

統計力学的平衡状態と C^* -代数の状態の分解

京都大学理学部 宮田 英男

ここでは以下論文に述べてあることの主要な部分を紹介する。

(1) J. Döplicher D. Kastler D.W. Robinson

Commutative Algebra in Field Theory and Statistical Mechanics

Communications in Mathematical Physics 3 (1966)

(2) D. Ruelle

States of Physical System

3 (1966)

(3) D. Kastler D.W. Robinson

Invariant State in Statistical Mechanics

3 (1966)

(4) D.W. Robinson D. Ruelle

Extremal Invariant State

to appear

これらの論文では場の理論及び統計力学の代数的定式化に立って、観測可能量のなす C^* -代数の上の状態 (state) として与えられる物理的状态について考察したもので、空間的広がり記述するため、その平行移動に対応する algebra の automorphism を導入し、それらによって値を変えないような状態 (invariant state) つまり空間的に一様な状態を考え、それらを特別な性質を持つ状態に分解することとを考える。それでここでの議論の中心は 2 の 分解定理 I および 3 の 分解定理 II である。

§ 1 invariant state と表現

定義 1. $\mathcal{A}$: C^* -algebra (局所観測可能量から生成される C^* -algebra)

T : 局所コンパクト・アーベル群 (平行移動の群) コンパクトでないとする。

かつ $\mathcal{A}$ の automorphism α_x として homomorphic に表現される。

$$A \in \mathcal{A} \xrightarrow{x \in T} A(x) \in \mathcal{A}$$

もし $\forall A \in \mathcal{A} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\|_1 = 0$ が成り立つならば $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_T$ の閉包である。

• E : states on $\mathcal{A}$ (ノルム上の正値線形汎関数)

• $\tau_x \quad x \in T : \rho \in E \xrightarrow{\tau_x} \tau_x \rho \in E \quad \tau_x \rho(A) \equiv \rho(A(x))$

• $E \cap \mathcal{A}_T^\perp : T\text{-invariant states} \subset E \quad \rho \in E \cap \mathcal{A}_T^\perp \Leftrightarrow \tau_x \rho = \rho \quad \forall x \in T$

注意 - $\mathcal{A}$ には少なくとも近似単位元があるものとする。

定義 2. は意の $\mathcal{A}$ の元 2 つ A, B を取ったときに

$x \rightarrow \infty$ に対し $\|[A(x), B]\| \rightarrow 0$ が成り立つとき

$\mathcal{A}$ を asymptotically abelian algebra という。

— これら以外に [1], [3] において補助的に次のような algebra $\mathcal{A}_T$ が導入されている。

$$\mathcal{A}_T = \{X; x \in T \xrightarrow{X} Xx \in \mathcal{A} \text{ measurable} \quad \|X\|_1 \equiv \int \|Xx\| dx < \infty\}$$

(ここで measurable とは $\mathbb{R}$ 上の compact $K \subset T$ ($\varepsilon > 0$) に対し $\text{meas}(K-K')$

$< \varepsilon$ となる compact $K' \subset K$ が存在して K' の上では Xx が連続であるとき

を言う。この時は $x \rightarrow \|Xx\|$ は可測になる。)

• 積 $X * Y : (X * Y)_x = \int X_u Y_{x-u}(u) du$

• 対合 $X^* : (X^*)_x = \{X_{-x}(x)\}^*$

のように定めれば $\|X * Y\|_1 \leq \|X\|_1 \|Y\|_1 \quad \|X^*\|_1 = \|X\|_1$ が成り立つので $\mathcal{A}_T$

は normed $*$ -algebra になる。(完備であることもいえる。)

• $\mathcal{A}$ に近似単位元 A_n があると $E_\nu(x)$ を T における 0 の近傍 ν の上だけで 0 でない値を持つ L_1 ノルム 1 のスカラー函数とすれば $E_\nu = A_n E_\nu \in \mathcal{A}_T : (A_n E_\nu)_x = A_n E_\nu(x)$ は $\mathcal{A}_T$ における近似単位元になる。

• また $\mathcal{A}_T$ は $\|X\| \equiv \sup_{\pi \in \{\mathcal{A}_T \text{ の表現}\}} \|\pi(X)\|$ のノルムの性質をみたし $\|X^* * X\| = \|X\|^2$ が成り立つことから、このノルムで非完備 $*$ -algebra となる。

さて $\phi \in E \cap \mathcal{A}_T^\perp$ が与えられた時 Gelfand Segal construction により

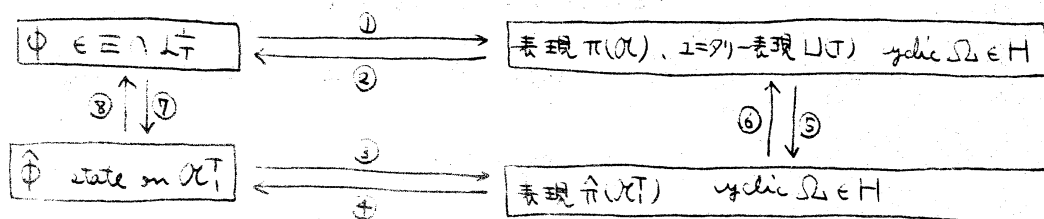
ヒルベルト空間 H_ϕ 、その上の $\mathcal{A}$ の表現 π 、 T のユニタリ表現 U 、cyclic vector

$\Omega \in H^\phi$ が与えられ、 $A \in \mathcal{X}$ に対して $\pi(A)\Omega$ は H^ϕ の元であることが示される。
 $\phi(A) = (\Omega | \pi(A)\Omega) \equiv (\pi(A)\Omega, \Omega)$ と書ける

$$\pi(A(x)) = U(x)\pi(A)U(x)^{-1} \quad U(x)\Omega = \Omega \quad \text{が成り立つ}$$

同様に $\mathcal{X}_T$ 上の state に対しても表現 $\hat{\pi}$ で構成できる。

また一般の共に essential な $(\mathcal{X}, T)$ の表現 (π, U) と $\mathcal{X}_T$ の表現 $\hat{\pi}$ の間には一対一対応があるので下のような関係が成る。



① ③ Gelfand Segal construction

$$\textcircled{2} \quad \phi(A) = (\Omega | \pi(A)\Omega)$$

$$\textcircled{4} \quad \hat{\phi}(X) = (\Omega | \hat{\pi}(X)\Omega)$$

$$\textcircled{5} \quad \hat{\pi}(X) = \int \pi(X_x) U(x) dx$$

$$\textcircled{6} \quad \pi(A) = \text{strong } \lim_{\lambda} \hat{\pi}(P(A)E_\lambda)$$

$$(P(A)X)_y = AX_y$$

$$U(x) = \text{strong } \lim_{\lambda} \hat{\pi}(V(x)E_\lambda)$$

$$(V(x)X)_y = X_{y-x}(x)$$

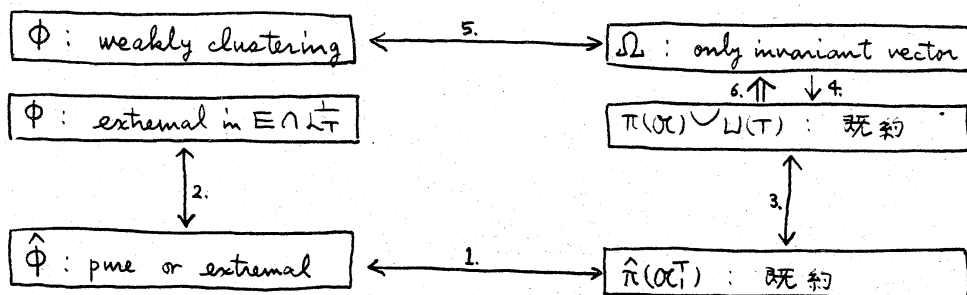
$$\textcircled{7} \quad \hat{\phi}(X) = \int \phi(X_u) du$$

$$\textcircled{8} \quad \phi(A) = \lim_{\lambda} \hat{\phi}(P(A)E_\lambda)$$

equivalent な表現を同一視すれば一意的に一つから他を作り得る。

これらについて表現の既約性に関する次のような性質の同値関係がある。

定理 1 $\mathcal{X}$ を asymptotically abelian algebra とし、上の対応関係のもとで



の全部が同値になる。但し asympt. abelian は 6. を証明する時にだけ必要で

上の二つと下の四つはそうでなくても同値で、かつ 4. が成立する。

これを *weakly clustering state* とは以下のような性質を持つものである。

平均の操作 $h \rightarrow h_f \equiv \lim_{\alpha} \rho_{\alpha} h \equiv \lim_{\alpha} \int f_{\alpha}(x) h(x) dx$ f_{α} とは

i) $f_{\alpha}(x) \geq 0$ T で定義された正のスカラ-可測函数

ii) $\int dx f_{\alpha}(x) = 1$

iii) $\lim_{\alpha} \int dx |f_{\alpha}(x) - f_{\alpha}(x+y)| = 0 \quad \forall y \in T$

を定義した場合 $\phi \in E$ が任意の $A, B \in \mathcal{O}$ に対して

$$\lim_{\alpha} \int dx f_{\alpha}(x) \{ \phi(A(x)B) - \phi(A(x))\phi(B) \} = 0$$

を満たすとき ϕ を *weakly clustering*

と呼ぶ。これに対して *strongly clustering state* とは

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \phi(A(x)B) - \phi(A(x))\phi(B) \} = 0$$

を満たす $\phi \in E$ を言う。

また *invariant vector* とは T -不変 vector 即ち $U(x)\phi = \phi \quad \forall x \in T$ を満たす ϕ をいい、そのなす線形部分空間への射影を $E(0)$ と書く。

証明) 1. 有名なので略

2. 対応式 ④ ③ よりわかる。

3. 対応式 ⑤ ⑥ より $(\pi(\mathcal{O}) \cup U(T))' = \hat{\pi}(\mathcal{O}_T)'$

4. $C \in (\pi(\mathcal{O}) \cup U(T))'$ とす。これは $U(x)C\Omega = C U(x)\Omega = C\Omega$ より $C\Omega$ も

invariant vector。それが一次元である事から $C\Omega = c\Omega$ c はスカラ-

数に $C\pi(A)\Omega = \pi(A)C\Omega = c\pi(A)\Omega$ for $\forall A \in \mathcal{O}$ 。ところで Ω は *cyclic*

であるから $C = c$ でなくてはならない。

次の証明のために補題を挙げる。

補題 1. $\lim_{\alpha} \int f_{\alpha}(x) (\phi | U(-x) - E(0) | \psi) dx = 0$ $U(-x)$ の代りに $U(x)$ でも同じ

$$\begin{aligned} \text{ii) } (\phi | &= (X | (1 - U(y)) \quad y \neq 0 \text{ のときは } \left| \int dx f_{\alpha}(x) (X | (1 - U(y)) (U(-x) - E(0)) | \psi) \right| \\ &= \left| \int dx f_{\alpha}(x) (X | U(-x) - U(-x+y) | \psi) \right| = \left| \int dx (f_{\alpha}(x) - f_{\alpha}(x-y)) (X | U(-x) | \psi) \right| \\ &\leq \int dx |f_{\alpha}(x) - f_{\alpha}(x-y)| \cdot |(X | U(-x) | \psi)| \leq \int dx |f_{\alpha}(x) - f_{\alpha}(x-y)| \cdot \|X\| \cdot \|\psi\| \xrightarrow{\alpha} 0 \end{aligned}$$

また $(\phi | = (\phi | E(0))$ の場合は明らかに成り立つ。

$M \equiv \{(1 - U(y))X; X \in H, y \in T\}$ 及び $E(0)H$ の元に対しては証明された。ところが $M^\perp = \text{invariant vector} = E(0)H$ であるから $H = \overline{M} \cup E(0)H$ 。 $\overline{M}$ の元は M の元の有限個の一次結合でノルム近似できる。故に H に対しても成立つ。」

補題 2. α が asymptotically abelian であるならば、 $E(0)\pi(\alpha)E(0)$ は abelian。

$\therefore$ asympt. abelian より $(\psi | E(0)[\pi(A(x)), \pi(B)] E(0) | \varphi) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

故に $\lim_{\alpha} \int f_{\alpha}(x) (\psi | E(0)[\pi(A(x)), \pi(B)] E(0) | \varphi) dx = 0$ (f_{α} の性質 iii) よりわかる)

$\pi(A(x)) = U(x)\pi(A)U(-x)$ $U(x)E(0) = E(0)U(x) = E(0)$ 及び 補題 1. より

$$(\psi | E(0)\pi(A)E(0)\pi(B)E(0) | \varphi) - (\psi | E(0)\pi(B)E(0)\pi(A)E(0) | \varphi) = 0$$

5. weakly clustering の性質を書きかえると、(Ω への射影を E_{Ω} と書く)

$$\lim_{\alpha} \int dx f_{\alpha}(x) (\Omega | \pi(A)(U(-x) - E_{\Omega})\pi(B) | \Omega) = 0 \quad (E_{\Omega} = I_{\Omega})(\Omega |)$$

となるが $(\Omega | \pi(A)$ 及び $\pi(B) | \Omega)$ は H で dense であるから、補題 1. によりこの性質と $E_{\Omega} = E(0)$ とより Ω が only invariant vector である事とは同値である。

6. $\pi(\alpha) \cup U(T)$ 既約であるとする。 H が一次元で $\pi = 0$ の場合は trivial である除くと、0 でない $\varphi \in E(0)H$ とすれば $\pi(\alpha)\varphi$ は $\pi(\alpha) \cup U(T)$ 不変だから H で密で $E(0)\pi(\alpha)E(0)\varphi = E(0)\pi(\alpha)\varphi$ は $E(0)H$ で密になる。故に $E(0)\pi(\alpha)E(0)$ は $E(0)H$ 上の表現として既約である。ところが α が asympt. abelian であるならば補題 2 より $E(0)\pi(A)E(0)$ は abelian であるから、 $E(0)H$ が一次元よりあり得ない。

定理 1. 証明終

§2. invariant state の分解

$E \cap \mathcal{L}_T^\perp$ の extremal point の集合を $\mathcal{E}(E \cap \mathcal{L}_T^\perp)$ と書けば、定理 1. より α が asympt. abelian であるならば $\rho \in \mathcal{E}(E \cap \mathcal{L}_T^\perp)$ は ρ が weakly clustering state である事を意味する。一般の invariant state をこのような state の和として分解する事を考える。

分解定理 I (定義 1. のもとで) $\alpha \in$ asympt. abelian algebra とするとき、

$\phi \in E \cap \mathcal{L}_T^\perp$ は以下の条件 1' あるいは 2' があれば $\mathcal{E}(E \cap \mathcal{L}_T^\perp)$

に属する状態の和として分解できる。

条件 1 $\mathcal{A}$: 可分 H_ϕ : 可分

これは [3] における証明のやり方で、この時には J. Dixmier *Les C^* -algebras et leur représentation* にある以下の定理を利用する。

(8.5.2) H を可分ヒルベルト空間、 $\hat{\pi}$ をその上の可分 C^* -algebra $\mathcal{A}$ の表現とし

るを $\hat{\pi}(\mathcal{A})'$ の極大可換フォン・ノイマン代数とした時

$H = \int^\oplus H_\lambda d\mu(\lambda)$ $\hat{\pi} = \int^\oplus \hat{\pi}_\lambda d\mu(\lambda)$ のように分解され、 $\hat{\pi}_\lambda$ は H_λ で既約で、

λ は分解における対角元に写る。

(8.8.1) f を positive linear form これに対応する表現を $\hat{\pi}_f$ とし、これについて (8.5.2)

のような分解があるとして cyclic vector の分解を $\int^\oplus \Omega_\lambda d\mu(\lambda)$ とする。

その時ほとんどすべての λ に対し $\Omega_\lambda \neq 0$ かつ

$f_\lambda(a) = (\Omega_\lambda | \hat{\pi}_\lambda(a) | \Omega_\lambda)$ は可積分で $f = \int f_\lambda d\mu(\lambda)$ となる。

$\mathcal{A}$ が可分であれば $\mathcal{A}'$ も可分になるから、 ϕ に対応する $\hat{\phi}$ 及び $\hat{\pi}(\mathcal{A}')$ に対してこ

れをあてはめる。この時には $\hat{\pi}(\mathcal{A}')$ 自身が可換フォン・ノイマン代数になる。何と

なれば ⑤ ⑥ の対応式から $\hat{\pi}(\mathcal{A}')' = (\pi(\mathcal{A}) \cup \mathcal{U}(\mathcal{T}))'$ で、これに属する元を C_1, C_2 と

する。 $\pi(\mathcal{A})\Omega$ は密であるから $\forall A, B \in \mathcal{A}$ に対し $(\Omega | \pi(A)[C_1, C_2]\pi(B)|\Omega) = 0$

を証明すればよい。 C_1, C_2 は self-adjoint として一般性を失わない。すると Ω

の cyclicity より $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} \quad \|\zeta_1 \Omega - \pi(A_1)\Omega\| < \varepsilon \quad i=1, 2$ とできて、

$\pi(A_1), \pi(A_2)$ は self-adjoint にとれる。 C_1, C_2 は $\pi(\mathcal{A}), \mathcal{U}(\mathcal{T})$ と交換するから、

$$\begin{aligned} (\Omega | \pi(A) C_1 C_2 \pi(B) \Omega) &= (\Omega | C_1 \pi(AB) C_2 | \Omega) = \lim_{\alpha} \left(d\alpha f_\alpha(x) (\Omega | C_1 \pi(AB) C_2 \mathcal{U}(x) | \Omega) \right) \\ &= \lim_{\alpha} \left(d\alpha f_\alpha(x) (\Omega | C_1 \pi(AB) \mathcal{U}(x) C_2 | \Omega) \right) = (\Omega | C_1 \pi(AB) E(0) C_2 | \Omega) = (\Omega | C E(0) \pi(AB) E(0) C | \Omega) \\ &= (\Omega | \pi(A_1) E(0) \pi(AB) E(0) \pi(A_2) | \Omega) + \delta \quad \|\delta\| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

と $E(0)\pi(\mathcal{A})E(0)$ の形になって、これは補題 2 より可換で、また ε は任意であ

るから C_1, C_2 が可換である事が証明された。

故に (8.5.2) より $H_\phi = \int^\oplus H_\lambda d\mu(\lambda)$, $\pi = \int^\oplus \pi_\lambda d\mu(\lambda)$, $\Omega = \int^\oplus \Omega_\lambda d\mu(\lambda)$ と書け, $\hat{\pi}$ は既約

となるので (8.8.1) より $\hat{\phi}(X) = \int \phi_\lambda(X) d\mu(\lambda)$, $\phi_\lambda(X) = (\Omega_\lambda | \hat{\pi}_\lambda(X) | \Omega_\lambda)$ と書け.

$\hat{\phi}_\lambda$ は pure state になる。これから対応式 ⑧ より積分と極限を入れかえり.

$$\phi(A) = \int \phi_\lambda(A) d\mu(\lambda) \quad \text{定理 1 より } \phi_\lambda \in \mathcal{E}(E \cap L_T^\perp) \text{ となる.}$$

条件 2. $\mathcal{A}$ が単位元を持つ. $\mathcal{A}$ の部分代数の可算個の族 $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ 及び $\mathcal{A}$ の真

列 $\{A_i\}$ が存在して, $\forall \rho \in \mathcal{F} \equiv \{\rho \in E \cap L_T^\perp; \forall \alpha \text{ に対し } \sup_{A \in \mathcal{A}_\alpha} \frac{|\rho(A)|}{\|A\|} = 1\}$

と $\forall \sigma \in E \cap L_T^\perp$ が $\{A_i\}$ により separate (ie $\exists A_{i_0}, \rho(A_{i_0}) \neq \sigma(A_{i_0})$ if $\rho \neq \sigma$)

を以て, $\phi \in \mathcal{F}$.

これは [2] におけるやり方で, 単位元のあることを除いては条件 1 よりうる.

$A \in \mathcal{A}$ に対し $\hat{A} : \rho \in E \cap L_T^\perp \rightarrow \rho(A)$ によって $E \cap L_T^\perp$ 上の函数と考え

$$(\hat{A}_1 \hat{A}_2)(\rho) = \hat{A}_1(\rho) \hat{A}_2(\rho) = \rho(A_1) \rho(A_2) \quad (c_1 \hat{A}_1 + c_2 \hat{A}_2)(\rho) = c_1 \hat{A}_1(\rho) + c_2 \hat{A}_2(\rho)$$

によって積と和を定義すれば $\hat{A} (A \in \mathcal{A})$ による多項式が形成され, その上の線

形函数を $\hat{\mu}_\phi(\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_\ell) = \lim_{\alpha_1} \cdots \lim_{\alpha_\ell} \int dx_1 \cdots dx_\ell f_{\alpha_1}(x_1) \cdots f_{\alpha_\ell}(x_\ell) \phi(A_1(x_1) \cdots A_\ell(x_\ell))$

$$= (\Omega | E(0) \pi(A_1) E(0) \cdots E(0) \pi(A_\ell) E(0) | \Omega) \quad (\because \text{補題 1 より})$$

で定義する. ($E(0) \pi(\mathcal{A}) E(0)$ abelian だから consistent.) これは連続線形正值ノルム

1 つまり state になることは後に示す. Stone-Weierstrass の近似定理より, この

多項式が $E \cap L_T^\perp$ 上の連続函数 $C(E \cap L_T^\perp)$ で一様ノルムで dense であることから

この上の state に拡張される. すると $\hat{\mu}_\phi$ は $E \cap L_T^\perp$ 上の positive normalized measure

として表わされる. ie $F \in C(E \cap L_T^\perp)$ $\hat{\mu}_\phi(F) = \int F(\rho) d\mu_\phi(\rho)$

今 $F = \hat{A}$ とすればこの式の左辺は定義より $(\Omega | E(0) \pi(A) E(0) | \Omega) = \phi(A)$ に等しく,

右辺の積分記号内は $\hat{A}(\rho) = \rho(A)$ となる. 故に

$$\phi(A) = \int \rho(A) d\mu_\phi(\rho) \quad \text{と書ける.}$$

ここでこの measure μ_ϕ を調べてみると $\mathcal{E}(E \cap L_T^\perp)$ に集中している事がわかる

(後述) ので $\rho \in \mathcal{E}(E \cap L_T^\perp)$ で分解できたことになる. 分解の一意性も示される.

残された証明すべき事は

• $\hat{\mu}_\phi$ が $\hat{A}$ ($A \in \mathcal{O}$) で生成される多項式 $\mathcal{P}(E \cap \mathcal{L}_T^\perp)$ 上の state である。

$\therefore P(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_L) \in \mathcal{P}(E \cap \mathcal{L}_T^\perp)$ に対し、先ず連続性 (一様ノルムで)

$$|\hat{\mu}_\phi(P)| \leq \|P\| \equiv \sup_{\sigma \in E \cap \mathcal{L}_T^\perp} |P(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_L)(\sigma)| = \sup_{\sigma \in E \cap \mathcal{L}_T^\perp} |P(\hat{A}_1(\sigma), \dots, \hat{A}_L(\sigma))| \\ = \sup_{\sigma \in E \cap \mathcal{L}_T^\perp} |P(\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_L))| \quad \text{を示す。}$$

ここで $A_1, \dots, A_L$ は self-adjoint として一般性を失わない。

$A_1, \dots, A_L$ を固定して考えると、 $\hat{\mu}_\phi(P(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_L))$ は $\mathbb{R}^L$ での多項式 $P(t_1, \dots, t_L)$ に対する線形汎関数と考える。 $P \in C(\prod_{j=1}^L [-\|A_j\|, \|A_j\|])$ としてのこの汎関数の連続性は、 $E(0)\pi(A_i)E(0)$ が互いに可換で self-adjoint なことから、可換なスペクトル分解ができて、

$$\mu_\phi(P(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_L)) = (\Omega | P(E(0)\pi(A_1)E(0), \dots, E(0)\pi(A_L)E(0)) | \Omega) \\ = \int P(t_1, \dots, t_L) (\Omega | dE_1(t_1) \dots dE_L(t_L) | \Omega)$$

となることからわかる。これを $C(\prod_{j=1}^L [-\|A_j\|, \|A_j\|])$ に拡張すれば positive normalized functional となるので、 $\prod_{j=1}^L [-\|A_j\|, \|A_j\|]$ 上の positive normalized measure $m_{A_1, \dots, A_L}$ と表わされる。

この measure の support を Δ とすると、下式が成り立つ。

$$|\mu_\phi(P(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_L))| \leq \sup_{x \in \Delta} |P(x_1, \dots, x_L)| \quad \text{----- } \textcircled{*}$$

$x \in \Delta$ に対して χ : compact support を持つ $\mathbb{R}^L$ 上の連続関数で $\chi(x) \geq 0$ とする。

すると $\alpha \equiv m_{A_1, \dots, A_L}(\chi^* \chi) > 0$

$$\Phi_\chi(A) \equiv \alpha^{-1} (\Omega | \chi^*(E(0)\pi(A_1)E(0), \dots, E(0)\pi(A_L)E(0)) E(0)\pi(A)E(0) \chi(E(0)\pi(A_1)E(0), \dots) | \Omega)$$

は α 上の線形汎関数として連続で、かつ positive normalized である。また

$$\Phi_\chi(A(\omega)) = \Phi_\chi(A), \quad \text{故に } \Phi_\chi \in E \cap \mathcal{L}_T^\perp$$

$$\text{ここから } (\chi \text{ の support}) \rightarrow x \text{ のとき } |\Phi_\chi(A_i) - x_i| = \left| \frac{\int \chi^*(t_1, \dots, t_L) (t_i - x_i) \chi(t_1, \dots, t_L) dm_{A_1, \dots, A_L}}{\int \chi^*(t_1, \dots, t_L) \chi(t_1, \dots, t_L) dm_{A_1, \dots, A_L}} \right|$$

$\rightarrow 0$. 故に $(\Phi_\chi(A_1), \dots, \Phi_\chi(A_L)) \rightarrow x$ となって $\textcircled{*}$ より連続性、つまり

$$|\mu_\phi(P(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_L))| \leq \sup_{\sigma \in E \cap \mathcal{L}_T^\perp} |P(\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_L))| \quad \text{が証明できた。}$$

また $P(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n) \geq 0$ ($E \cap L_T^\perp$ 上正定値として) なる $P(\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_n)) \geq 0$ $\sigma \in E \cap L_T^\perp$ であるから、前と同様にして $X \in \Delta$ に対しては $P(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ となつて、 $\mu_\phi(P(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n)) = m_{A_1, \dots, A_n}(P) \geq 0$ となる。故に positive で、 $\mu_\phi(1) = 1$ だから normalized である。

。次の証明のための準備として $\phi \in \text{子}$ ならば measure μ_ϕ は子上に集中している事を示す。

$\mathcal{F}_\alpha \equiv \{P \in E \cap L_T^\perp; \sup_{A \in \mathcal{O}_\alpha} \frac{P(A)}{\|A\|} = 1\}$ 、ここで $\sup$ は $\mathcal{O}_\alpha$ の self-adjoint なものだけに制限してもよい。 $\mathcal{B}_\alpha \equiv \{A \in \mathcal{O}_\alpha; A = A^*, \|A\| \leq 1\}$ $V_{m,\alpha} \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{B}_\alpha} \{P \in E \cap L_T^\perp; P(A) > 1 - \frac{1}{m}\}$ とすれば $\mathcal{F}_\alpha = \bigcap_{m \text{ 自然数}} V_{m,\alpha}$ となる。また $\text{子} = \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha (= \bigcap_m V_{m,\alpha})$ 。 $V_{m,\alpha}$ は開集合だから、共通部分の $\mathcal{F}_\alpha$ は可測である。

$\phi \in \mathcal{F}_\alpha$ とし、 $\mu_\phi = \mu' + \mu''$ のように $\mu_\phi \in V_{m,\alpha}$ 上にあるものと、 $E \cap L_T^\perp - V_{m,\alpha}$ 上にあるものとに分ける。 $\|\mu'\| + \|\mu''\| = \|\mu_\phi\| = 1$ が成り立つ。 $\forall A \in \mathcal{B}_\alpha$ に対し

$$\mu''(\hat{A}) \leq \|\mu''\|(1 - \frac{1}{m}) \text{ が成り立つから}$$

$$\phi(A) = \mu_\phi(\hat{A}) = \mu'(\hat{A}) + \mu''(\hat{A}) \leq \|\mu'\| + \|\mu''\|(1 - \frac{1}{m}) = 1 - \frac{1}{m} \|\mu''\|$$

A に関する $\sup$ とすれば $\|\mu''\| = 0$ でなくてはならぬ。故に μ_ϕ は $V_{m,\alpha}$ に集中している。 m 任意だから $\mathcal{F}_\alpha$ に集中していることになる。 $\phi \in \text{子}$ であれば μ_ϕ は子に集中していて、かつ子は可測である。

。 μ_ϕ は $\mathcal{E}(E \cap L_T^\perp) \cap \text{子}$ に集中している。

$\therefore P \in E \cap L_T^\perp$ に対して数列 $\{P(A_i)\}$ を考える。 $(\{A_i\}$ は条件 2 中にある $\mathcal{O}$ の実列。) これは $E \cap L_T^\perp$ から $\mathbb{R}^{\text{countable } \infty}$ への mapping だ。 $(\{A_i\}$ self-adjoint としてよい) これを π と書く。 π は連続で $K \equiv \pi(E \cap L_T^\perp)$ は compact である。 $\psi \in C(K)$ なる $\psi \circ \pi \in C(E \cap L_T^\perp)$ であるから、 $\nu_\phi(\psi) = \mu_\phi(\psi \circ \pi)$ により K 上の measure ν_ϕ を定義する。 $\pi\phi \in K$ 。 K における $\pi\phi$ の point measure を $\delta_{\pi\phi}$ とすると、 $f \in C(K)$ が linear なら $f \circ \pi \in C(E \cap L_T^\perp)$ も linear だから、

$$\nu_\phi(t) = \mu_\phi(t \circ \pi) = (t \circ \pi)(\phi) \quad \text{一方} \quad \delta_{\pi\phi}(t) = t(\pi\phi) = (t \circ \pi)(\phi) = \nu_\phi(t)$$

$\pi\phi$ は point measure だから $\psi \in C(K)$ が convex function であるならば $\nu_\phi \geq \delta_{\pi\phi}(\psi)$ 。

convex function $\psi \in C(K)$ に対し $\nu(\psi) \geq \delta_{\pi\phi}(\psi)$ となる他の ν_i があれば $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\nu' = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{\pi\phi_i}$ $\alpha_i > 0$ $\sum \alpha_i \pi\phi_i = \pi\phi$ $|\nu(\psi) - \nu'(\psi)| < \varepsilon$ なる ν' がとれる (脚注)。

$\phi_i \in K = \pi(E \cap L_1^\perp)$ より $\exists \phi_i \in E \cap L_1^\perp$ $\pi\phi_i = \pi\phi_i$ すると $\pi(\sum \alpha_i \phi_i) = \sum \alpha_i \pi\phi_i = \pi\phi$ ゆえに $\phi \in \mathcal{F}$ であるから $\{A\}$ で分離される。ie $\phi = \sum \alpha_i \phi_i$ 。 μ_ϕ の定義からわかるように、 μ_ϕ の特徴は ϕ に関する線形性 $\sum \alpha_i \mu_{\phi_i} = \mu_{\sum \alpha_i \phi_i} (= \mu_\phi)$ である。これに注意すれば、

$$\begin{aligned} \nu'(\psi) &= \sum \alpha_i \delta_{\pi\phi_i}(\psi) = \sum \alpha_i \psi(\pi\phi_i) = \sum \alpha_i (\psi \circ \pi)(\phi_i) = \sum \alpha_i \delta_{\phi_i}(\psi \circ \pi) \leq \sum \alpha_i \mu_{\phi_i}(\psi \circ \pi) \\ &= \mu_\phi(\psi \circ \pi) = \nu_\phi(\psi) \end{aligned}$$

故に $\nu_\phi(\psi) \geq \nu(\psi) - \varepsilon$ ε は任意だから $\nu_\phi \geq \nu(\psi)$ ν_ϕ はこの意味の order で maximal な measure である。 $K = \pi(E \cap L_1^\perp)$ は metrizable であるから ν_ϕ は $E(K)$ に集中してゐる (脚注)。 μ_ϕ は $\pi^{-1}E(K)$ に集中し、前項と合わせて $\pi^{-1}E(K) \cap \mathcal{F}$ に集中してゐる。 $\mathcal{F} \cap \pi^{-1}E(K) \subset E(E \cap L_1^\perp)$ を証明すれば終りである。

$\therefore \rho \in \mathcal{F} \cap \pi^{-1}E(K)$ $\rho = \lambda \rho_1 + (1-\lambda) \rho_2$ ($0 < \lambda < 1$) とすれば $E(K) \ni \pi\rho = \lambda \pi\rho_1 + (1-\lambda) \pi\rho_2$ 故に $\pi\rho = \pi\rho_1$ $\rho \in \mathcal{F}$ より $\rho = \rho_1$ $\therefore \rho \in E(E \cap L_1^\perp)$

• $\phi \in E(E \cap L_1^\perp)$ の元で分解する他の measure μ_ϕ があれば、 $\phi \in \mathcal{F}$ であるから前の証明から μ_ϕ も $\mathcal{F}$ に集中してゐる。 $\therefore$ 対応する K 上の measure ν_ϕ' は $E(K)$ に集中してゐる。 ie $\pi(\mathcal{F} \cap E(E \cap L_1^\perp)) \subset E(K)$ ($\because \sigma \in \pi(\mathcal{F} \cap E(E \cap L_1^\perp))$ $\sigma = \lambda \sigma_1 + (1-\lambda) \sigma_2$ とすれば $\sigma = \pi\rho$ $\sigma_1 = \pi\rho_1$ $\pi\rho = \pi(\lambda \rho_1 + (1-\lambda) \rho_2)$ $\rho \in E(E \cap L_1^\perp) \cap \mathcal{F}$ とする。 $\rho \in \mathcal{F}$ より $\rho = \lambda \rho_1 + (1-\lambda) \rho_2$ $\rho \in E(E \cap L_1^\perp)$ より $\rho = \rho_1$ 故に $\sigma = \sigma_1$ $\sigma \in E(K)$) 故に ν_ϕ' は maximal になる (脚注)。 ν_ϕ も maximal だから 任意の convex ψ に対して、 $\nu_\phi'(\psi) = \nu_\phi(\psi)$ 。 故に $\nu_\phi' = \nu_\phi$ 。 μ_ϕ', μ_ϕ は $\mathcal{F}$ に集中してゐるから $\mu_\phi' = \mu_\phi$ 。 QED.

(脚注) G. Choquet et P.A. Meyer Ann. Inst. Fourier 13 139 (1963)

• weakly clustering state の分類

定理 2 $T=R^n$ の場合 $\rho \in \mathcal{E}(E \cap L_T^\perp)$ に応ずる $(\mathcal{O}, T)$ の表現 ω は (U, U) とする。

この表現 ω は $\mathcal{O}$ のユニタリー表現であるから、そのスベクトル分解は、

$$U(x) = \sum_{p_n \in S_D} E(p_n) e^{ip_n \cdot x} + \int_{S_C} dE(p) e^{ip \cdot x}$$

S_D : 点スペクトル
 S_C : 連続スペクトル

となり、 $E(p_n)$ は $E(0)$ と同様に一次元で S_D は群をなす。即ち

$$p_n, p_m \in S_D \quad \text{ならば} \quad p_n + p_m \in S_D \quad -p_n \in S_D$$

証明略. [3] の Theorem 4

このことから、weakly clustering state を以下のように分類する。

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_D = \{0\} & \text{の場合} \quad E_I\text{-state} \\ S_D = \{R^n \text{ の格子点} \} & \quad \quad E_{II}\text{-state} \\ \text{それ以外} & \quad \quad E_{III}\text{-state} \end{array} \right.$$

§3 部分群の extremal invariant state への分解

前の定理で $\rho \in \mathcal{E}(E \cap L_T^\perp)$ を $\mathcal{E}(E \cap L_T^\perp)$ に属する状態に分解したが、 T の部分群 H を考えると $\rho \in \mathcal{E}(E \cap L_T^\perp)$ でも一般には $\rho \in \mathcal{E}(E \cap L_H^\perp)$ とはならないから、前と同様にこれに属する状態に分解される。

分解定理 II (定義 1. のもとで) $\mathcal{O}$ に単位元があるとする。 T の閉部分群

H があって、 $K \equiv T/H$ がコンパクトで K の上に T 不変な測度 dx が定義されて $\int_K dx = 1$ であるとする。そのとき $\rho \in \mathcal{E}(E \cap L_T^\perp)$ は $\mathcal{E}(E \cap L_H^\perp)$

に属する状態で分解できて、特にその形は

$$\rho(A) = \int_K dx \tilde{\rho}(A(x)) \quad \tilde{\rho} \in \mathcal{E}(E \cap L_H^\perp) \quad x \in \dot{x} \in K$$

となる。

注) $\tilde{\rho} \in \mathcal{E}(E \cap L_H^\perp)$ であるとは $\tau_x \tilde{\rho} \in \mathcal{E}(E \cap L_H^\perp)$ ($\tau_x \tilde{\rho}(A) \equiv \tilde{\rho}(A(x))$) になる。故に上の定理は $\rho = \int_K dx \tau_x \tilde{\rho}$ つまり ρ を $\mathcal{E}(E \cap L_H^\perp)$ の状態で分解したことを示している。

証明略. [4] の Theorem 1. あるいは予稿集を見よ。

ρ が E_1 -state のとき、部分群 T をすべての $\rho_n = S_0$ に対し $\rho_n \chi = 2\pi R$ (R : 整数) となるような χ の集合 T_L (これもやはり R^n の格子点になるから) に対しては、これに対しては S_0 に属する vector はすべて invariant になる。すると ρ を分解した時、その T_L -invariant state について考えてみる。まずこれに対応する T_L の表現 $\chi(T_L)$ があるが、 $\chi(T_L)$ の真スペクトルに属する vector は T_L -invariant vector しかあり得ない。(もしそうでないものがあれば、もとの ρ の S_0 の中に T_L -invariant でない vector ができてしまう。) またこれは $E(E \cap L_T^\perp)$ に属しているから T_L -invariant vector は一次元 (定理 1) である。故に ρ の成分となる $E(E \cap L_T^\perp)$ に属する state は T_L に関して E_1 -state。つまり E_1 -state は分解定理 II よりこのような state に分解できる。

分解定理 II においてもし $\rho \in E(E \cap L_T^\perp)$ がもてば $\rho \in E(E \cap L_T)$ であれば、分解の必要がない。故に下の同値関係により 分解の必要が全くない state として E_1 -state が特徴づけられる。

- i) 任意の T の部分群 H で T/H が compact なものに対して $\rho \in E(E \cap L_H^\perp)$
- ii) " Ω は唯一の invariant vector
- iii) ($T = R^n$ の場合) Ω は唯一の真スペクトルに属する vector (ie ρ は E_1 -state)
- iv) 定理 1 より i) $\Leftrightarrow$ ii). iii) $\Rightarrow$ ii) 明らか。 Ω 以外の固有ベクトルがあれば、 E_1 -state の分解と同様 H を適当にとって Ω を H -invariant にできる iii) $\Rightarrow$ iii)。

E_1 -state に対しては $(\psi | U(x) - E(0) | \psi) = \int_{S_c} e^{-i p x} (\psi | dE(p) | \psi) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ が strongly clustering の条件になるが、連続 measure $(\psi | dE(p) | \psi)$ の性質がよくわからないので 成り立たない。ここでは asymptotically abelian をすべて $E(0) \pi(\phi) E(0)$ abelian におきかえてだけ使ったが、補題 2 の証明 からわかるように weakly つまり平均した意味でしか asympt. abelian を使っていない。だから weakly clustering 以上のことは望み難いように思われる。