

# Koornwinder 多項式の Littlewood-Richardson 係数

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 山口 航平

Kohei Yamaguchi

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

## 1 はじめに

一変数の  $q$  直交多項式として Askey-Wilson 多項式が良く知られている。これは  $q$  の他に  $a, b, c, d$  と書かれる四つのパラメータを持っていて、パラメータの特殊化で Jacobi 多項式の様々な  $q$  類似を復元する。

Koornwinder は [K92] において、Askey-Wilson 多項式の  $n$  変数版である  $q$  直交多項式系を導入した。本論文ではこれを Koornwinder 多項式と呼ぶ。  $n = 1$  なら Askey-Wilson 多項式そのものであり、  $n \geq 2$  なら  $q$  の他に  $a, b, c, d, t$  という五つのパラメータを含む。

さて、([M03, Chap. 1] の意味での) アフィンルート系に付随して得られる  $q$  差分作用素族の同時固有関数である  $q$  直交多項式  $P_\lambda$  が構成できた。これが Macdonald 多項式であり、その構成はアフィン Hecke 環を基礎とした Macdonald-Cherednik 理論 [M03] として知られている。

Koornwinder 多項式に話を戻そう。被約でないアフィンルート系のうち  $(C_n^\vee, C_n)$  型を考えると、その場合の Macdonald 多項式として Koornwinder 多項式を構成できることが野海 [野 95], Sahi [Sa99], Stokman [S00] らの研究により明らかになっている。結果的に、Koornwinder 多項式は Macdonald 多項式のうち最も多くのパラメータを含むものである、という位置づけがなされた。

Macdonald 多項式に関する基本的な問題はいくつかあるが、その一つとして Macdonald 多項式の Littlewood-Richardson 係数、すなわち「Macdonald 多項式の積の展開係数の明示公式を与えよ」という問題がある。この問題は長らく未解決問題であったが、これに大きな進展をもたらしたのが Yip [Yi12] である。そこでは非捩れ型ルート系の場合に構造係数  $c_{\lambda, \mu}^\nu$  のアルコーブ経路 (alcove walk) という組合せ論的対象による明示公式が与えられ [Yi12, Theorem 4.4], また  $\lambda$  が minuscule ウェイトの場合に簡略化した公式が導出され [Yi12, Corollary 4.7], 特に  $A$  型の Pieri 係数の Macdonald 公式が復元された [Yi12, Theorem 4.9]. 本稿では、捩れ型のアフィンルート系  $(C_n^\vee, C_n)$  型に付随する Macdonald 多項式、すなわち Koornwinder 多項式の Littlewood-Richardson 係数のアルコーブ経路を用いた明示公式について概説する [Ya20, Theorem 3.4.2].

## 2 ルート系の設定

### 2.1 $C_n$ 型ルート系

$C_n$  型のルートデータを  $(R, \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*, R^\vee, \mathfrak{h}_\mathbb{Z})$  と書く。つまり  $\mathfrak{h}_\mathbb{Z} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i^\vee$  と  $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i$  は階数  $n$  の格子で、それらに非退化双線形形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}_\mathbb{Z} \times \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\langle \epsilon_i^\vee, \epsilon_j \rangle = \delta_{i,j}$  が与えられている。以下ではこの双線形形式により  $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$  と  $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}$  を、また  $\epsilon_i$  と  $\epsilon_i^\vee$  を同一視する。ルートの集合  $R$  と余ルートの集合  $R^\vee$  は

$$R = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid i = 1, \dots, n\} \subset \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*, \quad R^\vee = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid i = 1, \dots, n\} \subset \mathfrak{h}_\mathbb{Z}$$

である. 本稿では正ルートの集合  $R_+ \subset R$  と正余ルートの集合  $R_+^\vee \subset R^\vee$  を

$$R_+ := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i < j\} \cup \{2\epsilon_i \mid i = 1, \dots, n\}, \quad R_+^\vee := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i < j\} \cup \{\epsilon_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

にとる. このとき  $R = R_+ \sqcup -R_+$ ,  $R^\vee = R_+^\vee \sqcup -R_+^\vee$  となる. また単純ルート  $\alpha_i \in R$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を

$$\alpha_1 := \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{n-1} := \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n := 2\epsilon_n$$

で定める. ルート  $\alpha \in R$  に対して余ルート  $\alpha^\vee \in R^\vee$  を  $\alpha^\vee := 2\alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}$  で定める. 単純ルートに対応する余ルート達は  $\alpha_1^\vee = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{n-1}^\vee = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n^\vee = \epsilon_n$  である.  $\alpha_i^\vee$  達を単純余ルートという.

各  $\alpha \in R$  に対して,  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^* = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$  の超平面  $H_\alpha := \{x \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* \mid \langle \alpha^\vee, x \rangle = 0\}$  に関する鏡映を  $s_\alpha$  と書く. 即ち

$$s_\alpha \cdot x := x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha, \quad x \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*.$$

また  $i = 1, \dots, n$  に対して  $s_i := s_{\alpha_i}$  と書く.  $C_n$  型の有限 Weyl 群  $W_0$  とは,  $s_1, \dots, s_n$  が生成する  $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*)$  の部分群であった. また  $W_0$  は生成元  $s_1, \dots, s_n$  と以下の関係式で定義される群でもあった.

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1 \quad (i = 1, \dots, n) \\ s_i s_j &= s_j s_i \quad (|i - j| > 1) \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2) \\ s_{n-1} s_n s_{n-1} s_n &= s_n s_{n-1} s_n s_{n-1} \end{aligned}$$

次に  $C_n$  型ルート系のウェイトの記号を導入する.  $i = 1, \dots, n$  に対し  $\omega_i := \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$  と定義し, これらを基本ウェイトと呼ぶ. 任意の  $i, j = 1, \dots, n$  に対して  $\langle \alpha_i^\vee, \omega_j \rangle = \delta_{i,j}$  となる. また  $\omega_i^\vee := \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ),  $\omega_n^\vee := \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)$  を基本余ウェイトという. 任意の  $i, j = 1, \dots, n$  に対して  $\langle \omega_i^\vee, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}$  となる. 最後にルート格子  $Q$  とウェイト格子  $P$  を以下で定める.

$$Q := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n \subset \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* = P := \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_n \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*. \quad (2.1)$$

有限 Weyl 群  $W_0 \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*)$  の  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$  への作用はウェイト格子  $P = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$  を保つ. この作用を,  $w \in W_0$ ,  $\lambda \in P$  に対して  $\lambda \mapsto w \cdot \lambda$  と書く.

## 2.2 $(C_n^\vee, C_n)$ 型アフィンルート系

$C_n$  型ルート系のウェイト格子  $P = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$  の群環を  $t(P)$  と書き,  $\lambda \in P$  に対する元を  $t(\lambda) \in t(P)$  と書く. つまり  $t(P) = \{t(\lambda) \mid \lambda \in P\}$ ,  $t(\lambda)t(\mu) = t(\lambda + \mu)$  ( $\lambda, \mu \in P$ ) である.  $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$  の拡大  $\tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{Z}^* := \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* \oplus \mathbb{Z}\delta$  とその係数拡大  $\tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^* := \tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{Z}^* \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$  を考える.  $t(P)$  の  $\tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^*$  への作用を

$$t(\lambda) \cdot (\mu + m\delta) := \mu + (m - \langle \mu, \lambda \rangle)\delta, \quad \mu + m\delta \in \tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^* = \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* \oplus \mathbb{R}\delta$$

で定義する. このとき有限 Weyl 群の元  $w \in W_0$  と  $t(\lambda) \in t(P)$  の  $\mathrm{GL}(\tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^*)$  における交換関係は  $wt(\lambda)w^{-1} = t(w \cdot \lambda)$  である.  $t(P)$  と  $W_0$  で生成される  $\mathrm{GL}(\tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^*)$  の部分群  $W$  を拡大アフィン Weyl 群と呼ぶ. 即ち

$$W := t(P) \rtimes W_0 \subset \mathrm{GL}(\tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^*). \quad (2.2)$$

元  $s := t(\epsilon_1)s_{2\epsilon_1} \in W$  の  $P = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$  への作用は  $s \cdot \epsilon_1 = \delta - \epsilon_1$ ,  $s \cdot \epsilon_i = \epsilon_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ) となるが, これはアフィンルート  $\alpha_0 := \delta - 2\epsilon_1 \in \tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{Z}^*$  が決める超平面  $H_{\alpha_0} := \{x \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* \mid \langle \alpha_0^\vee, x \rangle = 0\}$  に関する鏡映  $s_0 := s_{\alpha_0}$  と同じものである. ここで  $\alpha_0^\vee$  は  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^* = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$  の 1 次元拡大  $\tilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^* = \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* \oplus \mathbb{R}c$  の元  $\alpha_0^\vee := \frac{1}{2}c - \epsilon_1$  であり, 任意の  $x \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$  に対して  $\langle c, x \rangle = 1$  としている. (レベル 1 作用).

$W$  は生成元  $s_0, s_1, \dots, s_n$  と次の関係式で定まる群と同型である.

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1 & (i = 0, \dots, n) \\ s_i s_j &= s_j s_i & (|i - j| > 1) \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} & (i = 1, \dots, n-2) \\ s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} &= s_{i+1} s_i s_{i+1} s_i & (i = 0, n-1) \end{aligned}$$

以下  $W$  の元の長さといったら、これらの生成元による最短表示の長さのことを意味するものとする. 後で用いるために  $t(\epsilon_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の  $s_i$  達による最短表示を書いておく.

$$\begin{aligned} t(\epsilon_1) &= s_0 s_1 \cdots s_{n-1} s_n s_{n-1} \cdots s_2 s_1, \\ t(\epsilon_2) &= s_1 s_0 s_1 \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_2, \\ t(\epsilon_i) &= s_{i-1} \cdots s_0 s_1 \cdots s_n s_{n-1} \cdots s_i, \\ t(\epsilon_n) &= s_{n-1} \cdots s_1 s_0 s_1 \cdots s_n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

以上の記号を用いて,  $(C_n^\vee, C_n)$  **型アフィンルート系** [M03, (1.3.18)], [S00] を

$$S := \{\pm \epsilon_i + \frac{k}{2} \delta, \pm 2\epsilon_i + k\delta \mid k \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\} \cup \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j + k\delta \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq i < j \leq n\} \subset \tilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^* \tag{2.4}$$

で定義する. 正ルートの集合を

$$S_+ := \{\alpha + k\delta, \alpha^\vee + \frac{k}{2} \delta \mid \alpha \in R_+, \alpha^\vee \in R_+^\vee, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha + k\delta, \alpha^\vee + \frac{k}{2} \delta \mid \alpha \in R_-, \alpha^\vee \in R_-^\vee, k \in \mathbb{N}\}$$

で定義し,  $S_- := -S_+$  とすれば,  $S = S_+ \sqcup S_-$  となる. また  $\tilde{R} := R \cup R^\vee$  とし, 任意の  $\beta = \alpha + k\delta \in S$  ( $\alpha \in \tilde{R}, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ) に対して, 自然な射影  $S \ni \beta \mapsto \alpha \in \tilde{R}$  を  $\bar{\beta} := \alpha$  で表す. また  $\tilde{R}_+ := R_+ \cup R_+^\vee, \tilde{R}_- := -\tilde{R}_+$  としておく.

### 3 アルコーブ経路

Ram が [R06] で導入した alcove walk は Littelmann パスのアフィン Hecke 環における類似物で, Macdonald-Koornwinder 多項式の Ram-Yip 型公式 [RY11, OS18] や非振れ型 Macdonald 多項式の LR 係数に関する Yip の公式 [Yi12] で用いられる, 重要な組み合わせ論的対象である. 本稿ではその alcove walk のことをアルコーブ経路と呼ぶ. ここではアルコーブ経路に関する記号や用語を導入する.

まず  $(C_n^\vee, C_n)$  系のアフィンルート系のアルコーブを定義しよう.  $\beta = \alpha + k\delta \in S, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  を

$$\beta(v) = \langle \alpha, v \rangle + k \quad (v \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)$$

によって  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$  上の一次関数とみなす. アルコーブとは,  $\alpha \in S$  が決める超平面  $H_\alpha := \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \alpha(x) = 0\}$  の補集合  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \setminus \bigcup_{\alpha \in S} H_\alpha$  の連結成分のことをいう. 特にアルコーブ

$$A := \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \alpha_i(x) > 0 \ (i = 0, \dots, n)\}$$

を基本アルコーブという. 基本アルコーブの辺は超平面  $H_{\alpha_0}, H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_n}$  に囲まれている.  $W$  とアルコーブ全体の集合の間の写像

$$W \ni w \mapsto wA \in \pi_0(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \setminus \bigcup_{\alpha \in S} H_\alpha)$$

は全単射である. 各アルコーブ  $wA$  の境界は  $n+1$  個の超平面の部分集合からなるが, それらを  $wA$  の辺と呼ぶ.

アルコーブの各辺に対して、符号を次のように割り振る。アルコーブ  $wA$  は  $n+1$  枚の超平面  $\{H_{\gamma_i} \mid i=0, \dots, n\}$  で囲まれており、各  $i=0, \dots, n$  に対して  $H_{\gamma_i}$  は  $wA$  と  $ws_iA$  を隔てているものとする。このとき §2.2 の最後の段落の記号を用いて、

- $\overline{\gamma_i} \in \tilde{R}_+$  ならば  $wA$  側に  $+$ ,  $ws_iA$  側に  $-$
- $\overline{\gamma_i} \in \tilde{R}_-$  ならば  $wA$  側に  $-$ ,  $ws_iA$  側に  $+$

とする。例えば階数 2 の基本アルコーブ  $A$  に関する符号は図 3.1 のようになる。

$w \in W$  の最短表示  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$  を固定する。[Yi12, (2.2.1)] にならってルートの集合

$$\mathcal{L}(w) := \{\alpha_{i_1}, s_{i_1}\alpha_{i_2}, \dots, s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}\alpha_{i_r}\} \quad (3.1)$$

を導入する。  $\{H_\beta \mid \beta \in \mathcal{L}(w)\}$  は  $A$  と  $wA$  を隔てている超平面全体と解釈できる。また [Yi12, (2.2.2)] にならって、  $v, w \in W$  に対して、ルートの集合

$$\mathcal{L}(v, w) := (\mathcal{L}(v) \cup \mathcal{L}(w)) \setminus (\mathcal{L}(v) \cap \mathcal{L}(w)) \quad (3.2)$$

を導入すると、  $\{H_\beta \mid \beta \in \mathcal{L}(v, w)\}$  は、アルコーブ  $vA$  と  $wA$  を隔てている超平面全体となる。再び最短表示  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \in W$  を固定する。このとき  $W$  の中で  $w$  より Bruhat 順序  $\preceq_B$  で小さいものの全体  $\{v \in W \mid v \preceq_B w\}$  と長さ  $r$  のビット全体  $\{0, 1\}^r$  の間には次の全単射がある。

$$\{0, 1\}^r \ni (b_1, \dots, b_r) \mapsto s_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_r}^{b_r} \in \{v \in W \mid v \preceq_B w\}.$$

新たに  $z \in W$  と  $v \in W$ ,  $v \preceq_B w$  を取る。上の全単射で  $v$  に対応するビット  $b = (b_1, \dots, b_r)$  をとり、  $v = s_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_r}^{b_r}$  と書き直す。このときアルコーブ  $zA$  から開始するアルコーブの列

$$p = (p_0 := zA, p_1 := zs_{i_1}^{b_1}A, p_2 := zs_{i_1}^{b_1}s_{i_2}^{b_2}A, \dots, p_r := zs_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_r}^{b_r}A)$$

のことを、  $z$  を始点とする  $\vec{w} := (i_1, \dots, i_r)$  型のアルコーブ経路という。アルコーブ経路全体の集合を  $\Gamma(\vec{w}, z)$  と書く。また次の例 3.1 のように、アルコーブ経路を折れ線で表示する。

**例 3.1** ( $(C_2^\vee, C_2)$  型のアルコーブ経路).  $w = s_1s_2s_1s_0$ ,  $z = e \in W$  として、二つのアルコーブ経路

$$p_1 := (A, A, s_2A, s_2s_1A, s_2s_1s_0A), p_2 := (A, s_1A, s_1s_2A, s_1s_2s_1A, s_1s_2s_1s_0A) \in \Gamma(\vec{w}, z)$$

は図 3.2 のように表される。但し灰色で表示したアルコーブは基本アルコーブ  $A$  である。また超平面上の数字  $i=0, 1, 2$  は、その超平面が  $H_{\alpha_i}$  の  $W$  軌道に属することを意味する。

以下、アルコーブ経路  $p \in \Gamma(\vec{w}, z)$  と  $k=1, \dots, r$  に対して  $p$  の  $k$  番目のステップとは遷移  $p_{k-1} \rightarrow p_k$  のことと約束する。ビット  $b_k$  と  $k$  番目のステップの対応は表 3.1 のようになる。  $b_k=1$  の場合のステップを通過 (crossing),  $b_k=0$  の場合のステップを折り返し (folding) と呼ぶ。

$z, w \in W$  および最短表示  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$  を固定する。アルコーブ経路  $p = (zA, \dots, zs_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_r}^{b_r}A) \in \Gamma(\vec{w}, z)$  に対し、  $e(p) \in W$  を

$$e(p) := zs_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_r}^{b_r},$$

つまり  $p$  の終点に対応した  $W$  の元とする。アルコーブの辺に対して図 3.1 の様にしてつけた符号によって、  $p \in \Gamma(\vec{w}, z)$  の各ステップを表 3.2 の四種類に分類する。

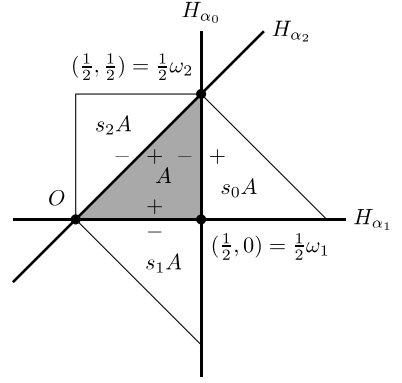


図 3.1: 階数 2 の基本アルコーブ  $A$  の符号



える.

さて, アフィン Hecke 環  $H(W)$  は  $T_0, T_1, \dots, T_n$  で生成され以下の関係式で定義される  $\mathbb{K}$  代数であった.

$$(T_i - t_i^{\frac{1}{2}})(T_i + t_i^{-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (i = 0, \dots, n),$$

$$T_i T_j = T_j T_i \quad (|i - j| > 1, (i, j) \notin \{(n, 0), (0, n)\}), \quad (4.1)$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2),$$

$$T_i T_{i+1} T_i T_{i+1} = T_{i+1} T_i T_{i+1} T_i \quad (i = 0, n-1). \quad (4.2)$$

関係式 (4.1)–(4.2) を組紐関係式と呼ぶ. また  $w \in W$  に対して  $Y^w \in H(W)$  を次で定義する.  $w$  の最短表示  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$  をとり,  $p$  を  $A$  から  $wA$  へのアルコーブ経路  $(A, s_{i_1} A, \dots, s_{i_1} \cdots s_{i_r} A = wA) \in \Gamma(\vec{w}, e)$  とする. このとき

$$Y^w := T_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots T_{i_r}^{\epsilon_r}$$

とする. 但し  $\epsilon_k$  は, 表 3.2 の分類において,  $p$  の  $k$  番目のステップが正の通過なら 1, 負の通過なら  $-1$  とする. これは  $w \in W$  の最短表示の取り方によらない. また  $H(W)$  の関係式から  $\{Y^w \mid w \in W\}$  は互いに可換であることが従う [野 95, §2].

ここで  $t(\epsilon_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の最短表示 (2.3) を用いて  $Y^{t(\epsilon_i)}$  を計算すると

$$Y^{t(\epsilon_i)} = T_{i-1}^{-1} \cdots T_1^{-1} T_0 \cdots T_{n-1} T_n T_{n-1} \cdots T_i \quad (4.3)$$

となる [M03, §3]. 以下

$$\mathbb{K}[Y^{\pm 1}] = \mathbb{K}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_n^{\pm 1}] \subset H(W), \quad Y_i := Y^{t(\epsilon_i)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

で  $Y_1, \dots, Y_n$  の Laurent 多項式環を表す. このとき  $\mathbb{K}$  線形空間としての同型  $H(W) \simeq H(W_0) \otimes \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$  が成立する.

次に [野 95] によって導入された  $H(W)$  の基本表現を思い出す.  $n$  変数有理函数体  $\mathbb{K}(x) = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$  への代数準同型  $H(W) \mapsto \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$  が

$$T_i \mapsto t_i^{\frac{1}{2}} + t_i^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - t_i x_i / x_{i+1}}{1 - x_i / x_{i+1}} (s_i - 1) \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

$$T_0 \mapsto t_0^{\frac{1}{2}} + t_0^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - u_0^{\frac{1}{2}} t_0^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x_1^{-1})(1 + u_0^{-\frac{1}{2}} t_0^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x_1^{-1})}{1 - q x_1^{-2}} (s_0 - 1), \quad (4.4)$$

$$T_n \mapsto t_n^{\frac{1}{2}} + t_n^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - u_n^{\frac{1}{2}} t_n^{\frac{1}{2}} x_n)(1 + u_n^{-\frac{1}{2}} t_n^{\frac{1}{2}} x_n)}{1 - x_n^2} (s_n - 1)$$

で定まり, 更にその像は Laurent 多項式の自己準同型環  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}]) \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$  に含まれる. この  $H(W)$  の表現を多項式表現と呼ぶ. 以降, この多項式表現により  $H(W)$  を  $\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}])$  の部分環とみなす.

(4.4) の右辺は  $q$  差分作用素であるが, それらは  $(C_n^{\vee}, C_n)$  型の Dunkl 作用素と呼ばれている.

多項式表現 (4.4) は次のようにコンパクトに書ける. まず

$$u_i := \begin{cases} 1 & (i = 1, \dots, n-1) \\ u_0 & (i = 0) \\ u_n & (i = n) \end{cases}, \quad x^{\alpha_i} := \begin{cases} x_i / x_{i+1} & (i = 1, \dots, n-1) \\ q x_1^{-2} & (i = 0) \\ x_n^2 & (i = n) \end{cases}$$

とすれば,

$$T_i = t_i^{\frac{1}{2}} + t_i^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - u_i^{\frac{1}{2}} t_i^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha_i}{2}})(1 + u_i^{-\frac{1}{2}} t_i^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha_i}{2}})}{1 - x^{\alpha_i}} (s_i - 1) \quad (4.5)$$

と共通に書ける. また  $c_i(z), d_i(z) \in \mathbb{K}(z)$  を

$$c_i(z) := t_i^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - u_i^{\frac{1}{2}} t_i^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}})(1 + u_i^{-\frac{1}{2}} t_i^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}})}{1 - z}, \quad d_i(z) := t_i^{\frac{1}{2}} - c_i(z) = \frac{(t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) + (u_i^{\frac{1}{2}} - u_i^{-\frac{1}{2}})z^{\frac{1}{2}}}{1 - z} \quad (4.6)$$

と定義すれば, (4.5) は次のように書き直せる.

$$T_i = t_i^{\frac{1}{2}} + c_i(x^{\alpha_i})(s_i - 1) = t_i^{\frac{1}{2}} s_i + d_i(x^{\alpha_i})(1 - s_i) = c_i(x^{\alpha_i}) s_i + d_i(x^{\alpha_i}). \quad (4.7)$$

更にアフィンルート  $\alpha + k\delta \in S$  に対して

$$q^{\text{sh}(\alpha+k\delta)} := q^{-k}, \quad t^{\text{ht}(\alpha+k\delta)} := \prod_{\beta \in R_+^s} t^{\frac{1}{2}\langle \beta^\vee, \alpha \rangle} \prod_{\beta \in R_+^\ell} (t_0 t_n)^{\frac{1}{2}\langle \beta^\vee, \alpha \rangle}$$

と定義する. 但し  $R_+^s := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ ,  $R_+^\ell := \{2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ . このとき  $\lambda \in S$  に対して次が成立する.

$$Y^\lambda 1 = q^{\text{sh}(\lambda)} t^{\text{ht}(\lambda)}.$$

最後にアフィン Hecke 環の多項式表現における Lusztig 関係式を思い出しておこう. ウェイト格子  $P = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$  の各元  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に対して  $x^\lambda \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$  を次で定義する.

$$x^\lambda := x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}].$$

**事実 4.1** (Lusztig 関係式, [L89, Proposition 3.6]). 任意の  $i = 0, \dots, n$  と  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$  に対し

$$T_i x^\lambda - x^{s_i \cdot \lambda} T_i = d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i \cdot \lambda}).$$

但し  $d_i(z)$  は (4.6) で定義した有理式.

## 4.2 ダブルアフィン Hecke 環と非対称 Koornwinder 多項式

次にダブルアフィン Hecke 環  $DH(W)$  を導入しよう. 多項式表現 (4.4) を用いてアフィン Hecke 環を部分  $\mathbb{K}$  代数  $H(W) \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}])$  と見なす. そして有限 Hecke 環  $H(W_0) \subset H(W)$  を,  $T_1, \dots, T_n$  の生成する部分  $\mathbb{K}$  代数として定義する. そして  $DH(W) \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}])$  を  $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ ,  $H(W_0)$ ,  $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$  の生成する部分  $\mathbb{K}$  代数として定義する. つまり

$$DH(W) := \langle \mathbb{K}[x^{\pm 1}], H(W_0), \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \rangle \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}]).$$

非捩れ型のダブルアフィン Hecke 環に Cherednik 反対合が存在するように,  $DH(W)$  にも次で決まる反対合が存在する [Sa99, §3].

$$\begin{aligned} \phi(x_i) &= Y_i^{-1}, & \phi(Y_i) &= x_i^{-1}, & \phi(T_i) &= T_i \quad (i = 1, \dots, n), \\ \phi(u_n) &= t_0, & \phi(t_0) &= u_n. \end{aligned}$$

このとき  $\phi(T_0) = T_{s_{2\epsilon_1}}^{-1} x_1^{-1}$  となる. 実際, (4.3) より  $T_0 = Y_1 T_{s_{2\epsilon_1}}^{-1}$ ,  $T_{s_{2\epsilon_1}} = T_1 \cdots T_n T_{n-1} \cdots T_1$  である. 以後, 次の記号を用いる.

$$T_i^\vee := \phi(T_i) \quad (i = 0, \dots, n).$$

次に [M03, §5.6] にならって絡作用素を導入する. そのためにまず  $DH(W)$  を拡大した

$$\widehat{DH}(W) := \langle \mathbb{K}(x), H(W_0), \mathbb{K}(Y) \rangle \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$$

を考える。但し  $\mathbb{K}(x), \mathbb{K}(Y)$  はそれぞれ  $x_i, Y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の有理関数体を表す。  $i = 0, \dots, n$  に対して  $S_i^x \in \widetilde{DH}(W)$  が

$$S_i^x := T_i + \varphi_i^+(x^{\alpha_i}) = T_i^{-1} + \varphi_i^-(x^{\alpha_i})$$

で定まる。但し

$$\varphi_i^\pm(z) := \mp \frac{(t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm\frac{1}{2}}(u_i^{\frac{1}{2}} - u_i^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}} \in \mathbb{K}(z). \quad (4.8)$$

$S_i^x$  を  $x$  側の絡作用素と呼ぶ。(4.6) と (4.7) から

$$\varphi_i^+(z) = d_i(z), \quad S_i^x = T_i - d_i(x^{\alpha_i}) = c_i(x^{\alpha_i})s_i$$

となることに注意しておく。また Lusztig 関係式 (事実 4.1) から,  $S_i^x$  は任意の  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$  に対して

$$S_i^x x^\lambda = x^{s_i(\lambda)} S_i^x \quad (4.9)$$

を満たす。また [M03, (5.5.2)] より,  $S_i^x$  ( $i = 0, \dots, n$ ) は (4.1)–(4.2) と同じ組紐関係式を満たす:

$$\begin{aligned} S_i^x S_j^x &= S_j^x S_i^x (|i - j| > 1), \\ S_i^x S_{i+1}^x S_i^x &= S_{i+1}^x S_i^x S_{i+1}^x (i = 1, \dots, n-2), \\ S_i^x S_{i+1}^x S_i^x S_{i+1}^x &= S_{i+1}^x S_i^x S_{i+1}^x S_i^x (i = 0, n-1). \end{aligned} \quad (4.10)$$

特に任意の  $w \in W$  に対して, 最短表示  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$  を一つ取って

$$S_w^x := S_{i_1}^x \cdots S_{i_p}^x \in \widetilde{DH}(W)$$

とすれば, これは最短表示の取り方によらず, well-defined に定まる。

また  $\phi$  は  $\widetilde{DH}(W)$  に延長できる。実際,  $\widetilde{DH}(W)$  は非可換環  $DH(W)$  の可換部分環  $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$  及び  $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$  での Ore 局所化であり,  $\phi$  はこれら可換部分環上で同型である。得られた  $\widetilde{DH}(W)$  上の反対合も同じ記号  $\phi$  で表す。この延長した  $\phi$  により  $Y$  側の絡作用素  $S_i^Y \in \widetilde{DH}(W)$  を導入する:

$$\begin{aligned} S_i^Y &:= \phi(S_i^x) = T_i + \psi_i^+(Y^{-\alpha_i}) = T_i^{-1} + \psi_i^-(Y^{-\alpha_i}) \quad (i = 1, \dots, n), \\ S_0^Y &:= \phi(S_0^x) = T_0^\vee + \psi_0^+(qY_1^2) = (T_0^\vee)^{-1} + \psi_0^-(qY_1^2). \end{aligned}$$

但し (4.8) の  $\varphi_i^\pm(z)$  の  $\phi$  による像を

$$\begin{aligned} \psi_i^\pm(z) &:= \varphi_i^{\pm 1}(z) = \mp \frac{t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}}{1 - z^{\pm 1}} \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \psi_0^\pm(z) &:= \mp \frac{(u_n^{\frac{1}{2}} - u_n^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm\frac{1}{2}}(u_0^{\frac{1}{2}} - u_0^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}}, \\ \psi_n^\pm(z) &:= \mp \frac{(t_n^{\frac{1}{2}} - t_n^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm\frac{1}{2}}(t_0^{\frac{1}{2}} - t_0^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

と表した。(4.9) に  $\phi$  を施すことで, 任意の  $i = 0, \dots, n$  と  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$  に対して関係式

$$S_i^Y Y^\lambda = Y^{s_i(\lambda)} S_i^Y \quad (4.12)$$

が成り立つ。 $S_i^Y$  達も (4.10) と同じ組紐関係式を満たすから, 任意の  $w \in W$  に対して最短表示  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$  を一つ取って

$$S_w^Y = S_{i_1}^Y \cdots S_{i_p}^Y \in \widetilde{DH}(W)$$

とすれば, これは最短表示によらず well-defined である。

最後に  $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$  について, (2.2) により  $t(\mu)W_0 \subset W$  とみなし,  $w(\mu) \in W$  を次で定める。

$$w(\mu) \text{ は } t(\mu)W_0 \text{ の元であって, } W \text{ の元と見たときに長さが最短のもの.} \quad (4.13)$$

**事実 4.2** ([Sa99, §6], [S00, Theorem 4.8]).  $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$  に対して,

$$E_{\mu}(x) := S_{w(\mu)}^Y 1$$

は  $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$  の元である. これを非対称 Koornwinder 多項式という.

(4.12) より  $E_{\mu}(x)$  ( $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$ ) は  $\{Y^{\lambda} \mid \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*\}$  の同時固有函数である. また,  $E_{\mu}(x)$  の最高次  $x^{\mu}$  の係数を 1 に正規化すれば, [Sa99, S00] で定義されている非対称 Koornwinder 多項式と一致する.

### 4.3 Koornwinder 多項式

最後に非対称 Koornwinder 多項式を対称化して得られる Koornwinder 多項式を紹介する.

§2.1 の記号を用いて, 支配的ウェイト (dominant weight) の集合  $(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+ \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$  を次で定める:

$$(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+ := \{\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^* \mid \langle \alpha_i^{\vee}, \mu \rangle \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

$\mu \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+$  に対して

$$W_{\mu} := \{w \in W_0 \mid w \cdot \mu = \mu\} \subset W_0 \quad (4.14)$$

を  $C_n$  型 Weyl 群  $W_0$  における  $\mu$  の安定化部分群とする. また, その最長元を以下のように表す.

$$w_{\mu} \in W_{\mu}.$$

次に §2.2 及び §4.1 の記号を思い出そう. 特に  $W$  は拡大アフィン Weyl 群,  $S$  はアフィンルート系 (2.4),  $\{t_{\alpha} \mid \alpha \in S\}$  は  $W$  不変なパラメータ,  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}, t_{\alpha}^{\frac{1}{2}})$  は基礎体であった. 各  $w \in W$  に対して

$$t_w := \prod_{\beta \in \mathcal{L}(w)} t_{\beta} \in \mathbb{K}$$

と定義する. 但し  $\mathcal{L}(w) \subset S$  は (3.1) で与えたもの. もし  $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \in W$  が最短表示ならば  $t_w = t_{i_1} \cdots t_{i_r}$  となる. そして  $\mu \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+$  に対して安定化部分群  $W_{\mu}$  の Poincaré 多項式  $W_{\mu}(t) \in \mathbb{K}$  を次で定義する.

$$W_{\mu}(t) := \sum_{u \in W_{\mu}} t_u.$$

次に対称化作用素  $U \in H(W_0)$  を次で定義する.

$$U := \sum_{w \in W_0} t_{w_0 w}^{-\frac{1}{2}} T_w. \quad (4.15)$$

これは [M03, (5.5.9)] よりこれは次の性質を満たす.

$$UT_i = Ut_i^{\frac{1}{2}}, \quad T_i U = t_i^{\frac{1}{2}} U \quad (i = 1, \dots, n).$$

以下  $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^{W_0} := \{f \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}] \mid w \cdot f = f, w \in W_0\}$  で対称 Laurent 多項式環を表す. また (2.1) より  $\mu \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+ \subset P$  なので, (4.13) より  $w(\mu) \in t(\mu)W_0 \subset W$  が定まることに注意する.

**事実 4.3** ([S00, Theorem 6.6]). 任意の  $\mu \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+$  に対して

$$P_{\mu}(x) := \frac{1}{t_{w_{\mu}}^{-\frac{1}{2}} W_{\mu}(t)} U S_{w(\mu)}^Y 1 = \frac{1}{t_{w_{\mu}}^{-\frac{1}{2}} W_{\mu}(t)} U E_{\mu}(x)$$

は  $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^{W_0}$  の元である. これをモニック対称 Koornwinder 多項式, または単に **Koornwinder 多項式** と呼ぶ.

$U S_{w(\mu)}^Y 1$  の最高次  $x^{\mu}$  の係数は  $t_{w_{\mu}}^{-\frac{1}{2}} W_{\mu}(t)$  であるので,  $P_{\mu}(x)$  の  $x^{\mu}$  の係数は 1 である.

## 5 Koornwinder 多項式の Littlewood-Richardson 係数

非据れ型アフィンルート系の Macdonald 多項式  $P_\lambda(x)$  に関する Littlewood-Richardson 係数, つまり積の展開  $P_\lambda(x)P_\mu(x) = \sum_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu P_\nu(x)$  に現れる係数  $c_{\lambda,\mu}^\nu$  について, Yip は [Yi12, Theorem 4.4] でアルコーブ経路を用いた組み合わせ論的表示を得た. ここではその  $(C_n^\vee, C_n)$  型類似について概説する. 方針は [Yi12, §§3.1–4.1] と全く同じであるが, 各ステップで非自明な調整が必要になる. 主結果では, Yip [Yi12] が導入した色付きアルコーブ経路を用いる. それは, アルコーブ経路の折り返しステップに黒色または灰色の色を付けたもののことである. 色付きアルコーブ経路  $p$  のうち全ての  $p_k$  が dominant chamber  $C$  に含まれるものなす集合を  $\Gamma_2^C(\vec{w}, z)$  と書く.

**定理 1** ([Ya20, Theorem 3.4.2]).  $\lambda, \mu \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+$  を任意の支配的ウェイトとする.  $W_\lambda$  を有限 Weyl 群  $W_0$  の  $\lambda$  に関する安定化部分群 (4.14) とし,  $W^\lambda$  を商  $W_0/W_\lambda$  の完全代表系であって各元の長さが最短であるものとする. また, (4.13) で定められる拡大アフィン Weyl 群  $W$  の元  $w(\mu)$  について, その最短表示を一つ取る. このとき

$$P_\mu(x)P_\lambda(x) = \frac{1}{t_{w_\mu}^{-\frac{1}{2}} W_\mu(t)} \sum_{v \in W^\lambda} \sum_{p \in \Gamma_2^C(\vec{w}(\mu)^{-1}, (vw(\lambda))^{-1})} A_p B_p C_p P_{-w_0, \text{wt}(p)}(x).$$

但し  $w_0 \in W_0$  は最長元であり,  $\text{wt}(p) \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$  は色付きアルコーブ経路  $p$  の終点に対応する元  $e(p) \in W$  から定まるウェイト. 各係数  $A_p, B_p, C_p$  は因子化していて,  $A_p$  と  $B_p$  は

$$A_p := \prod_{\alpha \in w(\lambda)^{-1}\mathcal{L}(v^{-1}, v_\lambda^{-1})} \rho(\alpha), \quad B_p := \prod_{\alpha \in \mathcal{L}(t(\text{wt}(p))w_0, e(p))} \rho(-\alpha).$$

と書ける. ここで  $\rho$  は  $R_+^s := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ ,  $R_+^\ell := \{2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  を用いて

$$\rho(\alpha) := \begin{cases} t^{\frac{1}{2}} \frac{1 - t^{-1} q^{\text{sh}(-\alpha)} t^{\text{ht}(-\alpha)}}{1 - q^{\text{sh}(-\alpha)} t^{\text{ht}(-\alpha)}} & (\alpha \notin W.\alpha_n) \\ t_n^{\frac{1}{2}} \frac{(1 + t_0^{\frac{1}{2}} t_n^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2} \text{sh}(-\alpha)} t^{\frac{1}{2} \text{ht}(-\alpha)}) (1 - t_0^{-\frac{1}{2}} t_n^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2} \text{sh}(-\alpha)} t^{\frac{1}{2} \text{ht}(-\alpha)})}{1 - q^{\text{sh}(-\alpha)} t^{\text{ht}(-\alpha)}} & (\alpha \in W.\alpha_n) \end{cases},$$

$$q^{\text{sh}(\alpha)} := q^{-k}, \quad t^{\text{ht}(\alpha)} := \prod_{\gamma \in R_+^\ell} t^{\frac{1}{2} \langle \gamma^\vee, \beta \rangle} \prod_{\gamma \in R_+^\ell} (t_0 t_n)^{\frac{1}{2} \langle \gamma^\vee, \beta \rangle} \quad (\alpha = \beta + k\delta \in S)$$

で与えられる. 記号  $\mathcal{L}$  については §3 の (3.2) を参照せよ. また  $C_p = \prod_{k=1}^r C_{p,k}$  の各  $C_{p,k}$  は,  $p$  の  $k$  番目のステップに対して次のように定める.

$$C_{p,k} := \begin{cases} 1 & k \text{ 番目のステップが正の通過} \\ \prod_{k \in \xi_{\text{des}}(p)} n_{i_k} (q^{\text{sh}(-h_k(p))} t^{\text{ht}(-h_k(p))}) & \text{負の通過} \\ \psi_{i_k}^+ (q^{\text{sh}(-h_k(p))} t^{\text{ht}(-h_k(p))}) & \text{灰色で正の折り返し} \\ \psi_{i_k}^- (q^{\text{sh}(-h_k(p))} t^{\text{ht}(-h_k(p))}) & \text{灰色で負の折り返し} \\ -\psi_{i_k}^+ (q^{\text{sh}(-\beta_k)} t^{\text{ht}(-\beta_k)}) & \text{黒色の折り返しで } p^* \text{ の } k \text{ 番目のステップが正} \\ -\psi_{i_k}^- (q^{\text{sh}(-\beta_k)} t^{\text{ht}(-\beta_k)}) & \text{黒色の折り返しで } p^* \text{ の } k \text{ 番目のステップが負} \end{cases}$$

ここに  $\psi_i^\pm(z), n_i(z)$  は

$$\psi_i^\pm(z) := \mp \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1 - z^{\pm 1}} \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

$$\psi_0^\pm(z) := \mp \frac{(u_n^{\frac{1}{2}} - u_n^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm \frac{1}{2}} (u_0^{\frac{1}{2}} - u_0^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}}, \quad \psi_n^\pm(z) := \mp \frac{(t_n^{\frac{1}{2}} - t_n^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm \frac{1}{2}} (t_0^{\frac{1}{2}} - t_0^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}}$$

及び

$$\begin{aligned} n_i(z) &:= \frac{1-tz}{1-z} \frac{1-t^{-1}z}{1-z} & (\beta \in W.\alpha_i, i=1, \dots, n-1), \\ n_0(z) &:= \frac{(1-u_n^{\frac{1}{2}}u_0^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}})(1+u_n^{\frac{1}{2}}u_0^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}})}{1-z} \frac{(1+u_n^{-\frac{1}{2}}u_0^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}})(1-u_n^{-\frac{1}{2}}u_0^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}})}{1-z} & (\beta \in W.\alpha_0), \\ n_n(z) &:= \frac{(1-t_n^{\frac{1}{2}}t_0^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}})(1+t_n^{\frac{1}{2}}t_0^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}})}{1-z} \frac{(1+t_n^{-\frac{1}{2}}t_0^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}})(1-t_n^{-\frac{1}{2}}t_0^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}})}{1-z} & (\beta \in W.\alpha_n). \end{aligned}$$

である.

定理 1 の証明の方針を説明しよう. 非対称 Koornwinder 多項式 [Sa99, S00] を  $E_\mu(x) \in \mathbb{K}[X^{\pm 1}]$  と書く.

- $\{E_\mu(x) \mid \mu \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+\}$  は  $\mathbb{K}[X^{\pm 1}]$  の  $\mathbb{K}$  基底.
- $E_\mu(x)$  を対称化して  $P_\mu(x)$  が得られる (事実 4.2). 正確には, 対称化作用素  $U$  (4.15) を用いると

$$P_\mu(x) = \frac{1}{t_{w_\mu}^{-\frac{1}{2}} W_\mu(t)} U E_\mu(x).$$

証明の大筋は Yip [Yi12] の議論の安直な  $(C_n^\vee, C_n)$  類似であり, 四つのステップに分けられる. 係数や和の範囲を略記して説明しよう.

- (i)  $\lambda, \mu \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+$  に対し, 非対称 Koornwinder 多項式と単項式の積の展開公式

$$x^\mu E_\lambda(x) = \sum_{p \in \Gamma^C} c_p E_{\varpi(p)}(x)$$

を求める ([Ya20, corollary 3.1.5]). ここで  $p$  は dominant chamber  $C$  に含まれるアルコーブ経路を走る.

- (ii) 非対称 Koornwinder 多項式の明示公式である Ram-Yip 型公式

$$E_\mu(x) = \sum_{p \in \Gamma} f_p t_{d(p)}^{\frac{1}{2}} x^{\text{wt}(p)}$$

を用いる. 和の  $p$  はアルコーブ経路を走る. これは Ram と Yip が [RY11] において非振れ型の非対称 Macdonald 多項式に対して導出し, Orr と Shimozono が [OS18] において非対称 Koornwinder 多項式に対して導出したものである.

- (iii) 以上を用いると非対称 Koornwinder 多項式と Koornwinder 多項式の積をダブルアフィン Hecke 環の拡大  $\widetilde{DH}(W)$  の中で計算することができて, そのアルコーブ経路に関する和として表示できる. 更に和を色付きアルコーブ経路に関する和に書き換えることができて, 最終的な結果は [Ya20, Proposition 3.3.2] の

$$E_\mu(x) P_\lambda(x) = \sum_{v \in W^\lambda} \sum_{p \in \Gamma_2^C} A_p C_p E_{\varpi(p)}(x).$$

- (iv)  $E_\mu(x)$  を対称化して定理 1 が得られる.

## 6 Askey-Wilson 多項式の場合

一変数の場合の Koornwinder 多項式は Askey-Wilson 多項式であった. ルート系の階数が 1 である為, Askey-Wilson 多項式の Littlewood-Richardson 係数は定理 1 より簡単になることが期待される. ここではそのことについて議論する.

準備として, 階数が 1 の場合のルート系の情報をまとめておく. 一次元 Euclid 空間  $V = \mathbb{R}\epsilon^\vee$  とその双対空間  $V^* = \mathbb{R}\epsilon$  を考える.  $C_1$  型ルート系は  $R = \{\pm 2\epsilon\} \subset V^*$  で, 単純ルートは  $\alpha_1 = 2\epsilon$ , 基本ウェイトは  $\omega = \epsilon$

である. ウェイト格子は  $P = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^* = \mathbb{Z}\epsilon \subset V^*$  であり, 支配的ウェイトの集合は  $(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+ = \mathbb{N}\epsilon$  となる. 有限 Weyl 群  $W_0$  は  $s_1 := s_{\alpha_1}$  の生成する位数 2 の群であり, その最長元は  $w_0 = s_1$ . また  $(C_1^V, C_1)$  型アフィンルート系は  $S = \{\pm 2\epsilon + k\delta, \pm\epsilon + \frac{k}{2}\delta \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $\alpha_0 = \delta - 2\epsilon$  であり, 拡大アフィン Weyl 群  $W$  は  $s_1$  と  $s_0 := s_{\alpha_0}$  が生成する群となる. 分解  $W = t(P) \rtimes W_0$  (2.2) は,  $t(P) = \langle t(\epsilon_1) = s_0 s_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}$  と  $W_0 = \langle s_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の半直積となる.

支配的ウェイト  $\lambda = l\omega = l\epsilon$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) に付随する Askey-Wilson 多項式  $P_\lambda(x)$  を

$$P_l(x) = P_l(x \mid q, t_0, t_1, u_0, u_1)$$

と書く. パラメータが五つであることに注意しておく.

まずはウェイトが簡単な場合から考えよう. LR 係数のウェイト  $\lambda$  もしくは  $\mu$  を minuscule ウェイトに特殊化した場合を,  $A$  型のときに従い Pieri 係数と呼ぶ.

$C_n$  型ルート系の minuscule ウェイトは  $\omega_1$  のみなので, Askey-Wilson 多項式については  $\mu = \omega$  の場合を考えることになる. そこで 1 次の Askey-Wilson 多項式  $P_1(x) = P_\omega(x)$  を書き下してみよう. 以降の計算では, 定理 1 に現れた  $\rho(\alpha)$  ( $\alpha \in S$ ) を用いるので, それを階数 1 の場合を書く

$$\rho(\alpha) := t_1^{\frac{1}{2}} \frac{(1 + q^{\frac{k}{2}} t_0^{\frac{1}{2}} t_1^{-\frac{1}{2}} (t_0 t_1)^{-\frac{j}{2}}) (1 - q^{\frac{k}{2}} t_0^{-\frac{1}{2}} t_1^{-\frac{1}{2}} (t_0 t_1)^{-\frac{j}{2}})}{1 - q^k (t_0 t_1)^{-j}} \quad (\alpha = 2j\epsilon + k\delta \in S). \quad (6.1)$$

**補題 6.1.** [Ya20, Lemma 4.4.1] minuscule ウェイト  $\omega$  における Askey-Wilson 多項式  $P_1(x)$  は

$$P_1(x) = x + x^{-1} + \rho(2\delta - \alpha_1) \psi_0^-(qt_0 t_1) + t_1^{\frac{1}{2}} \psi_0^+(qt_0 t_1) + \psi_1^+(q^2 t_0 t_1) \psi_0^-(qt_0 t_1).$$

但し  $\psi_k^\pm(z)$  ( $k = 0, 1$ ) は (4.11) で  $n = 1$  として得られるもので, 以下のようになる.

$$\psi_0^\pm(z) := \mp \frac{(u_1^{\frac{1}{2}} - u_1^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm\frac{1}{2}}(u_0^{\frac{1}{2}} - u_0^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}}, \quad \psi_1^\pm(z) := \mp \frac{(t_1^{\frac{1}{2}} - t_1^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm\frac{1}{2}}(t_0^{\frac{1}{2}} - t_0^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}}.$$

**注意 6.2.** パラメータ  $(t_0, t_1, u_0, u_1, t)$  を Askey-Wilson 多項式のパラメータ  $(a, b, c, d, t)$  で読み替えよう. パラメータの対応は

$$(t_0, t_1, u_0, u_1, t) = (-q^{-1}ab, -cd, -a/b, -c/d, t)$$

とも書けること, また  $abcd = qt_0 t_n$  であることを用いて計算すると

$$P_1(x) = x + x^{-1} + \frac{\pi s - s'}{1 - \pi}, \quad \pi := abcd, \quad s := a + b + c + d, \quad s' := a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1}.$$

[AW85, p.5] の  $n$  次 Askey-Wilson 多項式  $p_n(z)$  と比較すると,  $p_1(z) = 2(1 - \pi)z + \pi s - s'$  より

$$(1 - \pi)P_1(x) = p_1((x + x^{-1})/2)$$

となり, 規格化因子を除いて合致する.

**命題 6.3.** [Ya20, Proposition 4.1.3] 任意の支配的ウェイト  $\lambda = l\omega \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+$ ,  $l \in \mathbb{N}$  に対し

$$P_l(x)P_l(x) = P_{l+1}(x) + F_l P_l(x) + G_l P_{l-1}(x),$$

$$F_l := \rho(-2l\delta + \alpha_1)(-\psi_0^-(q^{2l+1}t_0 t_1) + \psi_0^-(qt_0 t_1)) + \rho(2l\delta - \alpha_1)(-\psi_0^+(q^{2l-1}t_0 t_1) + \psi_0^+(qt_0 t_1)),$$

$$G_l := \rho(2l\delta - \alpha_1)\rho(-2(l-1)\delta + \alpha_1)n_0(q^{2l-1}t_0 t_1).$$

但し  $\rho(\alpha)$  は (6.1),  $\psi_0^\pm(z)$ ,  $n_0(z)$  は定理 1 に現れたものと同様で, 以下で与えられる.

$$n_0(z) := \frac{(1 - u_1^{\frac{1}{2}} u_0^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}})(1 + u_1^{\frac{1}{2}} u_0^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}})}{1 - z} \frac{(1 + u_1^{-\frac{1}{2}} u_0^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}})(1 - u_1^{-\frac{1}{2}} u_0^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}})}{1 - z}.$$

命題 6.3 は定理 1 を特殊化することで与えられるが, その場合に対応するアルコブ経路と因子  $A_p, B_p, C_p$  は表 6.1 の通りである. 但し, 実線で黒色のアルコブ経路を表し, 点線で灰色のアルコブ経路を表している.

| $v = s_1$ |     |                             |                                  |                             |
|-----------|-----|-----------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| $p^*$     | $p$ | $A_p$                       | $B_p$                            | $C_p$                       |
|           |     | 1                           | 1                                | 1                           |
|           |     | 1                           | $\rho(-2l\delta + \alpha_1)$     | $-\psi_0^-(q^{2l+1}t_0t_1)$ |
|           |     | 1                           | $\rho(-2l\delta + \alpha_1)$     | $\psi_0^-(qt_0t_1)$         |
| $v = e$   |     |                             |                                  |                             |
| $p^*$     | $p$ | $A_p$                       | $B_p$                            | $C_p$                       |
|           |     | $\rho(2l\delta - \alpha_1)$ | $\rho(-(2l-2)\delta + \alpha_1)$ | $n_0(q^{2l-1}t_0t_1)$       |
|           |     | $\rho(2l\delta - \alpha_1)$ | 1                                | $-\psi_0^+(q^{2l-1}t_0t_1)$ |
|           |     | $\rho(2l\delta - \alpha_1)$ | 1                                | $\psi_0^+(qt_0t_1)$         |

表 6.1: アルコブ経路

**注意 6.4.** 注意 6.2 に続いて, パラメータ  $(t_0, t_1, u_0, u_1, t)$  を Askey-Wilson 多項式のパラメータ  $(a, b, c, d, t)$  で読み替えると,  $P_l(x)$  の漸化式は

$$P_1(x)P_l(x) = P_{l+1}(x) + F_lP_l(x) + G_lP_l(x),$$

$$F_l := \frac{f_l + (\pi s' - s)}{1 - \pi}, \quad f_l := q^{l-1} \frac{(1 + q^{2l-1}\pi)(qs + \pi s') - q^{l-1}(1 + q)\pi(s + qs')}{(1 - q^{2l-2}\pi)(1 - q^{2l}\pi)},$$

$$G_l := \frac{g_l \gamma_{l-1}}{\gamma_l}, \quad g_l := (1 - q^l) \frac{(1 - q^{l-1}ab)(1 - q^{l-1}ac)(1 - q^{l-1}ad)(1 - q^{l-1}bc)(1 - q^{l-1}bd)(1 - q^{l-1}cd)}{(1 - q^{2l-2}\pi)(1 - q^{2l-1}\pi)},$$

$$\pi := abcd, \quad s := a + b + c + d, \quad s' := a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1},$$

$$\gamma_l := (q^{l-1}\pi; q)_l = (1 - q^{l-1}\pi)(1 - q^l\pi) \cdots (1 - q^{2l-2}\pi)$$

となる.  $l = 0$  の場合は  $\rho(-\alpha_1) = 0$  より  $F_1 = 0$  となって, 漸化式は自明になることに注意する. また [AW85, (1.24)–(1.27)] の漸化式

$$2zp_l(z) = h_l p_{l+1}(z) + f_l p_l(z) + g_l p_{l-1}(z), \quad h_l := \frac{1 - q^{l-1}\pi}{(1 - q^{2l-1}\pi)(1 - q^{2l}\pi)}, \quad p_0(z) = 1, \quad p_{-1}(z) = 0$$

と比較すると,  $P_l(x) = \gamma_l^{-1} p_l((x+x^{-1})/2)$  の下で一致することが確認できる. 特に  $P_l(x)$  は [AW85, (1.15)] の  $q$  超幾何級数表示を持つことが分かる.

## 謝辞

本稿はプレプリント [Ya20] に基づいて執筆したものです. 私の指導教員である柳田 伸太郎 先生 には予稿に目を通して頂き, 計算の誤りや記号の誤植, 議論の誤りなどの指摘, 手直しをして下さり, 多くの有益なご助言を頂きました. この場を借りて感謝の意を表します. また修士時代の指導教員である野海 正俊 先生にはセミナーを通して, 多くの有益なご助言と励ましの言葉を頂きました. この場を借りて感謝の意を表します.

## 参考文献

- [AW85] R. Askey, J. Wilson, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize the Jacobi polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., **54** (1985), no. 319.
- [C92] I. Cherednik, *Double Affine Hecke algebras, Knizhnik–Zamolodchikov equations, and Macdonald’s operators*, Int. Math. Res. Not., **9** (1992), 171–179.
- [K92] T.H. Koornwinder, *Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC*, Contemp. Math., **138** (1992), 189–204.
- [L89] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. Amer. Math. Soc., **2** (1989), 599–635.
- [M95] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1995.
- [M03] I. G. Macdonald, *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, Cambridge Tracts in Mathematics **157**, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [OS18] D. Orr, M. Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald–Koornwinder polynomials*, J. Algebraic Combin., **47** (2018), no. 1, 91–127.
- [R06] A. Ram, *Alcove walks, Hecke algebras, spherical functions, crystals and column strict tableaux*, Pure Appl. Math. Q., **2** (4) (2006), 963–1013.
- [RY11] A. Ram, M. Yip, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, Adv. Math., **226** (2011), 309–331.
- [Sa99] S. Sahi, *Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality*, Ann. Math., **150** (1999), 267–282.
- [S00] J.V. Stokman, *Koornwinder Polynomials and Affine Hecke Algebras*, Int. Math. Res. Not., **19** (2000), 1005–1042.
- [Yi12] M. Yip, *A Littlewood–Richardson rule for Macdonald polynomials*, Math. Z., **272** (2012), 1259–1290.
- [Ya20] K. Yamaguchi, *A Littlewood–Richardson rule for Koornwinder polynomials*, arXiv:2009.13963.
- [野 95] 野海 正俊, *Macdonald–Koornwinder 多項式と affine Hecke 環*, 数理解析研究所講究録, **919** (1995), 44–55.