_7 \geq R_0, \quad \text{s.t.}$$

$$\frac{d}{dr} \int_{|x|=r} \frac{\Phi_1}{r} (2\rho'_2 + g_2 - g_1) |u|^2 dS > 0 \quad \text{for } \forall r \geq R_7.$$

STEP VIII $0 < 2\rho'_2 + g_2 - g_1 \leq \text{Const } r^{-1}$ に注意すれば、Case 2 が成り立つ場合には

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} \frac{\Phi_1(r)}{r^2} |u|^2 dS > 0$$

を得るので、定理 2.1 が成り立つ。

STEP IX $\phi(r)$ がさらに

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad \phi &\geq \frac{1}{4} \left(g_2^2 - g_1^2 \right) + 2\rho_2'^2 + g_2\rho_2' \\
 &\quad - \frac{1}{4r} (\sigma_1 + \eta_1 + 2n - 4) (2\rho_2' + g_2 - g_1) - \rho_2'' - \frac{1}{2} (g_2 - g_1)' \\
 &\quad \text{for } \forall r \geq \exists R_8
 \end{aligned}$$

を満たすならば、Case 1 が成り立っている場合には STEP III の仮定が導かれ、定理 2.1 が成り立つ。

STEP X (A.6) より (4.2), (4.3) を満たす ϕ が存在する。

注 (4.2) と「(4.3) で ρ_2 を $m_0\rho_1$ で置き換えたもの」とを同時に満たす ϕ が存在するならば STEP VI は不要であるが、それは期待できない。

5 定理の拡張

1) 方程式 (2.1) の代わりに

$$- \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1} b_j(x) \right) a_{jk}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \sqrt{-1} b_k(x) \right) u + (q_1(x) + q_2(x))u = 0$$

を扱うことも可能である。

2) σ_i, η_i が必ずしも $r = |x|$ のみの関数ではない場合を許すように仮定を置くこともできる。

Reference :

M. Arai and J. Uchiyama, Growth order of eigenfunctions of Schrödinger operators with potentials admitting some integral conditions. (in preparation.)