

曲面上のコード・ダイアグラムのなすポワソン 代数の量子化

東大 M2 柳沢 韻 (Yanagisawa Hibiki)

1. 量子化

Lie 代数 P が可換な積をもち、Leibniz 則

$\{a, b, c\} = \{a, c\}b + a\{b, c\}$ をみたすとき、 P を Poisson 代数とい

う。Poisson 代数 P の量子化は、 P の非可換な拡大である。

定義 $\mathbb{C}$ 上の Poisson 代数 P の量子化とは、 $\mathbb{C}[[h]]$ 上の代数 A と
全射 $p: A \rightarrow P$ の組 (A, p) で次をみたすものである。

(1) $\varphi: \mathbb{C}[[h]] \rightarrow \mathbb{C}$ ($\varphi(h) = 0$) なる線形写像に関して、

$$p(ax) = \varphi(a)p(x) \quad (a \in \mathbb{C}[[h]], x \in A)$$

(2) $ab - ba = h p^{-1} \{p(a), p(b)\} \pmod{h^2 A}$

$$(a, b \in A)$$

$\mathbb{C}$ 上の

例 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の対称代数 $S(\mathfrak{g})$ には、Leibniz 則によって、

bracket が(-意的に) 拡張され、Poisson 代数となる。

$\mathfrak{g}$ の bracket を $\{, \}$ とすると、 $\mathbb{C}[[h]] \otimes \mathfrak{g}$ は $h\{, \}$ なる

bracket に関して $\mathbb{C}[[h]]$ 上の Lie 代数となるが、この包絡代

数 $U_h(\mathfrak{g})$ を考える。 $h \rightarrow 0$ とすれば、線形写像

$p: U_h(\mathcal{Q}) \rightarrow S(\mathcal{Q})$ を得るが、これは定義により決まる。
 たす。

$$a \cdot b - b \cdot a = h \{a, b\} = h p^{-1} \{p(a), p(b)\}$$

従って $(U_h(\mathcal{Q}), p)$ は $S(\mathcal{Q})$ の量子化である。

2. 曲面上のコードダイアグラム

Chord diagram とは、有限個の oriented circle と両端をそれらの上にもつ arc (以下 chord) の集まりである。ただし、chord の端点はすべて異なり、向きを保つ circles の diffeomorphisms によって同一視を行なう。

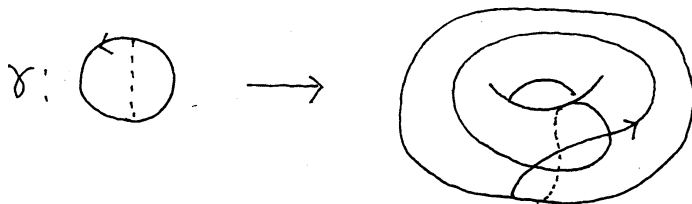
a chord diagram : 

Σ を oriented surface としたとき、chord diagram をなす circles から Σ への連続写像 γ で次をみたすものを Σ 上の chord diagram という。

* a, b が一つの chord の両端ならば $\gamma(a) = \gamma(b)$

ただし、上の条件をみたす free homotopy による変形によって同一視をする。また、端点の像を黒点で表わす。

例



$\mathcal{D}(\Sigma)$ を Σ 上の chord diagram で張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし、 $D(\Sigma) = \mathcal{D}(\Sigma) / 4\text{term relation}$ とする。ここで、4term relation とは、

$$\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0$$

なる関係である。

Σ 上の chord diagram γ の self intersection が有限個で全て transverse double point であるとき、 γ は generic であるという。今、 $\alpha \cup \beta$ が generic となる α, β を選び bracket を

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p; \alpha, \beta) \alpha \cup \beta(p)$$

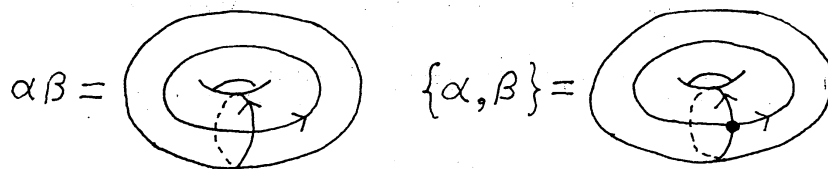
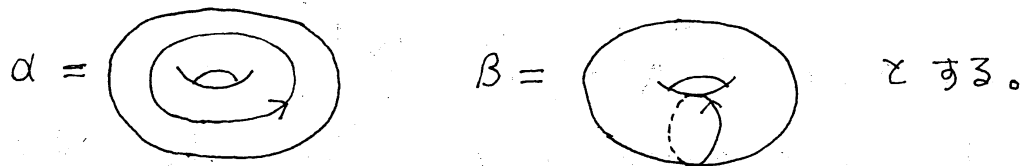
$$\varepsilon(p; \alpha, \beta) = \begin{cases} +1 & (\text{ } \begin{array}{c} \nearrow \alpha \\ \nwarrow \beta \end{array} \text{ } \text{に對して}) \\ -1 & (\text{ } \begin{array}{c} \nwarrow \alpha \\ \nearrow \beta \end{array} \text{ } \text{に對して}) \end{cases}$$

$\alpha \cup \beta(p)$ は $\alpha \cup \beta$ の一部 $\begin{array}{c} \nwarrow \alpha \\ \nearrow \beta \end{array}$ を $\begin{array}{c} \nwarrow \alpha \\ \nwarrow \alpha \end{array}$ で置きかえた diagram と定義する。また、 α, β の (可換な) 積を $\alpha\beta = \alpha \cup \beta$ と定める。このとき次が知られている。

命題 [AMR1]

上の bracket は $D(\Sigma)$ で well defined であり、 $D(\Sigma)$ は Poisson 代数になる。

Remark $D(\Sigma)$ は $[K]$ における $\mathcal{A}(\Sigma)$, [AMR] における $ch(\Sigma)$ と同じものである。

例

3. $D(\Sigma)$ の量子化

$\Sigma \times I$ ($I = [0, 1]$) 内の oriented singular link とは、有限個の oriented circle の immersion

$$L: S^1 \cup \dots \cup S^1 \longrightarrow \Sigma \times I$$

であって、intersection が有限個ですべて transverse double point となるもののことである。ただし、同値関係を次で定める。

$$L_1 = L_2 \iff \Sigma \times I \text{ の isotopy } h_t \text{ が存在して、} h_0 = \text{id}, \\ h_1(L_1) = L_2 \text{ かつ } h_t(L_1) \text{ は singular link となる。}$$

$\Sigma \times I$ 内の singular link が $\mathbb{Z}[h]$ 上張る加群を次の skein relation で割った加群を $Q(\Sigma)$ とする。

$Q(\Sigma) = \mathbb{C}[h] \{ \text{singular links in } \Sigma \times I \} / \text{skein relation}$

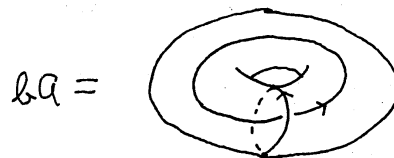
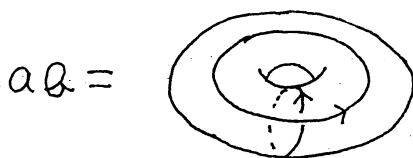
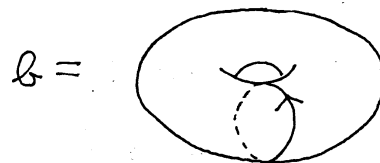
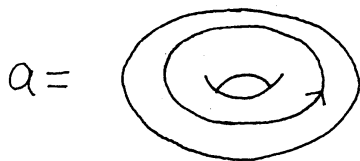
skein relation: $h \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \times \end{array} = \begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \searrow \searrow \\ \diagup \end{array}$

Remark L_1, L_2 を intersection をもたない links とする。このとき、 $L_1 \neq L_2$ ならば $L_1 \neq L_2$ in $Q(\Sigma)$

Singular links L_1, L_2 に対して積を次で定める。

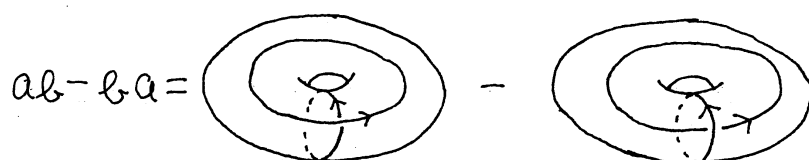
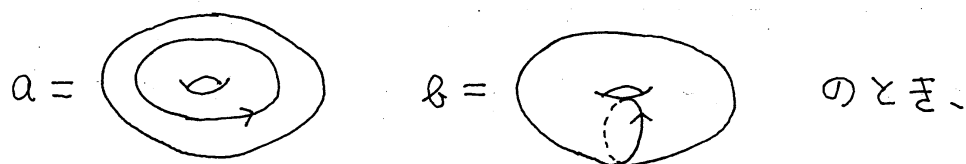
$$L_1 L_2 = \begin{array}{|c|} \hline L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} (a, t) \in \Sigma \times I \quad ; \\ t > \frac{1}{2} \text{ のとき } (a, 2t-1) \in L_1 \\ t < \frac{1}{2} \text{ のとき } (a, 2t) \in L_2 \end{array} \right\}$$

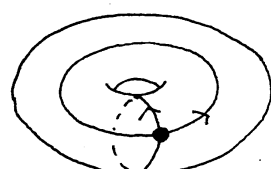
例



射影 $\pi: \Sigma \times I \rightarrow \Sigma$ は $h \rightarrow 0$ としたときの写像 $p: Q(\Sigma) \rightarrow D(\Sigma)$ を引き起こす。

定理 $p: Q(\Sigma) \rightarrow D(\Sigma)$ は量子化である。

例

$$= h \text{  } = hp^{-1}\{p(a), p(b)\}$$

Remark 一般には、 $ab - ba$ の全てのcrossing についての同様の議論によって 定理は証明される。

4. 参考文献

ここで述べたことは、曲面上のloopの量子化に関する[T]の拡張であり、関連した事柄が[AMR2]で扱われている。

[AMR1] J.E. Andersen, J. Mattes and N. Reshetikhin: The Poisson structure on the moduli space of flat connections and chord diagrams. Topology 35(4) pp. 1069-1083, 1996

[AMR2] J.E. Andersen, J. Mattes and N. Reshetikhin: Quantization of the algebra of chord diagrams

MSRI Preprint 1996-072

[K] T. Kohno: Elliptic KZ system, braid group of the torus and Vassiliev invariant,

[T] V. Turaev: Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. An. Sci. Éc. Norm. Sup., 24 pp. 635-704, 1991