

数式処理ソフトを活用した三角関数と その応用に関する教育実践

日本大学理工学部 藤井 利江子 (Rieko Fujii)

College of Science and Technology,
Nihon University

日本大学理工学部 戸塚 英臣 (Hideomi Totsuka)

College of Science and Technology,
Nihon University

日本大学理工学部 鈴木 潔光 (Kiyomitsu Suzuki)

College of Science and Technology,
Nihon University

1 はじめに

近年、「理系離れ」や「ゆとり教育による学力の低下」が指摘されている。しかしその反面、学生は幼少時からパソコンやインターネットに触れている、いわゆる「デジタルネイティブ」と呼ばれる世代であることも大きな特徴である。実際本学に入学してくる理系学生は、キーボード操作やマウスの扱い、ファイル操作、ソフトウェアの基本的な利用法等のパソコン操作には慣れており、これらを指導する必要はほとんどなくなった。すなわち学生は、表計算ソフト等を用いてグラフを作成することは比較的容易に行っている。しかし、数式に示された物理量がグラフのどの部分に現れているのか等、“グラフを読み取る能力”があるかという、はなはだ疑問である[1]。理工系の学生にとっては式から、あるいはグラフから物理現象を理解することは大変重要である。そこで本教育実践では、これらの能力の強化を目指すことを大きな目標としている。本実践は、1人1台のコンピュータを利用した実習形式で、数式処理ソフト(Mathematica)や表計算ソフト(Excel)を利用して1年次前期および2年次後期に行っている。1年次前期の内容は、高校で学んだ数学および物理の大学への導入教育を目的とした授業、2年次後期の内容は、大学で一通り学んだ基礎数学・物理学の復習を目的とした授業となっている。授業は実習形式であるが、定期試験はペーパーテストを行い、理解度を毎年調査している。本稿ではその中で、1年次前期に行っている授業内容とその教育効果に関する報告をする。

2 基本的な三角関数の描画

入学した学生に対して、まず行っているのが高校で学習した様々な関数の描画である。中でも三角関数は、座標変換や振動・波動といった理工学を学ぶうえで重要な関数であるため、特に重きを置いて実践している。基本的な三角関数に関する授業内容は、

Mathematica の利用方法の習得も兼ねて $y = A \sin kx$ の A や k を変化させたグラフを同一座標軸に複数個描画させ、どの式で表されたグラフがどれに対応しているのかを判断させるものを行っている (図 1)。期末試験にも同様の問題を出題している。試験問題は、例えば $y = \sin x$ のグラフ上に $y = 2 \sin x$ および $y = \sin 2x$ のグラフを描かせる問題等である。これらの問題の正答率は例年 9 割を超えており、学生は基本的な三角関数に関しては理解しているものと考えられる。

3 波動のパラメータ

波動は三角関数で表される物理現象の中で最も重要な項目の一つであり、高校物理でも扱われている内容である。そこで、まず学生に対し高校生の時に「波動」が好きだったかというアンケートを取ってみた。その結果は、約 6 割の学生が波動を嫌いと答え、好きと答えた約 4 割の学生を上回っている。その理由を答えさせると、「理解できないから」「イメージしにくいから」「ややこしいから」嫌いというものであった。反対に「好き」と答えた学生は「得意だったから」「興味深く面白いから」「楽しいから」と答えている。

また以前の高校物理の教科書には、位置を x 、時刻を t 、振幅を A 、周期を T 、波長を λ としたときの波動を表す式 $y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ が記述されていたが、最近の教科書からは削除されている。すなわち公式の暗記としてではなく、波動を理解したい学生にとってはこの式の削除が学習の妨げになっている可能性もある。

そこでまず波動の公式を $y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ と $y = A \sin(\omega t - kx)$ の 2 通りの形で示し、角振動数 ω および波数 k と λ 、 T との関係を比較させている。また、これらの式を用いて波の速度 v がどのように表されるかについても説明を行っている。これは波動に関連した公式がどのようにして導かれているのかを理解させることが目的である。

期末試験では例年 λ 、 T 、 v と ω 、 k の関係を記述させる問題を出題しているが、表 1 に示す通りあまり正答率が高いとはいえない。これは式に x 、 t という 2 つの変数が出てくるうえ、それ以外にも 5 つの物理量 (定数) が現れるため、定数と変数の区別もつかず、理解するのが難しいのかもしれない。ただ、周期 T と角振動数 ω の関係は、比較的正答率が高いことがわかる。これは高校物理の教科書に周期 T と角振動数 ω の関係を表す公式が掲載してあるため、単なる公式として暗記していた結果ではないかと考えられる。

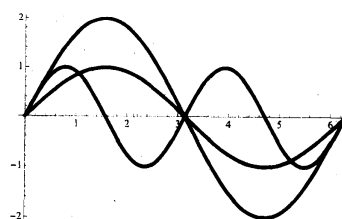


図 1: 授業中に描画させた三角関数のグラフ。同一座標軸上に描画させ、どのグラフがどの式で表された関数に対応しているのかを理解させている。

表 1: 波動のパラメータに関する試験の正答率

	波長 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$	周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$	波の速度 $v = \frac{\omega}{k}$
H.19	25%	46%	38%
H.20	28%	70%	26%
H.21	31%	77%	25%
H.22	38%	67%	38%

4 1次元波動のアニメーション

波動に関しては、Mathematica のアニメーション機能を利用した実践も行っている。授業では3種類の波動を表す式、 $y = A \sin(\omega t - kx)$ 、 $y = A \sin(\omega t + kx)$ 、 $y = A \sin(kx - \omega t)$ において、 A 、 k 、 ω を適当に決めたとき、上記の3つの式がそれぞれどのような振る舞いをするかを Mathematica でアニメーションさせた。この実践の目的は、これら3つの式で表される波動が A 、 k 、 ω を変更した際、a) どちらの方向に進むのか？ b) 振幅はどう変化するのか？ c) 波長はどう変化するのか？ d) 周期はどう変化するのか？ e) 波の速度はどう変化するのか？を理解させることである。このうち a)～c) はグラフから比較的容易に読み取ることが可能である。d) および e) は定量的に読み取することは難しいが、定性的に理解することは可能である。a) に関してはさらに、例えば $y = A \sin(kx - \omega t)$ において時間が t から Δt たった後の式 $y = A \sin k \left(x - \frac{\omega}{k} - \frac{\omega}{k} \Delta t \right)$ を用いて、 Δt たった後、どちらの方向にどれだけ進むか等の説明も行っている。これは文献[2]に基づき、一般の関数 $y = f(x)$ を x の正の方向に $\alpha (> 0)$ ずらしたグラフが $y = f(x - \alpha)$ になることを利用し、 $y = A \sin(kx - \omega t)$ と Δt たった後の式を比較して、どちら方向にどれだけ動いていくかを考えさせるものである。

期末試験では、図2を $y = A \sin(\omega t - kx)$ における、時刻が $t = t$ および $t = t + \Delta t$ のグラフだと仮定したとき、(1)a、bのどちらが $t = t$ のグラフで、どちらが $t = t + \Delta t$ のグラフであるかを選択する問題、(2) 図の c および d の物理量を A 、 ω 、 k 、 Δt (および π) を用いて記述させる問題、(3) A 、 ω は一定にしたまま、 k だけを2倍にした時 λ 、 T 、 v がどう変化するかを記述させる問題を出題した。

平成23年度と24年度の試験結果を表2と表3に示す。(1)に関しては、正の方向に進むことがわかっていた学生は6割程度いたが、2択の問題であることを考慮すると、6割の正答率では十分とはいえない結果である。(2)に関しては、cの波長の半分を π/k と答えられた学生が2割弱、dの波の移動距離を $\frac{\omega}{k} \Delta t$ と答えられた学生は1割前後とあまりよい結果は得られなかった。また(3)に関しては、 k を2倍にしたときの波長や速度の変化が理解できた学生は2割程度であり、あまりよい

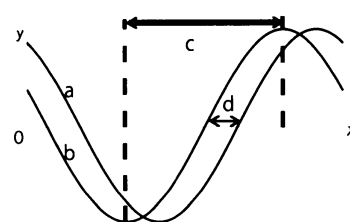


図 2: 波の進行方向と移動距離の試験問題に使用した図

結果とは言えない。中には“速度が遅くなる”とか“波長が短くなる”という定性的には正解である答案もあったが、特に定量的な物理量の理解がされていないという結果となった。

表 2: 波の進行方向とグラフに示された物理量に関する試験の正答率

	正方向	半波長 $\frac{\pi}{k}$	移動距離 $\frac{\omega}{k} \Delta t$
H.23	63%	15%	7%
H.24	63%	17%	12%

表 3: 波数 k を 2 倍にしたときの各パラメータの変化に関する正答率

	λ の変化	T の変化	速度
H.23	25%	50%	27%
H.24	24%	41%	22%

5 波の反射および合成に関するアニメーション

波の反射・合成は、高校物理でも単一波に関して扱われているが、本授業では定常波を取り扱い、固定端反射・自由端反射の進行波・反射波の性質の違いや、波の位相等を理解させることを目指している。

授業では固定端反射と自由端反射のそれぞれについて、図 3 のような進行波・反射波・合成波（定常波）の 3 つの波を Mathematica アニメーションで同時に描かせ、2 種類の反射の定性的な違いを比較させた。特に端部における進行波・反射波の性質や、合成波の振幅・波長がどのような値になるのかを理解させることを試みた。

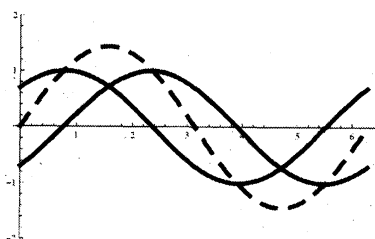


図 3: 進行波、反射波、定常波のアニメーション

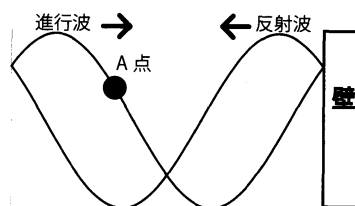


図 4: 定常波の試験問題に使用した図

試験問題では進行波と反射波のみを描いた図 4 を示し、(1) 図中の A 点と同じ位相を反射波上に書き入れさせる問題、(2) この定常波は自由端反射か固定端反射か、またその理由は何か？を答えさせる問題、(3) この定在波の振幅、波長は元の進行波と比べて

どのように変化するかを答えさせる問題を出題した。正答率を表4に示す。(1)の問題の正答率は6割～7割であり、まずまずの正答率だと言える。しかし、あてずっぽうに記入しても正解が得られてしまう可能性があるため、今後は1周期ではなく数周期の波を記述して、同位相の位置が本当に理解されているのかどうかを確かめたいと考えている。(2)の正答率は6割～7割であるが、2択の問題としては正答率が高いとはいえない。固定端か自由端かを判断した理由を記述させた結果は、「位相が変わらないから自由端」と答えた学生が約4割前後、「端が自由に動くから自由端」と答えた学生が1割前後であり、固定端と自由端の性質を理解して解答した結果とは言いきれない面もある。(3)の問題の正答率は振幅に関しては多少ばらつきがありあまり高くはないが、波長の変化に関しては8割前後の正答率がある。これはアニメーションを見た際、定常波は振幅が最大になる瞬間が決まっているため理解しにくい、波長はどの時点で見ても同じであることから理解しやすかったものと考えられる。このように、課題もあるが、アニメーションを利用した定常波に関する内容は教育効果のあったものもいくつかあった。しかし、さらに重要なことは現象の定量的な理解である。これは2年次の授業の課題として考えている。

表 4: 定常波の試験問題の正答率

	同位相	自由端反射	振幅の変化	波長の変化
H.22	65%	57%	64%	80%
H.23	70%	64%	54%	85%
H.24	57%	71%	34%	78%

6 授業アンケート

授業内容に関するアンケート調査を最終回の授業に行った。このうち“授業は全体として満足できるものである”という項目を5段階で回答させた結果を図5に示す。

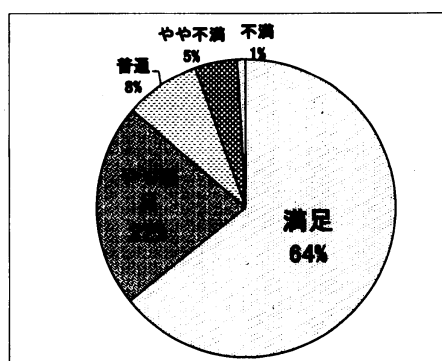


図 5: 授業満足度に関するアンケート結果

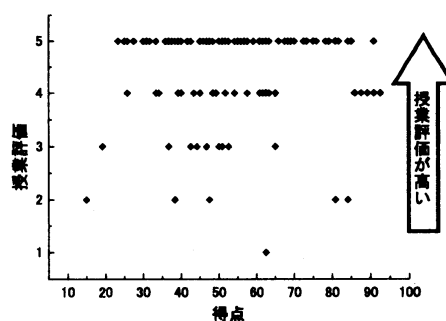


図 6: 授業評価と成績の相関

8割以上の学生が授業に“満足している”または“やや満足している”と答えており、

学生にとって Mathematica を利用した授業は比較的好評であったことがわかる。またアンケートの自由記述を見ると「物理を式としてだけではなく、グラフやアニメーションによって現象として捉えられることで、楽しく理解することができた」というようなモチベーションが向上した学生も多いことがわかってきた。しかし、このアンケートと成績の相関を取ったところ、図6のような結果となった。必ずしも授業評価が高い学生の成績が良いわけではなく、授業評価と成績には全く相関がみられないようである。また得点分布を図7のようにほぼ正規分布となっているため、試験問題の難易度もほぼ適切であろうと考えられる。すなわちこの結果からは学生の授業への評価は高いが、成績に結び付けるのは難しいことがわかった。しかし表5に示したように、波動が好きか嫌いかというアンケート結果において、波動が好きと答えた学生は、嫌いと答えた学生と比べて、波動の問題に関する得点を100点満点に換算するとやや好成績をとっており、やはり学生に楽しく勉強してもらえるような授業を実践していく意義は十分あると感じられた。

表 5: 「波動」についてのアンケートと波動の成績

	好き (38%)	嫌い (60%)	普通 (2%)
平均点	48 点	41 点	41 点

7 まとめ

本実践では 1) 基本的な三角関数の描画、2) 波動に関するパラメータの理解、3) 1次元波動のシミュレーション、4) 進行波・反射波と定常波、に関しての教育実践と教育効果、学生のアンケート結果等について報告した。Mathematica によるアニメーションやグラフ描画による教育効果が表れた項目はいくつかあったが、少し複雑な式や定量的な理解を促すには難しい点も課題として現れた。また、この授業科目は例年100名程度の受講者がいるが、指導する教員はたった4名である。すなわち個別指導を充実するには厳しい状況である。しかし、授業アンケートからは学習への意欲の向上が感じられ、インターネットを利用した個別指導の充実等も含めて、これを成績向上にも結び付けられるようにしたいと考えている。

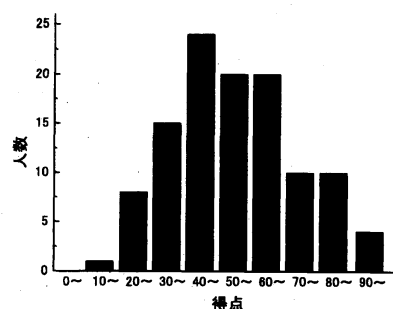


図 7: 期末試験の得点分布

参考文献

- [1] 藤井利江子, 戸塚英臣, 鈴木潔光 「グラフィックソフトは物理の理解を深めたか？」
大学の物理教育 11, 3, p. 146-150 (2005).
- [2] Wan M Saridan, “ An approach to teaching the equation of a travelling wave ”,
Physics Education. 27, 1, p. 39-41(1992).