

A_n, D_n 型 quiver の表現の退化

北大理 丹原 大介 (Daisuke Tambara)

体 K 上の有限次元 algebra Λ について Λ 加群の退化を考える.

定義 1 Ω を K 上のベクトル空間とすると Ω 上の Λ 加群構造の全体は $\text{Hom}_K(\Lambda \otimes_K \Omega, \Omega)$ の Zariski 閉集合をなす. これを X とおく. Λ 加群 U に対して Ω に U と同型な Λ 加群構造を与える X の点の全体を O_U とかく. 2 つの Λ 加群 U, V に対して, $\dim U = \dim V = \dim \Omega$ かつ O_U の X における閉包が O_V を含むとき, U は V に退化するといひ $U \rightsquigarrow V$ とかくことにする.

$\rightsquigarrow$ は Λ 加群の同型類の集合の上に順序を定める.

定義 2 2 つの Λ 加群 U, V について次が成立つとき, $U \leq V$ とかく. U と V の組成列因子が同じで, 任意の Λ 加群 M について $\dim \text{Hom}_\Lambda(M, U) \leq \dim \text{Hom}_\Lambda(M, V)$.

$\leq$ もまた Λ 加群の同型類の集合の上に順序を定めることが知られる. X 上の関数 $\dim \text{Hom}_\Lambda(M, -)$ の上半連続性から $U \rightsquigarrow V$ ならば $U \leq V$

逆が問題であるが、次の Λ について $U \rightsquigarrow V \Leftrightarrow U \leq V$ が成立つ。

イ) $K[T]/(T^n)$ (古典的)

ロ) A_n 型 quiver の path algebra ([1], [3])

ハ) D_n 型 quiver の path algebra (equi-oriented case は [2], 一般のとき [3])

ニ) ロヤハの Λ の剰余環 ([3])

ホ) Λ が有限表現型でその Auslander-Reiten quiver は単連結で各頂点について出る矢、入る矢は2本以下 ([3])

ヘ) quiver $\tilde{A}_1 : \bullet \rightrightarrows \bullet$ の path algebra

すべての表現の間の順序 $\rightsquigarrow$ が分っているような Λ は筆者の知る限り上記のものしかない。

イ) の場合は $\rightsquigarrow$ も $\leq$ も partition の間の自然な順序と一致する。ロ) の場合、Abeyasis と Del Fra の証明は (equi-oriented でないときに) きわめて長いが、上のように $\dim \text{Hom}_\Lambda(,)$ による定式化をして AR quiver を見ながら考えれば簡明な証明がえられる。ハ) の場合もそのやり方をすすめてなんとかできる。 E_6 になると AR quiver の上の図形が重なり合って視覚にたよれなくなる。ニ) はロ、ハから明らか。ホ) はロの証明がそのまま通用する場合。ヘ) は無限表現型だが成立っている。 regular module のところでイ) が要る。 $\tilde{A}_n$ $n > 1$ に進むた

めには 2 個以上の simple をもつ uniserial の場合が分るなければい
けない。

$U \leq V \Rightarrow U \rightsquigarrow V$ が成立たない Λ の例が Carlson により与
えられている。 ([3]) $\Lambda = K[x, y]/(x^2, y^2)$

References

- [1] S. Abeasis and A. Del Fra, Degenerations for the representations
of a quiver of type A_m (J. Alg., Vol 93, 1985, pp 376-412)
- [2] S. Abeasis and A. Del Fra, Degenerations for the representations
of an equioriented quiver of type D_m (Adv. Math., Vol 52,
1984, pp 81-172)
- [3] Ch. Riedtmann, Degenerations for representations of quivers
with relations (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 19,
1986, pp 275-301)