

有限群の両側 Burnside 環の表現論

Akihiko Hida

Faculty of Education, Saitama University
(飛田明彦 埼玉大学教育学部)

1 Introduction

p を素数, P を有限 p -群とします. P の両側 Burnside 環は有限両側 P -集合を基底とする環です. ここでは基礎体として正標数 p の体 k をとり, k 上の両側 Burnside 環 $A(P, P)$ の表現と P の cohomology との関連について考察します. この多元環 $A(P, P)$ は次のような性質を持っています.

- (1) (完備化された) P の分類空間 BP について, 安定ホモトピー圏での BP から BP への射を記述している (これに関しては亀子正喜氏の解説 [3] を参照下さい).
- (2) P 上の fusion system は, $A(P, P)$ の特殊な冪等元と対応している ([6]).
- (3) $A(P, P)$ は $\text{Out}(P)$ の群環 $k\text{Out}(P)$ を含んでおり, $A(P, P)$ の表現は $\text{Out}(P)$ のモデュラー表現と関連している ([1],[5]).

このように, ホモトピー論, 有限群論, モデュラー表現の 3 者に関わっている対象ですが, ここでは (3) の表現論的な見地から扱います. (1) からわかるように $A(P, P)$ は cohomology 環 $H^*(P, k)$ に作用しますが, $H^*(P, k)$ の $A(P, P)$ -module としての構造を調べることが目的です.

以下, 2 章では多元環 $A(P, P)$ を定義し, 3 章では simple $A(P, P)$ -module に関する Benson-Feshbach [1] の結果を述べます. 4 章では cohomology 環への作用について考察し, 最後に 5 章では, $p = 3$ として, 位数 27 の extraspecial 3-群の場合の具体的な計算結果を述べます.

位数 p^3 , exponent p の extraspecial p -群 P と, P を Sylow 群に持つ有限群の cohomology については, 多くの結果が知られています ([4],[7],[8] 等). P の分類空間の stable splitting と cohomology については [10] で研究されており, [10] には非常に多くの結果が載っています. 講演時には, これらの結果に触れることができなかったことをお詫びします. 本稿の 5 章は [10] の中の $p = 3$ の場合について, 次数が最も低い部分を具体的に取り出して述べたもの, ともいえます.

2 Burnside 環 $A(P, P)$

p を素数, P を有限 p -群, k を標数 p の体とする. 有限 (P, P) -両側集合 X が右自由であるとは, 任意の $x \in X$, $u \in P$, $u \neq 1$ に対して $xu \neq x$ となることである. 右自由な有限

(P, P) -両側集合の同型類を $[X]$ で表す. 右自由な有限 (P, P) -両側集合の同型類で生成され, 関係式

$$[X] + [Y] = [X \cup Y] \text{ (disjoint union)}$$

$$[X][Y] = [Y \times_P X]$$

で定義される環を $A_{\mathbf{Z}}(P, P)$ とおく. ただし, $Y \times_P X = Y \times X / \sim$, $(yu, x) \sim (y, ux)$, $(y \in Y, x \in X, u \in P)$ である.

$$A(P, P) = k \otimes A_{\mathbf{Z}}(P, P)$$

とおく.

(P, P) -両側集合は作用 $(u, v)x = u xv^{-1}$ により $(P \times P)$ -集合とみなすことができる. このようにみたとき, 右自由で可移な $(P \times P)$ -集合は

$$P \times P / \Delta_{H, \varphi}$$

$$H \leq P, \varphi : H \longrightarrow P$$

$$\Delta_{H, \varphi} = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in H\}$$

という形で与えられる.

$$[H, \varphi] := [P \times P / \Delta_{H, \varphi}]$$

とおくと,

$$\{[H, \varphi] \mid H \leq P, \varphi : H \longrightarrow P \text{ (up to } P\text{-conj.)}\}$$

は $A(P, P)$ の k 上の基底である.

3 Simple $A(P, P)$ -modules

部分群 $H, K, K' \leq P$, 準同型写像 $\pi : H \rightarrow K$, $\psi : K \xrightarrow{\sim} K'$ に対して,

$$\gamma(H, \pi, \psi) := \sum \pi c_{x^{-1}} \psi \in k\text{Out}(K)$$

とおく. $c_{x^{-1}}$ は共役写像 $c_{x^{-1}}(u) = x^{-1}ux$ であり, 和は

$$\begin{cases} x \in K' \setminus P/H \\ K' C_P(K') \leq {}^x H \\ K'^x \cap \ker \pi = 1 \end{cases}$$

に渡るものとする. ただし,

$$K \xrightarrow{\psi} K' \subset {}^x H \xrightarrow{c_{x^{-1}}} H \xrightarrow{\pi} K$$

の合成を考えて $\pi c_{x^{-1}} \psi \in \text{Out}(K)$ とみている.

Theorem 3.1 ([1],[5],[9]). simple (left) $A(P, P)$ -module は (up to iso. で) , $K \leq P$ と simple left $k\text{Out}(K)$ -module の組 (K, S) で, ある H, π, ψ に対して

$$\gamma(H, \pi, \psi)S \neq 0$$

をみたすものと一対一に対応する.

組 (K, S) に対応する $A(P, P)$ -module を [1] では $L(P, K, S)$ と表し, K を $L(P, K, S)$ の vertex, S を $L(P, K, S)$ の source と呼んでいる. 部分群 K として P 自身をとり, S を simple $k\text{Out}(P)$ -module とする. P の恒等写像 id について, $\gamma(P, \text{id}, \text{id}) = 1$ であるので $\gamma(P, \text{id}, \text{id})S \neq 0$ となり, $L(P, P, S)$ が考えられる.

$$J = \sum_{\varphi(L) < P} k[L, \varphi]$$

とおく. (和は $L \leq P$ と $\varphi: L \rightarrow P, \varphi(L) \neq P$ に渡る.) この J は $A(P, P)$ のイデアルであり,

$$A(P, P)/J \simeq k\text{Out}(P)$$

となる. vertex が P である simple module とは simple $A(P, P)/J$ -module のことであり, $k\text{Out}(P)$ -module としては,

$$L(P, P, S) = S$$

となっている.

4 Cohomology 環 $H^*(P, k)$ への作用

$H^*(P, k) = \oplus H^n(P, k) = \oplus \text{Ext}_{kP}^n(k, k)$ を cohomology 環とする. $H^*(P, k)$ への $A(P, P)$ の作用が自然に定義される. つまり $\zeta \in H^*(P, k), P \supseteq H \xrightarrow{\varphi} P$, について,

$$\zeta \cdot [H, \varphi] = \text{Tr}_H^P \varphi^*(\zeta)$$

$$H^*(P, k) \xrightarrow{\varphi^*} H^*(H, k) \xrightarrow{\text{Tr}} H^*(P, k)$$

と定義する. この作用により, $H^*(P, k)$ は right $A(P, P)$ -module となっている.

ここでの目標は $H^n(P, k)$ の $A(P, P)$ -module としての構造, 特にその composition factor について調べたいということである. 全ての simple module が $H^*(P, k)$ に現れる、ということは知られているが ([3] 参照), どの次数 n にどのように現れるか, ということを具体的に理解したい.

$()^* = \text{Hom}_k(-, k)$ を k -dual とする. $L(P, K, S)^*$ は simple right $A(P, P)$ -module である.

Lemma 4.1. (K, S) を simple $A(P, P)$ -module $L(P, K, S)$ の vertex と source とする (つまり Theorem 3.1 の条件をみたしているとする). simple $A(K, K)$ -module $L(K, K, S)^*$ が $H^n(K, k)$ の composition factor であるならば $L(P, K, S)^*$ は $H^n(P, k)$ の composition factor となっている.

この Lemma により, まず初めに, simple $k\text{Out}(P)$ -module S に対して, $L(P, P, S)^*$ がどの $H^n(P, k)$ に現れるか, という問題を考えることが必要となる. $L(P, P, S)^*$ が $H^n(P, k)$ の composition factor として現れる, という条件を具体的に書き上げてみると次のようになる.

Lemma 4.2. $H^n(P, k)$ の subspace $H^n(P, k) \supset M \supset N$ で次をみたすものがあるとする.

(a) M, N は $k\text{Out}(P)$ -submodule.

(b) $k\text{Out}(P)$ -module として $M/N \simeq S^*$.

(c) $H \leq P$, $\varphi: H \rightarrow P$, $\varphi(H) < P \Rightarrow \text{Tr}_H^P \varphi^*(M) \subseteq N$.

このとき M, N は $A(P, P)$ -submodule であり $M/N \simeq L(P, P, S)^*$ である.

5 Extraspecial 3-group

ここでは $p = 3$ とし, 位数 27 の extraspecial 3-group を例として, 前節の Lemma 4.2 を適用する.

$$P = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^3 = 1, [a, b] = c, [a, c] = [b, c] = 1 \rangle$$

とする.

Proposition 5.1 ([2]). simple left $A(P, P)$ -modules の次元, 構造は次のようになっている.

$K(\leq P)$	$\text{Out}(K)$	simple $k\text{Out}(K)$ -module S	$\dim L(P, K, S)$	$\text{Out}(P)$ -module structure
P	$\text{GL}_2(\mathbf{F}_3)$	arbitrary S	$\dim S$	S
$\langle a, c \rangle$	$\text{GL}_2(\mathbf{F}_3)$	simple projective	4	$\text{Ind}_B^G(\rho)$
$\langle a \rangle$	$\mathbf{F}_3^\times$	χ_0	4	$\text{Ind}_B^G(k)$
$\langle a \rangle$	$\mathbf{F}_3^\times$	χ_1	2	simple
1	1	k	1	k

ただし, $\text{Out}(\langle a \rangle) = \mathbf{F}_3^\times = \{\pm 1\}$, $\chi_i: \text{Out}(Q) \rightarrow \mathbf{F}_p^\times$ であり, χ_0 は自明な指標, χ_1 は非自明な指標である. また

$$G = \text{Out}(P) = \text{GL}_2(\mathbf{F}_3)$$

$$B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

とする. $K = \langle a, c \rangle$ の場合 $\text{Out}(K) = \text{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ であり, simple projective module は 2 種類あるが, 対応する ρ は

$$\begin{aligned} \rho: B &\rightarrow \mathbf{F}_3^\times \\ \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & v \end{pmatrix} &\mapsto 1, s^2 v. \end{aligned}$$

である.

P の真部分群 $Q < P$ については, 任意の simple $A(Q, Q)$ -module が $H^*(Q, k)$ の composition factor となることは容易にわかる. 以下, $K = P$ として, simple kG -module S に対する simple $A(P, P)$ -module $L(P, P, S)^*$ について考える.

まず simple kG -module については良く知られている. $k[x, y]$ を k 上の多項式環とし,

$$g = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \in G$$

の作用を

$$g \cdot (x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$$

と定義する. $k[x, y]$ の次数が 1, 2 の斉次部分を $V_1 = kx + ky$, $V_2 = kx^2 + kxy + ky^2$ とおき, 行列式,

$$\det : G \longrightarrow k^\times$$

とすると, simple kG -modules は

$$k, V_1, V_2, \det, V_1 \otimes \det, V_2 \otimes \det.$$

で与えられる.

次に $H^*(P, k)$ の構造 ([4]) については, $\alpha_1, \beta_1 \in H^1(P, k) = \text{Hom}(P, k)$ を,

$$\alpha_1(a) = 1, \alpha_1(b) = 0$$

$$\beta_1(a) = 0, \beta_1(b) = 1$$

と定義し, Bockstein 準同型で対応するものを $\alpha, \beta \in H^2(P, k)$ とおく.

$$\alpha, \beta \in \text{Im} (\text{Inf} : H^2(P/\langle c \rangle, k) \longrightarrow H^2(P, k))$$

でもあり, 関係式, $\alpha^3\beta - \alpha\beta^3 = 0$ をみたしている. 一方, $\nu \in H^6(P, k)$ で零因子ではないものが存在し, $G = \text{Out}(P)$ の作用は,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot g = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\nu \cdot g = (\det g)\nu$$

となっている. cohomology 環 $H^*(P, k)$ の構造は非常に複雑であるが, α, β, ν で生成される部分環 $k[\alpha, \beta, \nu]$ は比較的考えやすいものと思われる.

$$M_n = \{f(\alpha, \beta) \mid f \in k[x, y]: \text{homog. deg } n\}$$

とおく. $M_1 = k\alpha + k\beta$, $M_2 = k\alpha^2 + k\alpha\beta + k\beta^2$ である.

Remark 5.2. (1) kG -module としては $M_1 \simeq V_1^*$ であるが, $A(P, P)$ -module としては M_1 は $L(P, P, V_1)$ と同型ではない. $Q = \langle a \rangle$, $\varphi: P \rightarrow Q \leq P$ について,

$$\alpha[P, \varphi] = \alpha$$

であり M_1 は $A(P, P)/J$ -module とはなっていない. 実際には,

$$M_1 \simeq L(P, \langle a \rangle, \chi_1)^*$$

である.

(2) kG -module としては $M_2 \simeq V_2^*$ であるが, M_2 は $H^4(P, k)$ の $A(P, P)$ -submodule ではない. $E = \langle a, c \rangle$, $\mu \in H^4(E, k)$ で $\text{Tr}_E^P(\mu) \notin M_2$ となるものが存在し,

$$M_2 + k\text{Tr}_E^P(\mu) \simeq L(P, \langle a \rangle, \chi_0)^*$$

となっている.

Proposition 5.3. 次の $H^n(P, k) \supset M \supset N$ は Lemma 4.2 の条件をみたしている.

n	M	N	M/N (as a kG -mod)
6	$k\nu + M_3$	M_3	$\det^*$
8	νM_1	0	$(V_1 \otimes \det)^*$
10	νM_2	0	$(V_2 \otimes \det)^*$
12	$k\nu^2 + M_6$	M_6	k
14	$\nu^2 M_1 + \nu M_4$	νM_4	V_1^*
16	$\nu^2 M_2$	0	V_2^*

すなわち, M, N は $A(P, P)$ -submodule であり, M/N は simple $k\text{Out}(P)$ -module S に対する $L(P, P, S)^*$ と同型である.

例えば, $n = 14$ の箇所では,

$$\nu M_4 \subset \nu^2 M_1 + \nu M_4 \subset H^{14}(P, k)$$

は $A(P, P)$ -submodule の列であり,

$$(\nu^2 M_1 + \nu M_4)J \subset \nu M_4$$

となっている. M_1 の場合と異なり $\text{res}_{\langle a \rangle}^P \nu^2 M_1 = 0$ であり, Remark 5.2 のときのようなことは起こらない. $p = 3$ なので $(\det)^2 = 1$ となり $k\text{Out}(P)$ -module としては,

$$(\nu^2 M_1 + \nu M_4)/\nu M_4 \simeq M_1 \simeq V_1^*$$

であり, $A(P, P)$ -module としては

$$(\nu^2 M_1 + \nu M_4)/\nu M_4 \simeq L(P, P, V_1)^*$$

となる. またこの表より, vertex が P である simple $A(P, P)$ -module はすべて $n \leq 16$ までの $H^n(P, k)$ に, composition factor として現れることがわかる.

References

- [1] D. J. Benson and M. Feshbach, Stable splittings of classifying spaces of finite groups, *Topology* 31 (1992), 157-176.
- [2] J. Dietz and S. Priddy, The stable homotopy type of rank two p -groups, *Homotopy theory and its applications*, *Contemp. Math.* 188 (1995), 93-103.
- [3] 亀子正喜, Modular representation theory and stable decomposition of classifying spaces, *数理解析研究所講究録* 1466 (2006), 9-20.
- [4] I. J. Leary, The mod- p cohomology rings of some p -groups, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 112 (1992), 63-75.
- [5] J. Martino and S. Priddy, The complete stable splitting for the classifying space of a finite group, *Topology* 31 (1992), 143-156.
- [6] K. Ragnarsson and R. Stancu, Saturated fusion systems as idempotents in the double Burnside ring, preprint, 2009.
- [7] H. Sasaki, Mod p cohomology algebras of finite groups with extraspecial Sylow p -subgroups, *Hokkaido Math. J.* 29 (2000), 263-302.
- [8] M. Tezuka and N. Yagita, On odd prime components of cohomologies of sporadic simple groups and the rings of universal stable elements, *J. Algebra* 183 (1996), 483-513.
- [9] P. Webb, Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and decomposition of classifying spaces, *J. Pure and Applied Algebra* 88 (1993), 265-304.
- [10] N. Yagita, Stable splitting and cohomology of p -local finite groups over the extraspecial p -group of order p^3 and exponent p , *Geometry and Topology Monographs* 11 (2007), 399-434.