

周期的粗代替系について

岩手大 教育 中島文雄

ある経済体から n 種の財から成っているとし、それらの財を番号 $1, 2, \dots, n$ で表す、 $1 \leq i \leq n$ に対し、 i 財の時刻 t での価格を $p_i(t)$ とし、価格体系をベクトル $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ で表す。時刻 t 、価格ベクトル p の下での i 財の超過需要量を $F_i(t, p)$ で表す。

土て需要-供給の法則を数学的に定式化する。この際、ベクトル p の各成分 p_i はすべて正であることを、価格の意味として要請されるので、 p の属すべき集合 R^+ を

$$R^+ = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n; x_i > 0 \ (1 \leq i \leq n) \}$$

と置く。ここで R^n は n -次元ユークリッド空間を表し、 $x \in R^n$ に対し、 x_i はその i 成分を表す。 $x \in R^n$ に対し、 $x_i > 0 \ (1 \leq i \leq n)$ ならば、 $x > 0$ で表す。

需要-供給の法則を記述する方程式として

$$(1) \quad \frac{d}{dt} p_i = \lambda_i F_i(t, p) \quad (1 \leq i \leq n)$$

を考える. ここで $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は正の定数であり,

t は時刻, p は価格ベクトルである. $F(t, p) = (F_i(t, p))_{1 \leq i \leq n}$ は次の条件を満たしている:

(i) 周期 $\omega > 0$ が存在して

$$F(t + \omega, p) = F(t, p) \quad (\forall t \in \mathbb{R}^1, p \in \mathbb{R}^n)$$

(ii) $\mathbb{R}^n$ の any compact subset K に対して

定数 $L = L(K) > 0$ が存在して

$$|F(t, p) - F(t, q)| \leq L |p - q| \quad \text{for } p, q \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^1,$$

(iii) (相代替の仮定) $1 \leq i \leq n$ に対して

$$F_i(t, p) \leq F_i(t, q) \quad \text{for } p \leq q \text{ and } p_i = q_i.$$

(iv) (Walras' law)

$$\sum_{i=1}^n p_i F_i(t, p) = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R}^1, p \in \mathbb{R}^n)$$

ここで, $\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ であり, $p, q \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$p_i \leq q_i$ ($1 \leq i \leq n$) が成立すれば, $p \leq q$ と表す.

[注釈] (i) の周期性の意味について述べる。こゝまでの粗代替系では、需要と供給は時間依存せず、 $E(t, p) = E(p)$ であった。著者は、この依存性が存在する場合を扱い、特にこの依存性が周期的である場合を考えた。こゝは需要-供給に及ぼす季節の変化の影響を反映するものと考えた。この考えの是非について、研究集会の参加者より貴重な助言を頂いた。

$E(t, p)$ の例について述べる；

$$E_i(t, p) = \sum_{e=1}^n a_{ie}(t) p_e / p_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

こゝで $(a_{ie}(t))_{1 \leq i, e \leq n}$ は次の条件を満たすとする；

(1) $a_{ie}(t)$ は t の連続関数で、period ω の周期関数とする、

(2) $a_{ie}(t) > 0 \quad (i \neq e)$

(3) $\sum_{i=1}^n a_{ie}(t) = 0 \quad (1 \leq e \leq n),$

(2), (3) は各々、粗代替の仮定と Walras law を意味している。

定義 1. $p(t)$ を (1) の解とする。 $p(t)$ が compact ならば

定数 $\alpha > \beta > 0$ が存在して

$$\alpha \leq p_i(t) \leq \beta \quad (1 \leq i \leq n, t \in R')$$

が成立することである。

[注釈] 明らかに 有界な解は必ずしも compact ではない。

定義 2. $p(t) \in (1)$ の compact solution とする。 $p(t)$ を asymptotically periodic of period ω とは、ある periodic solution $z(t)$ of period ω が存在して

$$p(t) - z(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

となる事である。

[注釈]. 上の $p(t)$ の例は $\sin t + \frac{1}{t}$ である。

定理 System (1) に対して、any compact solution は asymptotically periodic of period ω である。

証明は (1) を見て下さい。

System (1) は、2次元の粗代替系を特殊なものとして含む。上の定理の結果を、2次元の粗代替系について述べる次の様になる：

Corollary 1. System (1) に対して、 $E(c, p)$ は時間 t に依存せず、 $E(c, p) = E(p)$ とする。この時、compact solution $p(t)$ が少くとも 1 つ存在するとは、均衡点 $\xi \in R^+$ が存在する。即ち $E(\xi) = 0$ となる。

証明 $E(t, p) = E(p)$ より, $E(t, p)$ は時刻 t について任意の period $\omega > 0$ を持つとして良し. 定理より compact solution (これを $p(t)$ とする) にはして, periodic solution $z(t)$ も存在して

$$p(t) - z(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$z(t + \omega) = z(t)$$

と取る. 今, ω は任意であるから, $z(t) = \text{constant}$ ($= \xi$ とする) と取る. 故に

$$E(\xi) = 0$$

Corollary 2. $E(t, p) = E(p)$ とする. $E(p)$ は homogeneous of order $m > 0$ とする. 則ち

$$E(\lambda p) = \lambda^m E(p) \quad \text{for } \lambda > 0 \text{ and } p \in \mathbb{R}^+.$$

もし, かつとそれ 1 の compact solution も存在すれば,

(1) のすべての solution は compact であり, かつ asymptotically constant と取る.

[注釈] 上の結果の under-line の部分は, global stability として知られている。これから global stability の発生のための十分条件では, 仮定の

compact solution は均衡点にあることとを要請しなくては
 いな。 Corollary 2 は、この要請が不要であることを示し
 ている。

Corollary 2 の証明 仮定より compact solution は
 存在するので、Corollary 1 より均衡点 $\bar{z} \in R^+$, $\bar{E}(\bar{z})=0$,
 は存在する。一対、粗代替の仮定より、 $p(t)$ と $q(t)$ は
 (1) の解で、 $p(0) \geq q(0)$ とすれば

$$p(t) \geq q(t) \quad \text{for } t \geq 0$$

が成立することを知っている。そこで、 $p(t)$ は任意の解、

とし、 $q(t) = \lambda \bar{z}$, $\lambda = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{p_i(0)}{\bar{z}_i}$ とすれば、
 $p(0) \geq \lambda \bar{z} = q(0)$ となる。

よって上の事より $p(t) \geq q(t) \geq \lambda \bar{z}$ となる。

他は、Walras' law より、

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_i^2(t)}{\lambda_i} = \text{constant}$$

が導かれる。よって $p(t)$ は compact となる。

以上より、任意の解は compact となり、更に Corollary 1
 より、asymptotically constant となる。

最後に $E(t, p)$ の周期性と季節の変化と解釈すると都合の
 よい点について述べる。今、定理より compact solution は
 十分時間が経過すれば、periodic solution $z(t)$ (period ω)
 に近づく。この $z(t)$ に対し

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} E_i(t, z(t)) dt &= \int_0^{\omega} \frac{1}{d_i} \frac{d}{dt} z_i(t) dt = \\ &= \frac{1}{d_i} \{ z_i(\omega) - z_i(0) \} = 0 \quad (1 \leq i \leq n), \end{aligned}$$

即ち
$$\int_0^{\omega} E(t, z(t)) dt = 0 \quad \text{と} \text{ なる。}$$

この式は、価格体系 $z(t)$ の下では、需要と供給は one-
 period に渡る総計として均衡していることを
 示している。

文献.

- [1] Periodic gross-substitute systems,
 F. Nakajima, SIAM Journal Applied Mathematics
 vol. 36, No. 3 (1979), p. 421 ~ 429.