

Flow の spectral subspace と その応用

山形 大理 富山 淳

§ 0. ヒルベルト空間上の強連続な one-parameter ユニタリー群 U_t が与えられたとき、それによって projection の測度 dP_s が存在して

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} dP_s$$

とかけると、Stone の定理の価値は、今と云う迄も、単に線型作用素の one-parameter 群が与えられる空間がヒルベルト空間でな場合もしばしばあることは事実である。従ってこの時にも適用出来る Stone の定理に代るものがあれば、当然非常に有力な方法になることが予想される。そこで projection の測度の代わりに、その元となる値域の部分空間をとりあげ、それがどの元の one-parameter 群を決定しているかを考えたのが spectral subspace の議論である。ここではその基本理論とその応用例を整理した形で紹介する。 ([1], [2], [6], [8])。この方法は現在特に非可換作用素環の同

対応の研究に盛んに応用されている。

§ 1 基本性質と定義

X を Banach 空間とし、 R を実数空間とする。 X 上に一様有界な線型作用素の one-parameter 群 A_t ($t \in R$) が与えられているとする。 $\forall x \in X \quad f \in L^1(R)$ に対して x と f との (一般化した) convolution $x \star_A f$ を

$$x \star_A f = \int_R A_t x f(t) dt$$

と定義する。

定義より $x \mapsto x \star f$ は X 上の有界な線型作用素であり、 $L^1(R)$ の中の普通の convolution $f \star g$ と次の意味で両立する。

$$x \star_A (f \star g) = (x \star_A f) \star g$$

以下混乱の妨げのないときは one-parameter 群 A_t を明記しないことにする。 $L^1(R)$ の ideal $J(x)$ を

$$J(x) = \{ f \in L^1(R) ; x \star f = 0 \}$$

定義 1.1. $J(x)$ の hull を x の spectrum とよび $sp_A(x)$ (又は単に $sp(x)$) とかく。 即ち

$$sp(x) = \{ t \in R ; \hat{f}(t) = 0 \quad \forall f \in J(x) \}.$$

但し $\hat{f}$ は f の Fourier 変換

$$\hat{f}(t) = \int_R f(s) e^{-ist} ds$$

定義から

補題 1.1. $f_\lambda \in L^1(R)$ の approximate identity とする

と、 $x * f_\lambda \rightarrow x \quad (\forall x \in X)$.

補題 1.2.

$$(1) \operatorname{sp}(x * f) \subset \operatorname{sp}(x) \quad (2) \operatorname{sp}(x * f) \subset \operatorname{supp} \hat{f}$$

$$(3) \hat{f} \text{ が } \operatorname{sp}(x) \text{ の近傍で } 0 \text{ ならば } x * f = 0$$

$$(4) \hat{f} \text{ が } \operatorname{sp}(x) \text{ の近傍で } 1 \text{ ならば } x * f = x$$

(3) は Fourier 変換が hull の近傍で 0 になるものを $L(R)$ の元は、 π の ideal に含まれるとこの結果のよみかえである。

(4) は (3) の結果。

補題 1.3.

$$(1) \operatorname{sp}(A_t x) \subset \operatorname{sp}(x) \quad (2) \operatorname{sp}(\lambda x) = \operatorname{sp}(x) \quad \lambda \neq 0$$

$$(3) \operatorname{sp}(x + y) \subset \operatorname{sp}(x) \cup \operatorname{sp}(y)$$

よって次の補題が成立する。

補題 1.4. E と R の閉集合とすると

$$M_A[E] = \{x \in X; \operatorname{sp}(x) \subseteq E\}$$

は X の A_t -invariant な閉部分空間である。

この $M_A[E]$ を $(A_t$ に対する) E についての spectral sub-space と呼ぶことにする。補題 1.1 より次のことが成立つ。

補題 1.5 $sp(x)$ が compact であるような元 x の集合は X で dense である。

$$-\infty \leq t \leq w \leq \infty \text{ について}$$

$$R[t, w] = \text{closed linear span } \{x * f \mid x \in X, f \in L^1(\mathbb{R}) \\ \text{supp } \hat{f} \subset (t, w)\}$$

$$I_0[t, w] = \{f \in L^1(\mathbb{R}); \hat{f} \text{ は } [t, w] \text{ の近傍で } 0\}$$

とすると, $M_A[t, w]$ について

$$\text{定理 1.6. } M_A[t, w] = \{x \in X; x * f = 0 \ \forall f \in I_0[t, w]\} \\ = \bigcap_n R[t - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n}]$$

証明. 左より順に E_1, E_2, E_3 とすると, 補題 1.2 の (3) より $E_1 \subset E_2$. $x \in E_2$ について $\varphi \in R[t - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n}]^\perp$ とすると, $f \in I_0[t, w]$ について $x * f = 0$ より $\langle x * f, \varphi \rangle = 0$.

$$\text{一方 } J = \{f \in L^1(\mathbb{R}); \text{supp } \hat{f} \subset (t - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n})\}$$

とすれば, $\forall g \in J; x * g \in R[t - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n}]$. よって

$$\langle x * g, \varphi \rangle = 0. \quad \text{前と合せて結局}$$

$$f \in J + I_0[t, w] \text{ について } \langle x * f, \varphi \rangle = 0.$$

$$\text{よって } \text{hull}(J + I_0[t, w]) \subset \text{hull } J \cap [t, w] = \emptyset$$

$$\therefore \overline{J + I_0[t, w]} = L^1(\mathbb{R}).$$

よって $\langle A_t x, \varphi \rangle = 0 \text{ a.e.}$ とする連続性から

$$\langle A_t x, \varphi \rangle = 0 \ \forall t. \quad \text{特に } \langle x, \varphi \rangle = 0$$

$$\text{よって } E_2 \subset R[t - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n}] \text{ かつ } \Rightarrow E_2 \subseteq E_3$$

最後に $\forall x \in E_3$ に対して $s \notin [t, w]$ かつ $s \notin \text{sp}(x)$ が容易に出るから $\text{sp}(x) \subseteq [t, w]$ i.e. $E_3 \subseteq E_1$.

X が特にヒルベルト空間のとき、その中の閉部分空間の one-parameter 減少列 $\{M_t\}$ が次の条件をみたせば、単位の分解とよび、 $X = \bigvee M_t$, $\bigwedge M_t = \{0\}$.

又 $M_t = \bigwedge_{s \leq t} M_s$ とおけると、 M_t は左に連続といふ。この時には X 上の有界線型作用素全体の環 $B(X)$ に R 上の projection-valued な Borel 測度 $P(E)$ が存在して

$$P_{[s, t)} X = M_s \ominus M_t, \quad P_R X = X$$

$P_{[s, \infty)} X = M_s$ とおくと、今この測度から one-parameter $U = \{U_t\}$ -群 $U_t = \int_R e^{-ist} dP_s$ をつくると、当然予想されるように

Proposition 1.7. R の閉集合 E に対して

$$M_U[E] = P_E X$$

証明には次の等式に留意すべし。

$$\forall f \in L^1(R)$$

$$x * f = \int_R \hat{f}(s) dP_s x = \int_E \hat{f}(s) dP_s x + \int_{E^c} \hat{f}(s) dP_s x$$

次に $\forall t \in R$ として U_t を one-parameter $U = \{U_t\}$ -群とす。

補題 1.8. $M_t = M_V[t, \infty)$ とおけば $\{M_t\}$ は左側連続な単位分解である。

証明は定義に従えばよい。

さてこの M_t より測度 P_E をつくることが出来る。結果 U_t が前述のように定義できるがこの U_t の spectral subspace は V_t のそれと一致している。そしてこのとき $V_t = U_t$ を主張しているのが Stone の定理である。ここでは次の節でこのことをもう少し一般の形で考えてみる。

§2. 三つの one-parameter 群にこの commutation theorem.

ϕ を R^3 上の有界連続関数としたとき ϕ の spectrum を通常のように定義する。即ち

$$J(\phi) = \{f \in L^1(R^3) : \phi * f = 0\}$$

$$sp(\phi) = J(\phi) \text{ の hull.}$$

Proposition 2.1. R^3 の集合 $G = \{(a, b, a+b)\}$

$$sp(\phi) \subset G \iff \phi(r, s, t) = \phi(r+u, s+u, t-u)$$

$$\text{証明. } T: R \rightarrow R^3 \text{ を } Tv = (v, v, -v)$$

$$\phi *_{\tau} f(P) \equiv \int_R \phi(P - Tv) f(v) dv \quad f \in L^1(R)$$

$$\text{又 } g \in L^1(R^3) \text{ に } \tau \text{ について}$$

$$g *_{\tau} f(P) \equiv \int_R g(P - Tv) f(v) dv$$

定義よりこの convolution と通常の convolution についで

$$(\phi *_T f) * g = \phi * (g *_T f)$$

ここで $g = (g', g'', g''')$ についで

$$\widehat{g *_T f}(s) = \widehat{g}(s) \widehat{f}(s' + s'' - s''') \quad (2.2)$$

今 $sp(\phi) \subset G$ とする。 $\widehat{f}$ が 0 の近傍で 0 となるとすると、
 $\widehat{g *_T f}$ は $sp(\phi)$ の近傍で 0 となる。 よって補題 1.2 の (3) から

$$g *_T f \in J(\phi) \Rightarrow (\phi *_T f) * g = 0 \quad \forall g \in L^1(K^3)$$

よって $\phi *_T f = 0$ で結局この式は $\widehat{f}(0) = 0$ となる任意の $f \in L^1(K)$ についで成立するとになる。 このことから容易に

$$\phi *_T f = \phi \cdot \int_K f(v) dv$$

よって

$$\int_K (\phi(p - Tv) - \phi(p)) f(v) dv = 0 \quad \forall f \in L^1(K)$$

$$\therefore \phi(p - Tv) = \phi(p) \quad \text{a. e.}$$

ϕ の連続性より $\phi(p - Tv) = \phi(p) \quad \forall v$.

逆は容易である。

$A_t, B_t : X$ 上の一対有界連続な線型作用素の one-parameter 群

$T_t : Y$ の Banach 空間 Y 上の one-parameter 群.

$L : Y \rightarrow B(X)$ への有界線型写像

補題 2.2. $\varphi \in X^*$ についで

$$\phi(r, s, t) = \langle B_t L(T_r y) A_s x, y \rangle \quad \text{と置く}$$

$$B_t L(y) = L(T_t y) A_t \iff \phi(r, s, t) = \phi(r+v, s+v, t-v)$$

証明 略.

よくで目標とするわけ次の結果である.

定理 2.3. 上の設定で commutation relation

$$B_t L(y) = L(T_t y) A_t \quad \forall y \in Y, t \in \mathbb{R}$$

が成立つための必要十分条件は次の spectral subspace 12.7

での条件がみたされることである;

$$\begin{aligned} sp_T(y) &\subset (a, \infty) \\ sp_A(x) &\subset (b, \infty) \end{aligned} \implies sp_B(L(y)x) \subset (a+b, \infty)$$

且つ

$$\begin{aligned} sp_T(y) &\subset (-\infty, a) \\ sp_A(x) &\subset (-\infty, b) \end{aligned} \implies sp_B(L(y)x) \subset (-\infty, a+b)$$

このことは $M_T[E]$, $M_A[E]$, $M_B[E]$ を用いて表わすことができる.

証明. $\phi(r, s, t) = \langle B_t L(T_r y) A_s x, y \rangle$ とおいて今題

2.1 の形で証明する.

$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ $a+b \neq c$ とする. $a+b < c$ のときは

ε $a+b+\varepsilon < c$ とする正数とする. $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ と

$$\hat{f} = 0 \quad \text{on } (-\infty, -a-\varepsilon)$$

$$\hat{g} = 0 \quad \text{on } (-\infty, -b-\varepsilon)$$

$$\hat{h} = 0 \quad \text{on} \quad (-a-b-4\varepsilon, \infty)$$

ととる。 こととす

$$\text{sp}_T(y * f) \subset \text{supp } \hat{f} \subset (-a-2\varepsilon, \infty)$$

$$\text{sp}_A(x * g) \subset \text{supp } \hat{g} \subset (-b-2\varepsilon, \infty)$$

よって spectral condition を満足するから

$$\text{sp}_B(L(y * f)x * g) \subset (-a-b-4\varepsilon, \infty)$$

補題 1.2 の (3) より

$$[L(y * f)x * g] * h = 0$$

よって $\forall \varphi \in X^*$ に対して

$$0 = \langle [L(y * f)x * g] * h, \varphi \rangle$$

$$= \iiint f(r)g(s)h(t) \langle B_t L(Tr)A_s x, \varphi \rangle dr ds dt$$

$$= \phi * k(0, 0, 0) \quad \text{但し } k(r, s, t) = f(-r)g(-s)h(-t)$$

f, g, h の translation をとって support の条件は変うから、上式から任意の r, s, t に対して

$$\phi * k(r, s, t) = 0 \quad \text{i.e. } k \in J(\phi).$$

そこで f, g, h を $\hat{f}(-a) = \hat{g}(-b) = \hat{h}(-c) = 1$ ととる。

$$(a, b, c) \notin \text{sp}(\phi) \quad |$$

$a+b > c$ のときと同様に、よって $\text{sp}(\phi) \subset G$.

逆に $\text{sp}(\phi) \subset G$ とする。

$$\text{sp}_T(y) \subset (a, \infty) \quad \text{sp}_A(x) \subset (b, \infty)$$

又 $f, g \in \text{compact}$ である

$$\exists \varepsilon > 0, d; \quad \text{sp}(f) \subset (a+2\varepsilon, d) \quad \text{sp}(g) \subset (b+2\varepsilon, d)$$

今 $\hat{f} = 1$ on $(a+2\varepsilon, d)$ $\hat{g} = 1$ on $(b+2\varepsilon, d)$ である
 3.2 の (4) より

$$y * f = y, \quad x * g = x$$

$$\therefore \langle [L(y)x] * h, \varphi \rangle = \varphi * h(0, 0, 0)$$

$$\text{更に} \quad \begin{aligned} \hat{f} &= 0 \quad \text{on} \quad (-\infty, a+\varepsilon) & \hat{g} &= 0 \quad \text{on} \quad (-\infty, b+\varepsilon) \\ \hat{h} &= 0 \quad \text{on} \quad (a+b+\varepsilon, \infty) \end{aligned}$$

よって $t < r+s+\varepsilon$ のとき

$$\hat{h}(r, s, t) = \hat{f}(-r)\hat{g}(-s)\hat{h}(-t) = 0$$

$$\text{一方} \quad \Gamma \subset \{(a, b, c) \mid c < a+b+\varepsilon\}$$

$$\therefore \text{sp}(\varphi) \subset \text{Int. } \hat{h}^{-1}(0).$$

よって 1.2 の (2) より (と同様にして)

$$\varphi * h = 0 \quad \text{よって}$$

$$\varphi * h(0, 0, 0) = \langle [L(y)x] * h, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi$$

したがって $h \in J(L(y)x)$. $(\leq a+b$ のとき $\hat{h}(c) = 1$ である

から $c \notin \text{sp}(L(y)x)$.)

$$\text{sp}(L(y)x) \subset (a+b, \infty)$$

一般の case は $L^1(\mathbb{R})$ の approximate identity の Fourier 変換の support が compact であることと $\hat{h}$ と convolution をとって前記の場合に帰着させる。 $(-\infty, a)$ について

同様に議論出来る。証了。

Proposition 2.4. $B_t L(y) = L(T_t y) A_t$.

このとき L が 1 対 1 写像をう

$$L(y) M_A[b, \infty) \subseteq M_B[a+b, \infty) \quad \forall b \Rightarrow y \in M_T[a, \infty)$$

$$\text{又 } L(y) M_A[-\infty, b] \subseteq M_B[-\infty, a+b] \quad \forall b \Rightarrow y \in M_T[-\infty, a]$$

証明. $\forall f \in I_0[a, \infty)$ により $y * f = 0$ となる。

$$g \in L^1(\mathbb{R}), \operatorname{supp} \hat{g} \subset [0, \infty) \quad g_0(w) \equiv e^{ibw} g(w) \quad \text{とす}$$

$$\text{よして } \operatorname{supp} \hat{g}_0 \subset [b, \infty). \quad \text{よして } x_b = x_A * g_0 \quad \text{は}$$

$$M_A[b, \infty) \text{ の元で } L(y) x_b \in M_B[a+b, \infty)$$

$$\text{よして } h(w) \equiv e^{ibw} f(w) \quad \text{とすると}$$

$$\hat{h} = 0 \quad ; \quad [a+b, \infty) \text{ のある近傍で.}$$

$$\Rightarrow [L(y) x_b] * h = 0$$

$$\forall \varphi \in X^* \quad \text{により}$$

$$0 = \langle [L(y) x_b] * h, \varphi \rangle$$

$$= \int e^{ib+t} f(t) \langle L(T_t y) A_t x_b, \varphi \rangle dt$$

$$= \iint e^{i(b+s)} f(t) g(s) \langle L(T_t y) A_{t+s} x, \varphi \rangle dt ds$$

$$= \iint e^{ibw} f(t) g(u-t) \langle L(T_t y) A_u x, \varphi \rangle dt du$$

$$= \int e^{ibw} h(w) dw \quad \forall b$$

但し

$$h(u) = \int f(t) g(u-t) \langle L(T_t y) A_u x, \varphi \rangle dt$$

で h は u の連続関数。

上式は h の Four. 変換が 0 を意味し、従って $h = 0$ a.e.

よって h は "1" なる f のみで得られ

$$h(0) = \int f(t) g(-t) \langle L(T_t y) x, \varphi \rangle dt = 0.$$

上のことは g の任意の translation h に対して成立するから、

$$\int f(t) g(u-t) \langle L(T_t y) x, \varphi \rangle dt = k * g(u) = 0$$

$$k(t) = f(t) \langle L(T_t y) x, \varphi \rangle.$$

従って $\widehat{k * g} = \widehat{k} \widehat{g} = 0.$

よって $\widehat{k} = 0$ on $[0, \infty)$. 特に

$$\widehat{k}(0) = \int f(t) \langle L(T_t y) x, \varphi \rangle dt$$

$$= \langle L(y * f) x, \varphi \rangle = 0.$$

$$\therefore L(y * f) = 0 \implies y * f = 0.$$

定理 1.6 から $y \in M_T(a, \infty)$.

他のときも同様に出来る。

補題 2.5. $A_t x = x \quad \forall t \iff \text{sp}_A(x) = \{0\}$

証明 略

以上から spectral subspace は one-parameter 群と一

意にきめることがきえる。

定理 2.6. Spectral subspace が一致すれば one-parameter 群は相等しい。

証明. A_t, B_t が与えられたとする. $B(X)$ 上で

$$T_t(A) = B_t A A_t^{-1} \quad \text{L: Identity map}$$

とすると, 2.4 から X 上の identity operator は $M_T[0, \infty)$ 及び $M_T[-\infty, 0]$ の元になる. よって

$$\text{id} \in M_T[0] \implies T_t(\text{id}) = \text{id}. \quad (2.5 \text{ より})$$

これは $A_t = B_t$ を示している。

§3. 応用例 1. Quasi-invariant measure.

円周上のよく知られた F & M. Riesz の定理

" analytic な測度は Lebesgue 測度と同値である "

は又

" analytic な測度は回転について quasi-invariant "

と云うことが出来る. そこで analytic な測度という概念は前記の spectrum を使えば自然に, かつ一般的な状況に拡大出来るから, 上の命題も又そのような状況で与えることが可能になる. ここではこれについて Forelli [6] の結果をのべる.

S を locally compact Hausdorff 空間とし

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow T_t \text{ on } S$$

S 上の homeomorphism への表現とする。

λ : S の有限 Baire 測度 $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$(\lambda * f)(E) \equiv \int_{\mathbb{R}} \lambda(T_{-t}E) f(t) dt$$

で convolution $\lambda * f$ を定義し、これにより $sp(\lambda)$ もあつて
に定義する。 $sp(\lambda) \subset [0, \infty)$ の時 λ を analytic と呼ぶ
ことにする。 この定義は円周上で T_t を

$$T_t(e^{ix}) = e^{it} e^{ix}$$

としたとき、古典的 analytic measure の定義と一致して
いる。 $C_0(S)$ を S 上の ∞ で 0 に連続関数環とし、 T_t は更に
 $C_0(S)$ 上に自然に作用する。 ($T_t f(p) = f(T_{-t}p)$)

T_t は $C_0(S)$ 上の有限強連続な線型作用素の one-parameter
群である。

定理 3.1. 正の測度 μ が T_t について quasi-invariant
であることは次のことと同値である。

(1) $\exists U_t$: one-parameter unitary 群 on $L^2(\mu)$

$$U_t(fg) = T_t f U_t g \quad f \in C_0(S) \quad g \in L^2(\mu)$$

又は

(2) $L^2(\mu)$ 内に単位分解 $\{M_t\}$ があつて

$$\forall f \in C_0(S) \quad sp(f) \subset (s, \infty) \Rightarrow f M_t \subseteq M_{s+t}$$

証明. quasi-invariant と (1) が同値なことはよくある
characterization であるから詳細は略する。 unitary 群は

$$\phi_t = \frac{dT_t \mu}{d\mu} \quad (\text{但し } T_t \mu(E) = \mu(T_t E)) \quad \text{としたとき}$$

$$U_t g = \sqrt{\phi_t} T_t g$$

で与えられる。

$$(1) \Rightarrow (2) \quad M_t = \{x \in L^2(\mu) ; \operatorname{sp}_U(x) \subset [t, \infty)\} = M_U(t, \infty)$$

とすれば 1.8 から 2.4 は左側連続と単位分解 更に 2.3.

$$\text{で } X = L^2(\mu), \quad A_t = B_t = U_t \quad Y = C_0(S)$$

$L: C_0(S)$ の $L^2(\mu)$ 上への ~~線形~~ 積作用素としての表現

をとると (1) の式は

$$U_t L(f) g = L(T_t f) U_t g$$

となるから、spectral condition の (2) の条件は成り立つ。

(2) $\Rightarrow$ (1). M_t に必要なら $\bar{M}_t = \bigcap_{s < t} M_s$ でありかゝる必要の条件はみたさなくてはならぬ。最初から左側連続としてやる。

$P_E \in M_t$ として P_E の spectral measure とし

$$U_t = \int e^{-ist} dP_s$$

と置く。 (1) の式を導くにはあと同様に与えること、更に 2.3 の

spectral condition をたしかめればよいことになる。 (a, ∞)

区間に " " しては (2) の条件が成り立ち、又 $(-\infty, a)$ 区間に " " しては

$$\operatorname{sp}_T(\bar{f}) = -\operatorname{sp}_T(f)$$

に着目して (a, ∞) の場合にのみかゝればよい。

補題 3.2. λ : analytic 測度 2 つとき

$$\forall g \in C_0(S) \quad \text{sp}_T(g) \subset (0, \infty) \quad \text{for } \tau > 0$$

$$\int g d\lambda = 0$$

証明. $\phi_t \equiv \int_S T_t g d\lambda$ とおく. $\phi(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の有限連続関数. 今 $r \notin \text{sp}(\lambda)$ とする.

$$\exists f \in J(\lambda); \hat{f}(r) = 1$$

$$\begin{aligned} \int g d(\lambda * f) &= \iint T_{-t} g f(t) d\lambda dt \\ &= \int \phi(-t) f(t) dt = 0 \end{aligned}$$

$J(\lambda)$ は translation で不変だから, 上式は

$$\int \phi(-t) f(s+t) dt = 0 \quad \forall s$$

$\delta > \tau$

$$\int f(t) \phi(s-t) dt = \phi * f(s) = 0$$

$\phi * f = 0$, $f \in J(\phi)$. 故に $r \notin \text{sp}(\phi)$.

又 $r \notin -\text{sp}(\delta)$ とする.

$$\exists f \in J(\delta); \hat{f}(-r) = 1$$

$$0 = \int g * f d\lambda = \iint T_t g f(t) d\lambda dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) f(t) dt.$$

前と同様にして

$$\int \phi(t) f(t-s) dt = \phi * f^*(s) = 0 \quad \text{但し } f^*(t) = f(-t).$$

$$\therefore \text{よって } f^* \in J(\phi); \hat{f}^*(r) = \hat{f}(-r) = 1$$

以上から $sp(\phi) \subset -sp_T(g) \cap sp(\lambda) = \phi$ (空集合)
 より $\phi = 0$ 特異に $\phi(0) = \int g d\lambda = 0$.

定理 3.3. Analytic な測度は T_t により quasi-invariant である.

証明: 3.1 の (2) が成り立つことと $\mu = |\lambda|$ により 3.3.

$$M_t \equiv L^2\text{-closure } \{g \in C_0(S) : sp_T(g) \subset (t, \infty)\}$$

$g \in C_0(S)$ として $sp_T(g)$ が compact であるならば VM_t に入るから、より $VM_t = L^2(\mu)$.

又 2.3 として $X = Y = C_0(S)$ $A_t = B_t = T_t = \text{given } T_t$
 $L(f)$: 積作用素.

とすると commutation relation は成り立っているから

$$\begin{aligned} sp_T(f) &\subset (s, \infty) \\ sp_T(g) &\subset (t, \infty) \implies sp(fg) \subset (s+t, \infty) \end{aligned}$$

$$\text{より } fM_t \subseteq M_{s+t}.$$

次に $h \in \Lambda M_t$ にとる. $sp_T(h) \subset (-t, \infty)$ $f \in C_0(S)$ $sp_T(f) \subset (s, \infty)$

より $g \in C_0(S)$ にとる $sp_T(g) \subset (-s, \infty)$ とすると

$$sp(fg) \subset (0, \infty)$$

より前の補題から $\phi = \frac{d\lambda}{d\mu}$ として

$$\int fg \phi d\mu = \int fg d\lambda = 0$$

ところで $h \in M_{-S}$ から h は ± 1 の g で近似できる。

$$\int f h \phi d\mu = 0.$$

従って上式は補題 1.5 より任意の $f \in C_0(S)$ について成立つ。

$$\text{よって} \quad h\phi = 0 \quad \text{a.e. } \mu$$

$$|\phi| = 1 \quad \text{a.e. } \mu \quad \text{よって} \quad h = 0 \quad \text{証明了。}$$

§4. 作用素環への応用.

von Neumann 代数における derivation が常に inner であるという境 [] の定理は、その後いくつかの別証明が出てくるが、どれも構成的ではなかった。しかし Arveson [] は spectral subspace の議論を用いて実際に generator を構成することにより上の結果を示し、現在ではこれがもっとも標準的な証明と考えられている。ここでは、それを更に一般化した D. Olsen [] の結果を、定理 2.3 を用いて簡略化した証明で与えることにする。

ヒルベルト空間 H 上の有界線型作用素環 $B(H)$ 内の、ノルムで closed な自己共轭環 ($a \in \mathcal{A} \Rightarrow a^* \in \mathcal{A}$) を C^* -代数とす。これは又抽象的に、Banach $*$ -代数で、ノルムが

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \text{をみたすものとして定義できる。}$$

$B(H)$ 内の weak topology で closed な自己共轭環を von Neumann

代数と呼ぶ。von Neumann 代数は空間に作用して「子集」の性質を抽象化した $\mathcal{M}$ 上の C^* -代数を一般に AW^* -代数と呼ぶ。

“ C^* -代数 $\mathcal{M}$ 内の任意の集合 S について、 $\{$ の annihilator

$$L(S) = \{ a \in \mathcal{M} \mid aS = 0 \}$$

をとると、 $\mathcal{M}$ の中に projection P_S が存在して $\mathcal{M}P_S = L(S)$ となる。

AW^* -代数は von Neumann 代数に非常に近いが両者は一致しないことが知られている (Dixmier [5])

補題 4.1. $\alpha_t \in C^*$ -代数 $\mathcal{M}$ での one-parameter 強連続な $*$ -automorphism 群とする。

$$M_\alpha[s, \infty) M_\alpha[t, \infty) \subseteq M_\alpha[s+t, \infty)$$

証明. $L_a b \equiv ab$ と定義する。 $B(\mathcal{M})$ により

$\varphi_t(A) = \alpha_t A \alpha_t^{-1}$ とかくと、定理 2.3 が $X = \mathcal{M}$, $Y = B(\mathcal{M})$ として適用できるから

$$\begin{aligned} L_a \in M_\varphi[s, \infty) &\implies L_a M_\alpha[t, \infty) = a M_\alpha[t, \infty) \\ &\subseteq M_\alpha[s+t, \infty) \end{aligned}$$

一方容易にわかるように

$$L_a \in M_\varphi[s, \infty) \iff a \in M_\alpha[s, \infty)$$

注意；作用素環の論文では generator の性質もあつてが現在この spectral subspace についてのものはすべて、この定義

12 Fourier 変換の代りに Fourier 逆変換を用いている。結果は勿論本質的には変るものではないうが論文を読むとき注意を要する。そこで前節より論文を統一する為に、すべて通常の Fourier 変換 $\hat{f}(s) = \int f(t) e^{-its} dt$ を用いる。

よく知られた Paley-Wiener の定理を複素平面の上半分に用いることにし、次の補題が得られる。

補題 4.2. $f \in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\hat{f}$ が $(0, \infty)$ に compact な support をもつような関数とすると、上半平面の H^∞ の元 h に対して

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) h(t) dt = 0$$

証明. Paley-Wiener の定理から

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(t) e^{izt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(t) e^{izt} dt$$

とみると、 $F(z)$ は $f(s)$ の上半平面への拡張で H^2 の元である。

更に
$$F_n(z) = \left(1 - \left(\frac{z}{z+i}\right)^n\right) F(z)$$

とすれば $F_n \in H^1 \cap H^2$ である。これから

$$\int_{-\infty}^\infty F_n(t) h(t) dt = 0$$

を示せばよい。そこで $F \in H^1 \cap H^2$ として

$$g(z) = (z^2 + 1) h(z) F(z) = \frac{z-i}{z+i} h(z) (z+i)^2 F(z)$$

とすくと

$$(z+i)^2 F(z) \in \widetilde{H}^1 \text{ (disc の } H^1 \text{ の image)}$$

又 $\frac{z-i}{z+i} h(z)$ は有界な analytic function だから、結局

$$g(z) \in \widetilde{H}^1$$

よって $\frac{1}{\pi(1+t^2)}$ が $g(z)$ の $z=i$ での Poisson kernel とおけるから

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) h(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{1+t^2} dt = g(i) = 0$$

δ を C^* -代数 $\mathcal{A}$ の derivation で $\delta = -\delta^*$ とおくとする (但し $\delta^*(x) \equiv \delta(x^*)^*$, よって $\delta(x^*) = -\delta(x)^*$ を意味する). このとき $\alpha_t = \exp it\delta$ ($t \in \mathbb{R}$) をおくと、 α_t は $\mathcal{A}$ の $*$ -同型対応群になる. $\{\alpha_t\}$ は同型対応のノルム 4 の意味でも連続になっているから、勿論 α_t の spectral subspace $M_\alpha(t, \infty)$ が定まる.

以下 $\mathcal{A}$ を AW^* -代数とする. このとき $M_\alpha(t, \infty)$ の left annihilator はある projection p_t が存在して $\mathcal{A} p_t$ とかける. 明らかに p_t は増加列である.

補題 4.3. $t \leq 0$ のとき $p_t = 0$, 又

$t > \|\delta\|$ のとき $p_t = 1$ である.

証明. $B(\mathcal{A})$ 内で $q_t = \alpha_t \circ \alpha_t^{-1}$ とおくと

命題 2.4 より $L_1 \in M_p[0, \infty) \Rightarrow 1 \in M_\alpha[0, \infty)$

従ってお手が出る。後手は

$$f(z) = e^{i\|z\|^2} e^{iz\delta} \quad z = x + iy$$

と置く。2.4 は $y \geq 0$ で連続, $y > 0$ で analytic な作用素関数

で且つ

$$\|f(z)\| \leq e^{-y\|\delta\|} \|e^{ix\delta}\| \|e^{-y\delta}\| \leq e^{-y\|\delta\|} e^{y\|\delta\|} = 1$$

で有界。よって $\forall \varphi \in \mathcal{O}^*$ に対して $(a \in \mathcal{O})$

$$\langle f(z)(a), \varphi \rangle \in H^\infty.$$

従って $\hat{g}$ が $(0, \infty)$ に compact support を持たない

$$\int \hat{g}(t) \langle f(t)(a), \varphi \rangle dt = 0.$$

よって $\hat{g}_0(t) = e^{it\|\delta\|} \hat{g}(t)$ と置き

$$\text{supp } \hat{g} \subset (\varepsilon - \frac{\varepsilon}{n}, \infty)$$

とすると $\text{supp } \hat{g}_0 \subset (\|\delta\| + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{n}, \infty)$.

よって $\langle a * \hat{g}_0, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}^*, a \in \mathcal{O}$

$$\therefore a * \hat{g}_0 = 0$$

定理 1.6 から $M_\alpha[\|\delta\| + \varepsilon, \infty) = \{0\}$.

従って $t > \|\delta\|$ のとき $P_t = 1$.

さて $\mathbb{R}$ 上の one-parameter unitary 群 $u_t \in$

$$u_t = \int_0^{\|\delta\|} e^{-ist} dP_s$$

と定義する。この積分は1ル4で収束するから AW^* -代数
 Ω 内で意味をもつ。求める定理は

定理 4.4. AW^* -代数 Ω の derivation はすべて inner
 である。

証明. Ω の任意の derivation は上向き derivation の
 linear combination でかけられるから、 $\delta = -\delta^*$ としてよい。

$$h = \int_0^{\|\delta\|} s dP_s \quad \text{と置く。} \quad \text{この同型群 } \alpha_t \text{ とユニタリ群}$$

$$u_t \text{ について } \alpha_t(x) = u_t x u_t^*$$

が成り立つ。両辺を $t=0$ で微分して

$$\delta(x) = xh - hx,$$

即ち $-h$ (negative generator! - フーリエ変換をとったこと)
 により δ は inner になる。

よって定理 2.3 で

$$X = \Omega, \quad A_t = B_t = Lu_t, \quad Y = \{La \mid a \in \Omega\}$$

$$T_t(La) = L\alpha_t(a), \quad \text{mapping } L = \text{identity in } Y,$$

としておくと、求める式

$$\alpha_t(x)u_t y = u_t x y \quad \forall x, y \in \Omega$$

$$\text{は} \quad B_t Lx y = T_t(Lx) A_t y.$$

よって spectral condition を仮定しおけばよい。先ず

$$La \ast f = 0 \iff a \ast f = 0$$

$$5) \quad L_a \in M_T[t, w] \iff a \in M_\alpha[t, w].$$

次に $a \in M_A[-\infty, t]$ の条件を今題 1.7 の 5) にし調べる
と.

$$a \in M_A[-\infty, t] \iff P_{t+\varepsilon} a = a \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$sp_T(L_a) \subset (-\infty, t) \quad sp_A(b) \subset (-\infty, s) \quad \text{と 3.3.}$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : sp(b) \subset (-\infty, s - \varepsilon_0). \quad \therefore P_{s-\varepsilon_0} b = b$$

$$\forall x \in M_\alpha[t + s - \varepsilon_0, \infty), \quad sp_\alpha(a^*) \subset (-t, \infty)$$

$$\text{と 4.1 5) } a^* x \in M_\alpha[s - \varepsilon_0, \infty)$$

$$\therefore b^* a^* x = b^* P_{s-\varepsilon_0} a^* x = 0$$

$$5) \quad b^* a^* P_{t+s-\varepsilon_0} = b^* a^* \quad \text{i.e. } ab = ab P_{t+s-\varepsilon_0}$$

$$\implies ab \in M_A[-\infty, t + s - \varepsilon_0]$$

$$\text{6) } sp_A(ab) \subset (-\infty, t + s)$$

$$\text{又 } sp_T(L_a) \subset (t, \infty) \quad sp_A(b) \subset (s, \infty) \quad \text{と 4.4}$$

$$\forall x \in M_\alpha[r, \infty) \implies ax \in M_\alpha[t + r, \infty)$$

$$\therefore P_{t+r} ax = 0 \quad \text{i.e. } P_{t+r} a \text{ は } M_\alpha[r, \infty) \text{ の anni-}$$

$$\text{hilator. } 5) \quad P_{t+r} a P_r = P_{t+r} a.$$

$$\text{一方 } \exists \varepsilon > 0 : sp_A(b) \subset [s + \varepsilon, \infty). \quad \text{従って}$$

$$P_{t+s+\varepsilon} ab = P_{t+s+\varepsilon} a P_{s+\varepsilon} b = 0$$

$$\therefore \forall f \in I_c[t + s + \varepsilon, \infty)$$

$$ab \underset{A}{*} f = \int_R f(t) u_t ab dt = \int_0^{\|a\|} \hat{f}(s) dP_s ab$$

$$= \int_0^{t+s+\varepsilon} \hat{f}(r) dP_r ab + \int_{t+s+\varepsilon}^{\|\delta\|} \hat{f}(r) dP_r ab = 0$$

定理 1.6 より $ab \in M_A[t+s+\varepsilon, \infty)$ i.e. $sp_A(ab) \subset (t+s, \infty)$

以上から定理 2.3 より $d_t(x)u_t = u_t x \quad (\forall x \in \Omega)$

§5. Locally compact 群への拡張その他

これ迄のことは簡単のために実数上の one-parameter 群についてみてきたが, spectral subspace の方法の応用は多岐にわたり, いったんには議論を可換な locally compact 群に拡張してやっておくことが必要になる. しかし, いったんには

$$x * f = \int_{\mathbb{R}} f(t) A_t x dt$$

が存在することが使法であるから, たとえば §1 にについても無条件を一般化は無理である. Arveson [1] は, 代わりにして,

von Neumann 代数の場合に適合するよう積分の定義を拡張し (適当な one-parameter 群に対して) 群の制限をして

spectral subspace の定義を行なう議論を進めて one-

parameter $\gamma = \lambda$ 群の内部同型化についての Borchers

の定理, von Neumann 代数での derivation の定理等を見らる

ている. しかし元の群 G を separable に限定すれば, 強積分

$\int_G f(t) A_t x dt$ は存在するから, 例え §1 の結果は強くと
どいっても, $\mathbb{R}$ から G に拡張できる. 2.2 で $sp_A(x)$ は $L^1(G)$

の閉イデアル $J(x)$ の hull として G の dual $\hat{G}$ の中の閉集合
 という形で定義されるわけである。整数群や n 次元ユークリッ
 ド空間などがよく取扱われる例である。本講の基本定理 2.
 3 は Forelli [6] によるものであるが、これの作用系環の論文
 では、これをとりあげず、かえってその特殊な形である $A_t =$
 $B_t = \alpha_t$, $T_t = \alpha_t \circ \alpha_t^{-1}$ などにっいて議論をくり返し
 ている。しかし §4 にみられるように定理 2.3 の方がはるかに
 一般で有効なわけであるから、もつとこの結果に注目すべき
 である。従ってこれを separable を可換な locally compact
 群に拡張することは興味あることと思われた。2.4 もいかに
 たいしての拡張が必要である。これにっいて Arveson の
 formulation は群は一般にはなっていないが、また Forelli の元の形
 からみれば不十分である。

文献

1. W. Arveson ; On groups of automorphisms of operator algebras, to appear in J. Functional Analysis
2. H. J. Borchers; Über Ableitungen von C^* -Algebren, Nachr. d. Göttinger Akad. Nr 2 (1973)
3. ————— ; Characterization of inner $*$ -automorphisms of W^* -algebras, 教王理石井 preprint, 1973
4. A. Connes ; Une classification des facteurs de type III, Ann. sci. d. l'École Nor. Sup. 6 (1973), 133 ~ 252
5. J. Dixmier ; Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, Summa Brasil. Math., 2 (1951), 185 - 202
6. F. Forelli ; Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math. 118 (1967), 33 - 59
7. K. de Leeuw and I. Glicksberg ; Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups, Acta Math., 109 (1963)
8. D. Olsen ; Derivations of AW^* -algebras are

inner, preprint Univ. of Copenhagen, 1973.

9. D. Olsen and G. K. Pedersen, Derivations of C^* -algebras have semi-continuous generators, preprint, Univ. of Copenhagen, 1973.

10. S. Sakai; Derivations of W^* -algebras, Ann. Math., 83 (1966), 273 ~ 279.