

Homogeneity of pure state spaces and related problems

北大大学院理学研究科

岸本晶孝 (Akitaka Kishimoto)

東北学院大

境正一郎 (Shōichirō Sakai)

今日、 C^* 代数は数学、物理学、情報科学等の広範囲に
あたり有力な推論方法として使用されている。この現象は、
量子化の思想が諸科学に、さらに浸透すると共に益々顕著に
なるものと思われる。従って、 C^* 代数の研究に於いても、
より一層の深化が求められる。本講究録では C^* 代数の表現
論について新しい展開を示すこととする。

一般に表現論は既約表現を building blocks として進めら
れる。 C^* 代数の表現論に於いても、一般に表現を既約表現の
積分として表わすことにより、既約表現の研究に歸着させる
ことができる。しかし、I型でない C^* 代数では、積分方法
は一意でなくあるため厳密には歸着できるとはいえない。
従って、因子表現を building blocks として選択する方が当然
であるが、因子表現を調べることは可成り困難である。ここ
では、既約表現がどのように生成されるかを調べる。

A を C^* 代数とする。 A の純粋状態 $\varphi \in \Sigma$ とし、 GNS - 構成法により A の $*$ -表現 $\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$ をつくと、それは既約表現である。 逆に、 $\{\pi, \mathcal{H}\}$ を A の既約表現とすると、 $\mathcal{H}$ から任意の単位ベクトル ξ をとり $\varphi_\xi(x) = (\pi(x)\xi, \xi)$ ($x \in A$) と定義すると φ_ξ は純粋状態となり、 $\{\pi_{\varphi_\xi}, \mathcal{H}_{\varphi_\xi}\}$ は $\{\pi, \mathcal{H}\}$ と同値の表現になる。 従って、既約表現の研究は純粋状態の研究に帰することが出来る。 φ_1, φ_2 を 2 つの純粋状態とする。 このとき、 $\{\pi_{\varphi_1}, \mathcal{H}_{\varphi_1}\}$ と $\{\pi_{\varphi_2}, \mathcal{H}_{\varphi_2}\}$ が同値であるための必要十分条件は、 Kadison の Transitivity Theorem (cf. [7]) により、 A (A が単位元をもたないときは、 A に単位元 E を加えた C^* 代数 A_1) の中にユニタリ元 u が存在して、 $\varphi_2(x) = \varphi_1(u^*xu)$ ($x \in A$) とかける (即ち、 φ_1 と φ_2 は A の内自同型群の下で互いに transitive である) ことである。

さて、 φ を A の任意の純粋状態とし、表現 $\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$ を考える。 $I = \ker \pi_\varphi$ とすると、 $\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$ は C^* 代数 A/I の忠実な既約表現と考えられる。 簡単のために、 $I = (0)$ と仮定しよう。 とくに、 A が単純 C^* 代数ならば、すべての既約表現は忠実である。 $\alpha \in A$ 上の任意の $*$ -自己同型とし、 $\varphi^\alpha(x) = \varphi(\alpha(x))$ ($x \in A$) とおくと、 φ^α は A の忠実な純粋状態である。 この講究録では、次の問題を考える。

問題. $\varphi_1, \varphi_2 \in C^*$ 代数 A の 2 つの忠実な純粋状態とする。このとき, A 上に $*$ -自己同型 α が存在して,
 $\varphi_2 = \varphi_1^\alpha$ とかけるか?

この問題は, R. T. Powers [15] によって 1967 年に初めて研究され, UHF 代数について肯定的に解決された。その後, Bratteli [1], Bratteli-Kishimoto [8], Futamura-Kataoka-Kishimoto [11] によって多くの C^* 代数の class について肯定的に解決されてきた。とくに, Futamura-Kataoka-Kishimoto の論文には可成り広い範囲の C^* 代数に適用可能な重要な手法が示されている。

この講義録では彼等の手法を使って, すべての可分な nuclear C^* 代数について問題を肯定的に解決する。さらに, 可分な前双対空間をもつ II 型と III 型因子環については, Anderson の結果を使って問題が否定的であることを示す。

最後に, Futamura-Kataoka-Kishimoto の手法の一般性と Kadison の Transitivity の一般化 (cf. Theorem 1.21.6 in [7]) とを勘案して, 次の naive な予想を述べて講演を終了した。

予想. $A \in$ 可分な C^* 代数とする。このとき, 問題は肯定的である。

本研究集会の最終日に小沢登高氏により, Haagerup

[12] の中で得られた結果に若干の改良を加えることにより、
吾々の論文の手法はすべての可分 C^* 代数に適用可能である
ことが示された。即ち、次の定理が示された。

定理(岸本-小沢-境)。 A を可分な C^* 代数とする。
 A の 2 つの純粋状態 φ_1, φ_2 が $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$ をみたすならば、
 $\alpha \in \text{AIIn}(A)$ が存在して $\varphi_1^\alpha = \varphi_2$ とかける(ここで、
 $\text{AIIn}(A)$ は asymptotically inner な自己同型全体の作る
 $\text{Aut}(A)$ の正規部分群)。

この論文は Bulletin of Canadian Mathematical Society
に出版される。吾々の原論文は雑誌には出版されないが、
種々の有用な結果が含まれているので、全文と本講義録に集
録することにした。