

渦糸の変形の数値計算

東京農工大 教養 高木 隆司

§1. はしがき

完全流体中に一本の渦糸をおくと，それが曲率をもつときには自分自身が誘起する流れによって変形していく．この変形の様子は，Hama^{1) 2)}や Betchov³⁾らによって論じられ，渦糸が一平面上に乗ったまま回転していく場合や⁴⁾，形を変えず伝播していくソリトン型の波状変形の場合が⁵⁾ Hasimotoによって解析された．また，初期に正弦波状の渦糸が変形していく過程が Kambe⁶⁾によって振幅の3次の程度まで求められた．渦糸の変形を支配する方程式は，次の形で与えられる⁷⁾．渦糸上の流体粒子の位置を x で表わすと，

$$\dot{x} = \frac{Kc}{4\pi} b \log \frac{L}{\sigma} + \text{const.} \quad (1)$$

ここで， K は渦糸のまわりの循環， σ は渦糸の半径， c は曲率， b は陪法線ベクトル， L は点 x の付近で x に速度を誘起する際に参与する渦糸の長さである．2項目の定数は， $\sigma \rightarrow 0$ で有限の量であり， x から遠い渦糸の部分の参与である．渦糸

が自分自身と交叉するような場合を除くと, $L/\sigma \gg 1$ のとき (1) 式の第 2 項は無視できる. そのとき, 渦糸に沿った長さの座標 l を導入すると (1) 式は次のように書ける.

$$\dot{x} = A x_l \times x_{ll}, \quad A = \frac{\kappa}{4\pi} \log \frac{L}{\sigma}. \quad (2)$$

ただし, 下つき添字は微分を表わす. L と σ も時間的に変化する量であるが, その影響は $\log$ の中の変数であるから, 小さいと考えられるので, A は定数と仮定する.

(2) 式の厳密解としては, 上述した Hasimoto の得たものの他には有限振幅の spiral 状の変形, 渦輪などが知られている. 直線から無限小振幅の正弦波の形に変形した状態は, 全体が一平面上に乗ったままもとの直線のまわりに回輪するが, 有限振幅の場合には (2) 式が非線型方程式なので, 高調波の変形が生じる. この変化の様子も著者は数値計算によって調べたが, 計算のスキームに欠点があり必ずしも正確な結果とは言えなかった. ここでは, その点に改良を加え, さらに外から人為的に shear flow を加えた場合についても数値計算を行い, 解析的に予測される結果とくらべた.

この研究については次のような応用が可能である.

1. 乱流への遷移のメカニズムを調べるためのモデル: 渦糸は渦度が局所的に集中していて, その変形が非線形方程

式に従い、一見ランダムな変形をする点で乱流と似ている。粘性消散の効果がとり入れられてないが、それは σ を少しずつ大きくすることを考えればさらに改良される。また、乱流境界層に見られるバースト現象⁸⁾と共通点が多い。

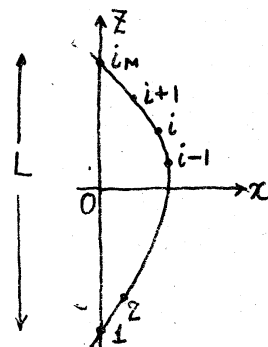
2. エルゴード性の考察：非調和力が存在する格子振動にはエルゴード性が見られないようであるが⁹⁾、同じようなことが渦糸の変形にも存在するか、もしそうならば、偶然化はどんなメカニズムで現れるか、という問題への応用。
3. たつまきの運動、量子乱流：適当な固体壁を導入すれば、たつまきの運動や、超流動液体内に現れる渦糸の乱れ（量子乱流¹⁰⁾）のメカニズムが解明できる。

§2. 計算のスキーム

初期に図1のような正弦波の形をもつ渦糸を考える。その半波長を L とする。長さを L/π 、時間を L^2/A で規格化すると、(2)は

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_e \times \mathcal{X}_{el} \quad (3)$$

となる。渦糸上に i_m の点を適当に定め（実際にはそれらの x 座標が等間隔になるようにとった）、それらの点が流体と



ともに運動していく様子を調べる。外から流れを与えてないときは、1番目と i 番目の点は渦糸の曲率がゼロの所に乗っているので不動である。

$i-1, i, i+1$ 番目の点の位置ベクトルをそれぞれ、 X_-, X_0, X_+ とすると

$$\left. \begin{aligned} X_{\pm} &= X_0 \pm X_e \cdot D_{\pm} + \frac{1}{2} X_{ee} D_{\pm}^2 + O(D_{\pm}^3), \\ D_{\pm} &= |X_{\pm} - X_0|. \end{aligned} \right\} (4)$$

そこで

$$X_e = aX_+ + bX_0 + cX_-, \quad X_{ee} = dX_+ + eX_0 + fX_- \quad (5)$$

として、(4)を使って $a \sim f$ を決めると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_e &= \frac{1}{D_+ D_- (D_+ + D_-)} \left\{ D_-^2 (X_+ - X_0) + D_+^2 (X_0 - X_-) \right\}, \\ X_{ee} &= \frac{1}{D_+ D_- (D_+ + D_-)} \left\{ 2D_- (X_+ - X_0) - 2D_+ (X_0 - X_-) \right\}. \end{aligned} \right\} (6)$$

そこで、(3)を差分方程式になおすと、 $n+1$ 番目の時間ステップでの X の値を (X^{n+1} と書く) を X^n から求める式は、

$$X_0^{n+1} = X_0^n + \Delta t \cdot F(X_0^n, X_+^n, X_-^n) \quad (7)$$

の形に書ける。ただし、(7)を直接使うと計算が不安定になるので、Runge-Kutta-Gill の方法で安定化する。

各時刻での渦糸の形 X_i^n が求まれば、その Fourier 成分の変化も求まる。渦糸が直線に近いとる方向への運動はわかであるから、 x 成分、 y 成分を Fourier 変換する。数値的

には次の台形公式を使う。

$$\begin{aligned} \int_m x &\equiv 2 \int_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{3\pi}{2m}} \cos mz \cdot x \, dz \\ &\rightarrow 2 \sum_{i=2}^N \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\pi}{2} mz_i \cdot x_i + \cos \frac{\pi}{2} mz_{i-1} \cdot x_{i-1} \right\} (z_i - z_{i-1}). \quad (8) \end{aligned}$$

3. 計算結果

図2は、 i_M の値の選び方によって、結果がどのように変わるかを示したものである。 T_1 , T_{3M} , T_{5M} は、それぞれ基底波が z 軸のまわりをひとまわりする時間、3倍波、5倍波が成長して最大の振幅になるまでの時間である。 $i_M = 17$ ととれば、5倍波まで考える限りほぼ満足であることがわかる (i_M を大きくすると時間がかかりすぎる)。以後 $i_M = 17$ と定める。

i_M を定めたあと、 ΔT がどこまで大きく取れるか試したところ、 $\Delta T = 0.4 \times 10^{-2}$ では不安定、 $\Delta T = 0.3 \times 10^{-2}$ では安定 (原点に因して上下対称性を保つ) になった。以後 $\Delta T = 0.25 \times 10^{-2}$ と定める。

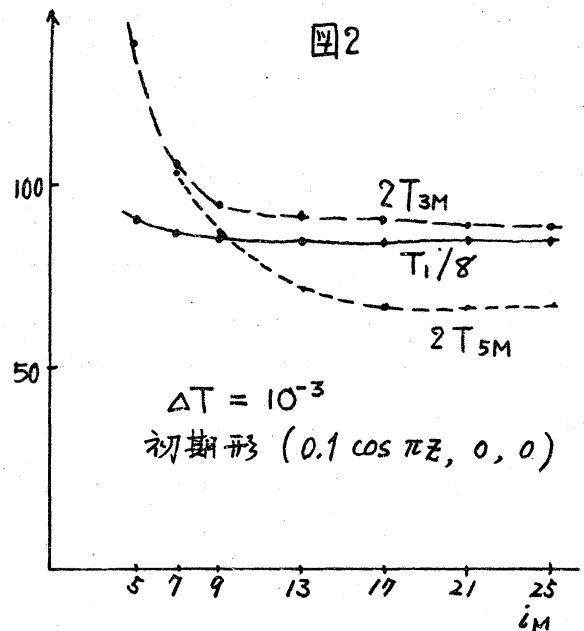


図3, 図4は, 初期に

$$X = (AMP, 0, 0) \cdot \cos \pi z \quad (9)$$

の形を与えたときの, その後の変化である. ただし, 上側は Fourier 成分の変化, 下側は渦糸の形の変化を表す. 横軸は ΔT を単位とした時間, すなわち $n \Delta T$ である. J_m は

$$J_m = \sqrt{(J_m X)_x^2 + (J_m X)_y^2} \quad (10)$$

で定義する. これらの図から, 振幅がかなり大きいにもかかわらず, 規則的に変化することがわかる. すなわち, 非線形性だけでは偶然化は起こりにくい.

図5は, 初期に

$$X = (AMP1, 0, 0) \cos \pi z + (AMP3, 0, 0) \cos 3\pi z \quad (11)$$

を与えたときの变化である. $AMP3$ の方が大きいので, 基底波が $\cos 3\pi z$ で, $\cos \pi z$ は *sub harmonics* と考えられる. (9) の場合に比べて乱れ方は大きい, やはり規則性は保たれているようである.

数値実験において偶然化がどのように起るかを考えてみる. 外から人為的に乱数を使って攪乱を与え, それが増大するかどうかを見る方法が考えられる. 一方, 計算機には必ず切り捨て誤差があり (現在の計算では 10^{-6} 程度), それが増大することもありうる. 一方, 一見乱れた変形のように見え

ても、実は、大きさの比が有理数にならない周期をもつ数個の時間変動の重ねあわせであったという可能性もある。そこで次のような判定基準をおく。(3)式も(9)あるいは(10)の初期条件のもとに(近似的にでも)解析的に解いてみて、数値計算の結果と合っていれば、乱れた変形は起っていない。さらに、これは現在の問題に特殊なことであるが、初期に偶数倍波がなければ、(3)式に基くかぎり、後にも偶数倍波は現れないので、数値計算の結果偶数倍波が現れたら乱れが生じたと考える。その際、乱れの種は計算機の切り捨て誤差により生じたと考えられる。

そこで(3)式の解析解を調べる。

§4. 解析解

渦糸に沿った長さ s を、 z 座標に変換する。

$$\frac{d}{ds} = \left| \frac{dx}{dz} \right|^{-1} \cdot \frac{d}{dz} = \mathcal{P}(z)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \quad (12)$$

z は、初期時刻に渦糸上の点につけた名前であるから、その点が z 方向に移動しても変らない。 $(x)_z$ と区別すべきである。ただし、 $\{x(z, t)\}_{z, t=0} \equiv z$ である。(3)式に従う変形は渦糸に沿う微小線分の長さを変えないので、 $\mathcal{P}(z)$ は時間に依らない。

(3)式は, (12)の变换によって

$$P(z) \dot{X} = X_z \times X_{zz} \quad (13)$$

となる. 解析を簡単にするために,

$$\left. \begin{aligned} W(z, t) &= [X(z, t)]_x + i[X(z, t)]_y, \\ Z(z, t) &= [X(z, t)]_z \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

とおくと, (13)より変形方程式は

$$\left. \begin{aligned} P \dot{W} &= i(Z' W'' - Z'' W'), \\ P \dot{Z} &= \text{Im}(\bar{W}' W'') \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$P = (1 + \bar{W}' W')_{t=0}^{3/2} \quad (16)$$

となる. ただし, prime は微分を表わし, bar は複素共役を表わす.

(15), (16)より, ラセンを表わす厳密解があることがわかる.

$$\left. \begin{aligned} W &= \varepsilon e^{i(\pi Z - \pi^2 \tau)}, \\ Z &= z + \varepsilon^2 \pi^3 \tau \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\tau \equiv t / (1 + \varepsilon^2 z^2)^{3/2} \quad (18)$$

非線型効果により時間のスケールが修正を受けている.

初期条件として次の形

$$W = \varepsilon f(z), \quad Z = z, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (19)$$

をとり, W, Z を ε で展開して解を求めよう.

$$\left. \begin{aligned} W &= \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \varepsilon^3 W_3 + \dots \\ Z &= z + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\mathcal{P} = \left\{ 1 + \varepsilon^2 \overline{W_1'} W_1' + \varepsilon^3 (\overline{W_1'} W_2' + W_1' \overline{W_2'}) + \dots \right\}^{3/2} \quad (21)$$

$O(\varepsilon)$ まで考えると, (15), (16) より

$$\dot{W}_1 = i W_1'', \quad \dot{Z}_1 = 0 \quad (22)$$

$$\therefore W_1 = \sum_n a_n e^{ik_n z - i k_n^2 t}, \quad \sum_n a_n e^{ik_n z} = f(z). \quad (23)$$

(23) は, 初期の形に含まれる各 Fourier 成分が固有の周波数で z 軸のまわりを回転することを意味する.

$O(\varepsilon^2)$ 以上の解については, 各々の例について求めた方が便利である. 初期条件が

$$W = 2\varepsilon \cos \pi z \quad (24)$$

で表わされる正弦波の場合については

$$\begin{aligned} W &= 2\varepsilon \cos \pi z \left(1 + \frac{3}{2} i \varepsilon^2 \pi^2 t \right) e^{-i \pi^2 t} \\ &\quad - \frac{3}{4} i \varepsilon^3 \pi^2 \cos 3\pi z e^{-5i t \pi^2} \sin 4\pi^2 t + O(\varepsilon^4) \\ &\equiv 2\varepsilon \cos \pi z e^{-i \pi^2 t / (1 + \varepsilon^2 \pi^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{3}{4} i \varepsilon^3 \pi^2 \cos 3\pi z e^{-5i t \pi^2} \sin 4\pi^2 t + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (25)$$

すなわち, t に比例する項を指数関数の形に書きなおしたとき, $O(\varepsilon^3)$ までの近似解は, 修正された周波数をもつ基底波と振幅が増減する 3 倍波の重ね合わせとなり, 図 3 の結果とよく記述している. さらに, $O(\varepsilon^5)$ まで求めるために,

$$\tau = t / (1 + \varepsilon^2)^{3/2}, \quad \delta^2 = \varepsilon^2 / (1 + \varepsilon^2) \quad (26)$$

とおくと, (15), (16) は

$$\left. \begin{aligned} \{1 + \delta^2(4\pi^2 \sin^2 \pi Z - 1)\}^{3/2} W_t &= i(Z'W'' - Z''W') \\ \{1 + \delta^2(4\pi^2 \sin^2 \pi Z - 1)\}^{3/2} Z_t &= \operatorname{Im}(\overline{W'} W'') \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる。そこで

$$\left. \begin{aligned} W &= \varepsilon \left\{ 2 \cos \pi Z e^{-i\pi^2 \tau} + \frac{3}{4} \pi^2 \delta^2 \cos 3\pi Z e^{-5i\pi^2 \tau} \sin 4\pi^2 \tau \right. \\ &\quad \left. + \delta^3 W_4 + \delta^4 W_5 + \dots \right\} \\ Z &= Z + \delta^4 Z_4 + \delta^5 Z_5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

と置いて, W_4, W_5, Z_4 を求めると,

$$W_4 \equiv 0,$$

$$Z_4 = \frac{9}{32} \pi^3 (\sin 4\pi Z - 2 \sin 2\pi Z) (\cos 8\pi^2 \tau - 1), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} W &= W_1 + \delta^2 W_3 + \delta^4 W_5 \\ &= 2 \cos \pi Z e^{-i\pi^2 \tau} \left\{ \left(1 - \frac{33}{32} i\pi^2 \tau \delta^4\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{27\pi^2}{16} \delta^4 (2e^{8i\pi^2 \tau} + e^{8i\pi^2 \tau} - 3) \right\} \\ &\quad + \frac{3}{8} \delta^2 \pi^2 \cos 3\pi Z \left\{ e^{-9i\pi^2 \tau} \left(1 + \frac{9}{2} i\pi^2 \tau \delta^2\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2 \pi^4}{16} (29 - 9e^{8i\pi^2 \tau} - 20e^{-8i\pi^2 \tau}) e^{-i\pi^2 \tau} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{16 \cdot 32} \delta^4 \pi^4 \cos 5\pi Z \left\{ -44 e^{-i\pi^2 \tau} - 108 e^{-9i\pi^2 \tau} \right. \\ &\quad \left. + 27 e^{7i\pi^2 \tau} + 125 e^{-25i\pi^2 \tau} \right\} \end{aligned}$$

ここで

$$\tau' = \frac{1 + \frac{33}{32} \delta^4 \pi^4}{(1 + \varepsilon^2 \pi^2)^{3/2}} t, \quad \tau'' = \frac{1 - \frac{1}{2} \delta^2 \pi^2}{(1 + \varepsilon^2 \pi^2)^{3/2}} t \quad (30)$$

を導入すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} W = & 2 \cos \pi z e^{-i\pi^2 \tau'} \left\{ 1 - \frac{27}{128} \delta^4 \pi^4 (3 \sin 4\pi^2 \tau' + i \cos 4\pi^2 \tau') \right. \\
& \left. + \frac{3}{8} \delta^2 \pi^2 \cos 3\pi z \left\{ -2i \sin \pi^2 \frac{9\tau'' - \tau'}{2} \cdot e^{-i \frac{9\tau'' + \tau'}{2} \pi^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\delta^2 \pi^2}{8} i \sin 4\pi^2 \tau' \left(\frac{e^{-i\pi^2 \tau'}}{1} (-11 \cos 4\pi^2 \tau' + 29i \sin 4\pi^2 \tau') \right) \right\} \right. \\
& \left. + \frac{\delta^4 \pi^4}{16 \cdot 32} \cos 5\pi z \left\{ \dots \right\} \right\} + O(\delta^6). \quad (31)
\end{aligned}$$

この式を見ると、基底波の旋回周期がさらに修正を受け、付加的な時間変動を伴っている。また3倍波については、振幅の増減や旋回周期が修正を受け、やはり付加的な増減を伴う。それから複雑な時間変動をする5倍波が現れている。これらの結果は、図4に見られるふるまいをよく記述していると考えられ、基底波や3倍波の旋回周期や増減の周期が簡単な整数比になっていないから、見かけ上はかなり乱れた時間変動になっている。しかしながら、常に(31)式で近似できるという意味で、いわゆる偶然化は起っていないと考えられる。

以上の結果から類推すると、かなり大きな振幅の変形についても、時間変化は規則的であり、乱れた変動のように見えるふるまいもその高次の項まで計算することにより説明することができるだろう。図5のような、初期に2つの Fourier 成分が存在する場合も同様であろう。

5. 外部流がある場合.

乱流と渦糸の集合と見なす場合, 渦糸は自分が誘起した流れ以外に他の渦糸によっても, あるいは遠くはなれた部分が生起した流れによっても変形する. それらの効果を取り入れるのは難しいので, それらを effective な単純な shear flow におきかえ, 外から shear flow がかけられたときの渦糸の変形を考えることにする.

この問題は, 境界層の遷移に見られる burst 現象にも応用できる. 境界層内に現れる渦度の集中した領域から次元性のために急激な変動をする現象は, 外部流の中での渦糸の変形というモデルを使って考えることができる.

まず簡単のために, shear rate が

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$$



図6 ($\alpha > 0$)

で表わされる外部流を考える.(図6).

すると, 渦糸の変形を支配する方程式は (15), (16) の代りに

$$\left. \begin{aligned} P(\dot{W} - \alpha W) &= i(Z'W'' - Z''W') \\ P(\dot{Z} + 2\alpha Z) &= \text{Im}(\bar{W}'W'') \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$P = (Z'^2 + \bar{W}'W')^{3/2} ; (Z, t \text{ の関数}) \quad (33)$$

となる. ここで, 変換

$$W \rightarrow e^{\alpha t} F, \quad Z \rightarrow e^{-2\alpha t} G, \quad (34)$$

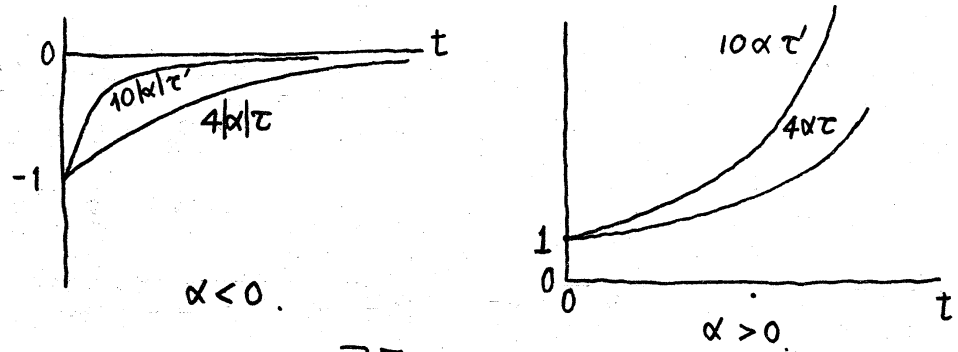
$$\frac{\partial}{\partial t} = e^{-4\alpha t} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = e^{-10\alpha t} \frac{\partial}{\partial \tau'}, \quad (35)$$

を導入すると, (32), (33) は

$$\left. \begin{aligned} Q F_{\tau} &= i(G'F'' - G''F'), \\ Q G_{\tau} &= \text{Im}(\bar{F}'F''), \end{aligned} \right\} (36)$$

$$Q = \{(4\alpha\tau)^{3/2} \bar{F}'F' + G'^2\}^{3/2}, \quad (37)$$

となる. τ, τ' と t の関係は図7の通りである.



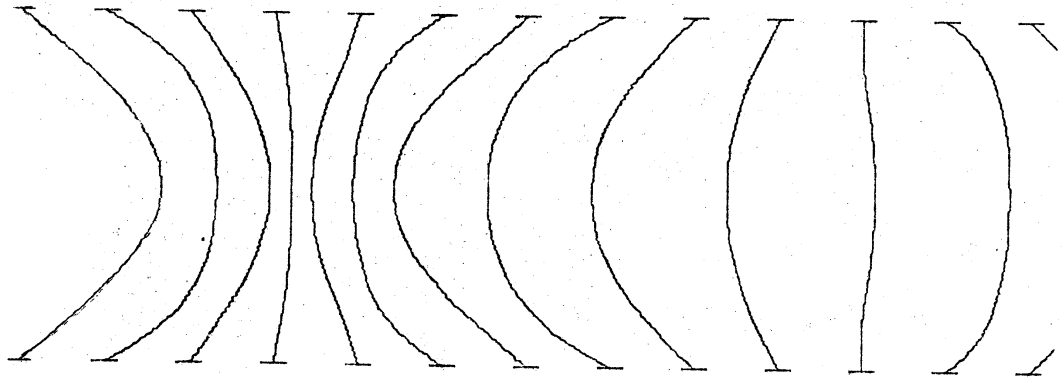
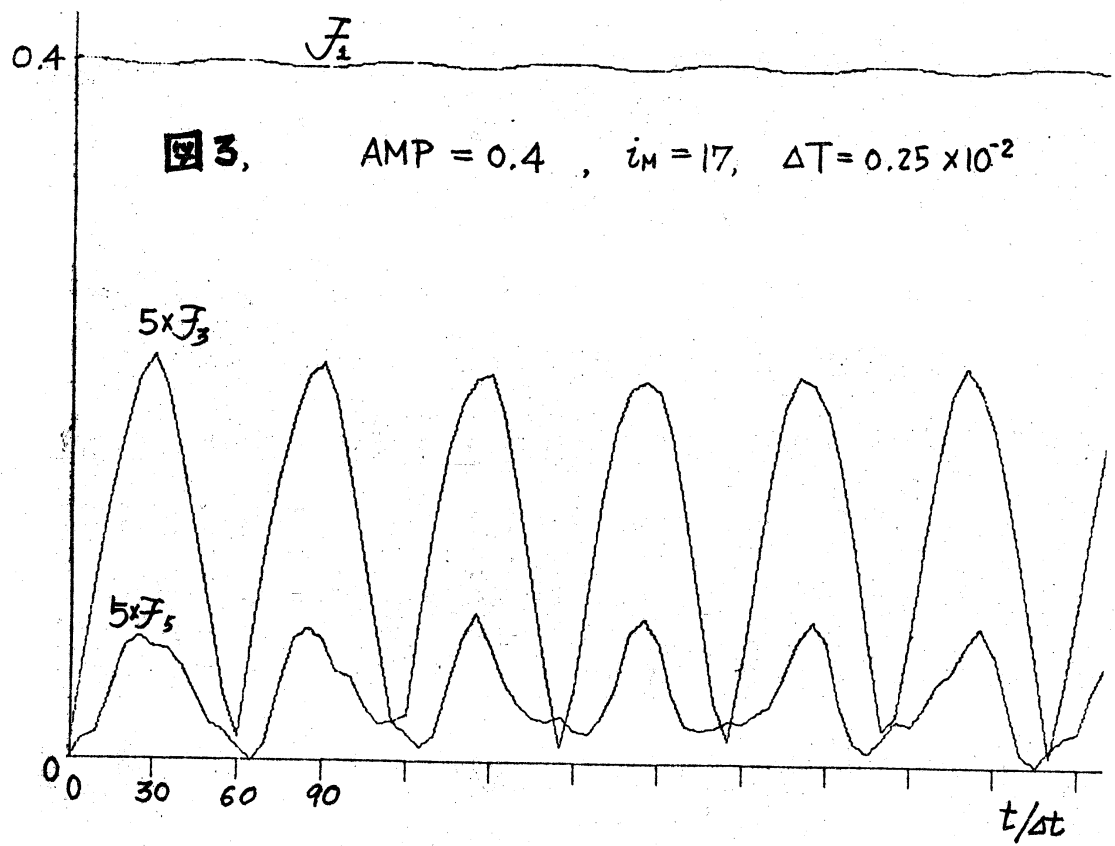
(36), (37) から予想されることは, $\alpha > 0$ の場合は $Q \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) となるので, F, G はだんだん時間変化をしなくなり, (34) からわかるように W, Z はただ外部流に引きのけられるだけになってくる, $\alpha < 0$ の場合は, $Q \rightarrow (G')^3$ になっていき, 時間・空間の scale が変わっていくような similar solution が得られる.

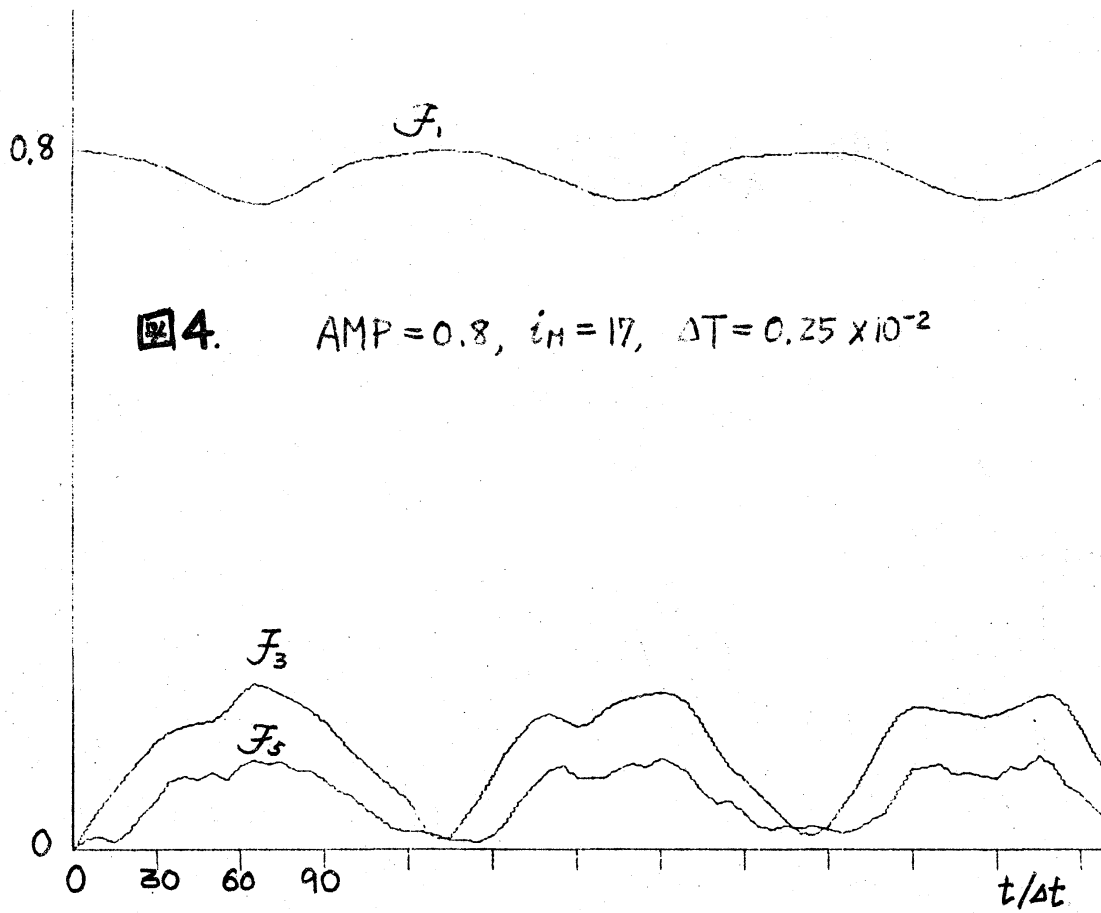
(32), (33) を数値的に解く場合を考えてみよう. 図7からわかるように, t を大きくしていくと, $\alpha < 0$ のときは τ, τ' の変化はゆっくりとなり, $\alpha > 0$ のときは急になるから, Δt

を一定に保つと、対応する Δt , $\Delta t'$ は, $\alpha < 0$ の場合は小さく, $\alpha > 0$ の場合は大きくなっていく. このことは, (36) (37) を変化していく Δt , $\Delta t'$ を使って数値的に解いていくことに対応するだろう. 一般に, 発展方程式の数値解は Δt が大きいとしばしば不安定であり, $\alpha > 0$ の場合の数値解は不安定であることが予想される.

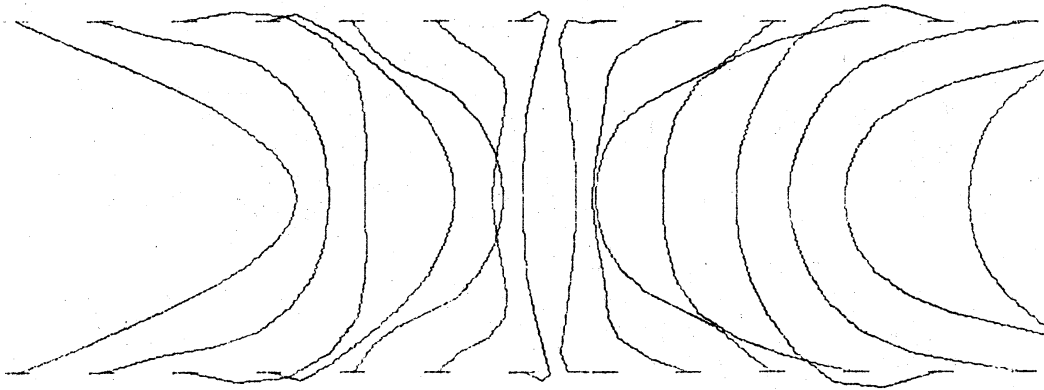
事実, 初期に $W = 0.2 \cos \pi z$ を与えたときの, その後の変形では, 基底波が一巡回したあたりからきわめて不規則になり, 各 Fourier 成分も不規則に変動している. 時間の 240 step 目くらいまでは, (37) 式の $\{ \}$ 内第 1 項が徐々に大きくなっていく過程を表わしていると考えられる. その内, 60 step までは, $\{ \}$ の内第 2 項が dominant であり, 第 1 項を通して非線型性が強くなっていき, 60 step 以後は第 1 項が dominant になってきて, 従来とは違ったタイプの方程式になる. 図には示していないが, 240 step のあたりで, 解析的には現れないはずの f_2 , f_3 が生じて f_1 , f_2 と同じ程度の大きさになっている. このことから, この場合の渦糸の変形には本質的な乱れが含まれていると考えられる.

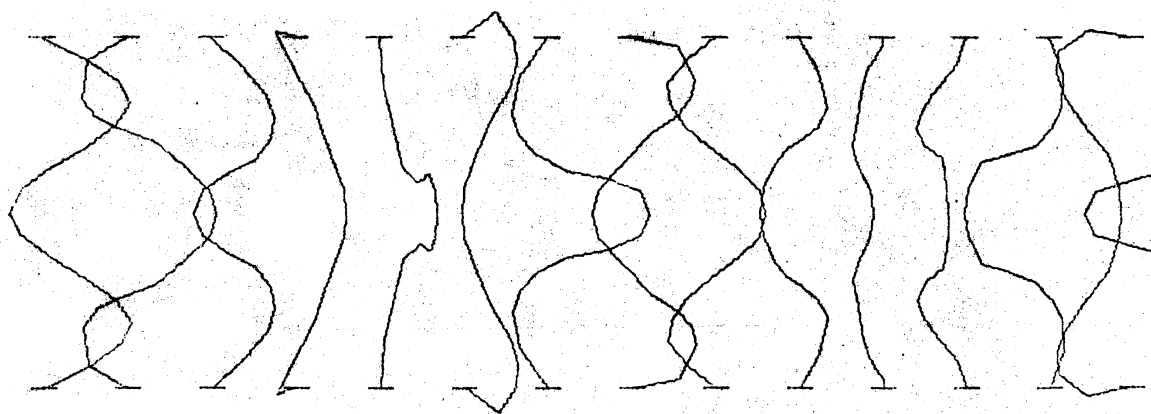
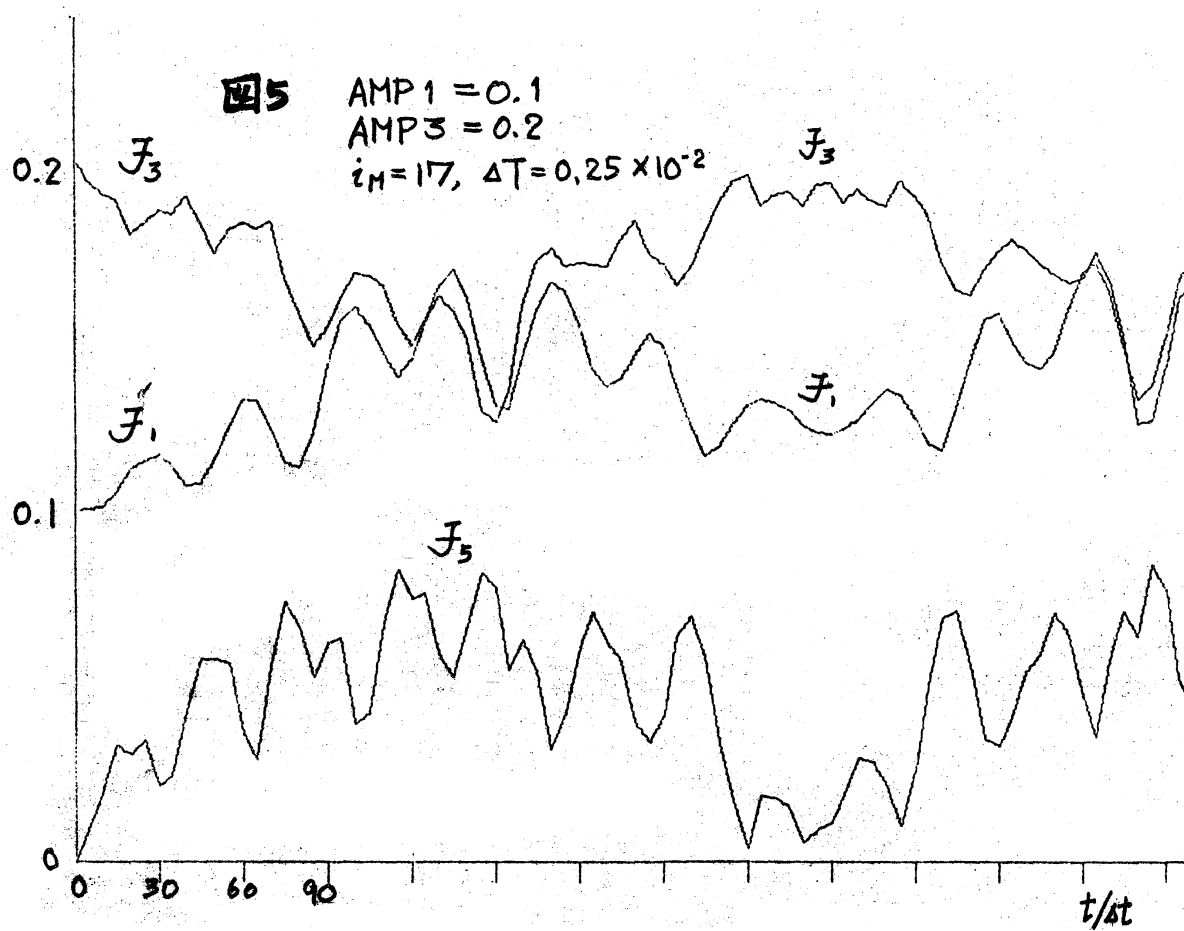
乱れの種として, 切り捨て誤差以外に積極的に乱数を入れてやる方法も考えられる. これは今後考えていく予定である.

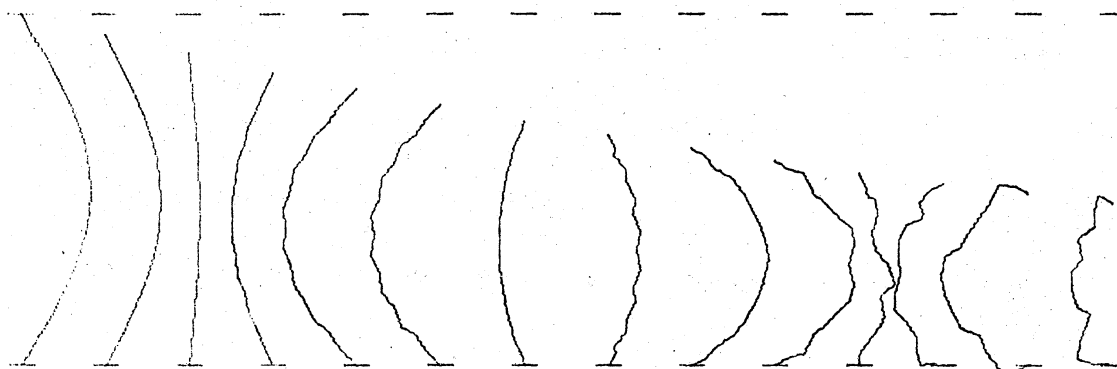
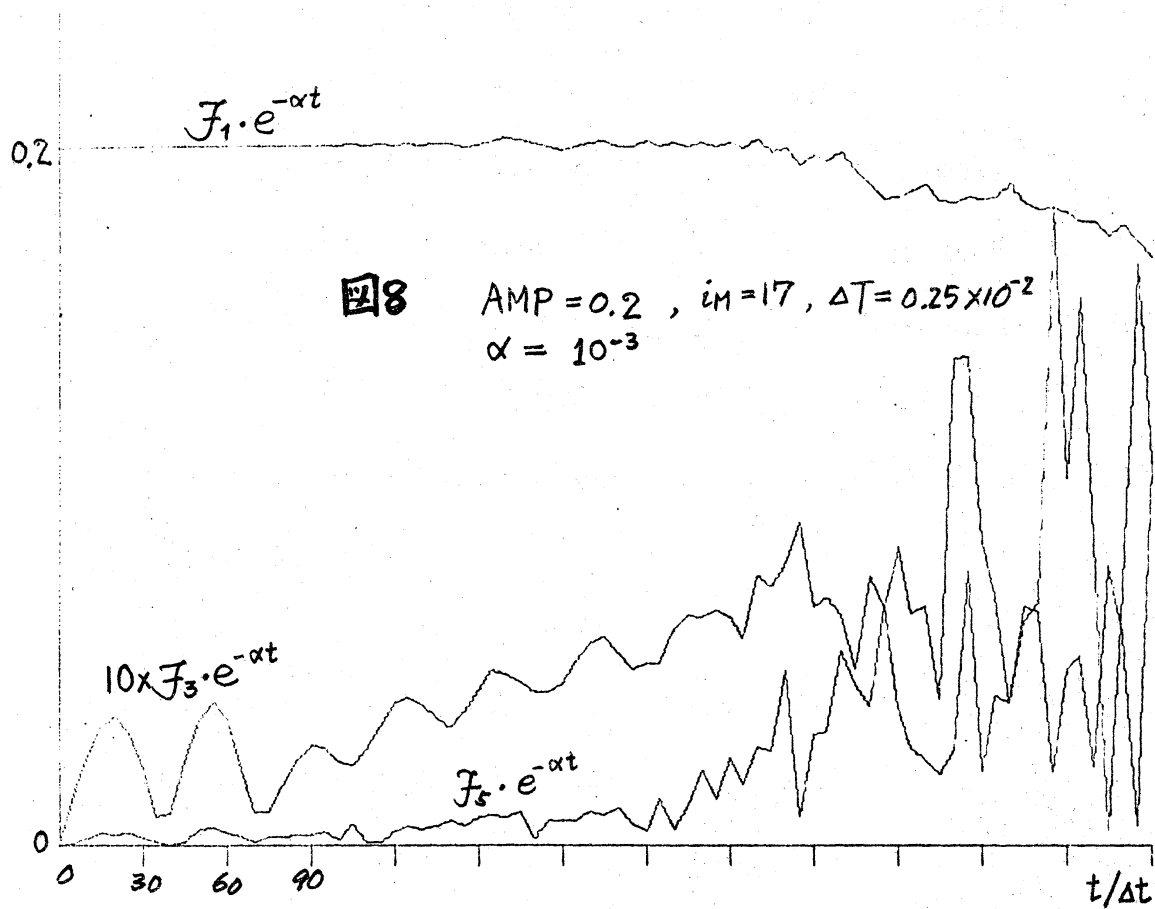




4. AMP = 0.8, $i_H = 17$, $\Delta T = 0.25 \times 10^{-2}$







- 1) F.R. Hama : *Phys. Fluids* 5 (1962) 1156.
- 2) F.R. Hama : *Phys. Fluids* 6 (1963) 526.
- 3) R. Betchov : *J. Fluid Mech.* 22 (1965) 471.
- 4) H. Hasimoto : *J. Phys. Soc. Japan* 31 (1971) 293.
- 5) H. Hasimoto : *J. Fluid Mech.* 51 (1972) 447.
- 6) T. Kambe : *数理研講完録* 163 (1972) 13.
- 7) G.K. Batchelor: *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge Univ. Press 1967) 507.
- 8) I. Tani : *Boundary-layer Transition*, *Annual Review of Fluid Mechanics* 1. (Annual Reviews, Inc. 1969) 169.
- 9) E. Fermi, J.R. Pasta and S.M. Ulam : *Collected Works of E. Fermi Vol II* (Univ. Chicago Press) p 978.
N.J. Zabusky & M.D. Kruskal : *Phys. Rev. Letters* 15 (1965) 240.
- 10) W.F. Vinen : *Vortex lines in liquid Helium II*, *Progress in Low Temperature Physics II* (North-Holland Pub. Comp. Amsterdam) 1.