

有限 G 集合のカテゴリ－の スパンと表現論への応用.

北大理 吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)

§ 1. Introduction.

有限群の指標環を結ぶいくつかの写像がある. 以下 G を有限群, $R(G)$ を有限群 G の指標環とする. $H \leq K \leq G$, $g \in G$ に対し, 3 種類の線型写像がある:

$$\text{Ind}_H^K : R(H) \rightarrow R(K) : \alpha \mapsto \alpha^K \quad (\text{誘導指標})$$

$$\text{Res}_H^K : R(K) \rightarrow R(H) : \beta \mapsto \beta_H \quad (\text{制限指標})$$

$$\text{Con}_H^{g^2} : R(H) \rightarrow R(H^{g^2}) : \alpha \mapsto \alpha^{g^2} \quad (\text{共役指標}).$$

ここで, $H^{g^2} = g^{-1}Hg$ であり, α^{g^2} は $\alpha^{g^2}(h^{g^2}) = \alpha(h)$ で定義される.

これらを組み合わせて, $H, K \leq G$, $x \in G$, $A \leq H^x \cap K$ に対し, 写像 $[H, x, A, K]$ を次で定義する.

$$[H, x, A, K] : R(H) \rightarrow R(K) : \alpha \mapsto \alpha^x \Big|_A^K.$$

このとき,

$$(*) \quad [H, R \times R, A^R, K] = [H, x, A, K] \quad (R \in H, R \in K).$$

と存る. さらに, $[H, x, A, K]$ と $[K, y, B, L]$ の合成 $R(H) \rightarrow R(K) \rightarrow R(L)$ を計算すると

$$\begin{aligned}
 (**) \quad [H, x, A, K] \cdot [K, y, B, L] &= \sum_{R \in H|K/B^y} [H, xRy, A^{Ry} \cap B, L] \\
 &\left(= \sum_{R \in K} \frac{|A^{Ry} \cap B|}{|A| \cdot |B|} [H, xRy, A^{Ry} \cap B, L] \right)
 \end{aligned}$$

と存る.

今度は逆に, $H, K \leq G$ に対し, 記号の集合

$$\{[H, x, A, K] \mid x \in G, A \leq H^x \cap K\}$$

を生成系とし, 上の(*) を関係式とする $\mathcal{A}$ -グループ群を $\{H, K\}_G$ とする. さらに(**)によ, 2 bilinear map $\{H, K\}_G \times \{K, L\}_G \rightarrow \{H, L\}_G$ を定義する. この bilinear map は結合的であり, とくに $\{H, H\}_G$ は環に存ることが示される. 加群としれば,

$$\{H, K\}_G \cong \bigoplus_{g \in H|G/K} \Omega(H^g \cap K).$$

ここで Ω は Burnside 環である.

$R(H)$ は $\{H, H\}_G$ -加群である. また, と一般に, α が G -

functor なら, bilinear map $\mathcal{A}(H) \times \{H, K\}_G \rightarrow \mathcal{A}(K)$:

$(\alpha, [H, x, A, K]) \mapsto \alpha^x \cdot A^K$ は結合的 $(\alpha \cdot (\lambda \mu)) = (\alpha \cdot \lambda) \mu$) であ

り, $\mathbb{C} \subset \mathbb{Q}(H)$ は $\{H, H\}_G$ 加群である.

次のことを目標とする.

目標. $R \otimes_{\mathbb{Z}} \{H, H\}_G$ の中心原始巾等元(c.p.i.)を求める.

ここで, R は可換環, $H \leq G$ である.

$R \otimes \{H, H\}_G$ の c.p.i. は, G -functor Ω に対する $\Omega(H)$ の直和分解を与える. このことは, 直既約加群のブロックの分割や各種の induction 定理に関係がある.

§2. 例と巾等元公式.

$\{H, H\}_G$ は, 群 G に関するいさゝか環と関係がある.

(1) $H = 1$ の場合.

$$\{1, 1\}_G = \langle [1, x, 1, 1] \mid x \in G \rangle \cong \mathbb{Z}G \text{ (group ring)}.$$

(K, R, F) を splitting p -modular system とする. $K = (R)$, $\text{ch } K = 0$, $F = R/\text{rad}(R)$, $\text{ch}(F) = p$. $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ とする.

$$KG \cong \prod_{i=1}^r M_{n_i}(K), \quad n_i = \deg \chi_i = \chi_i(1)$$

$\text{cpi}(KG)$ は次の形をとりうる.

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_i(x)} x$$

$\text{cpi}(RG)$ は次の形をとりうる.

$$e_B = \sum_{\chi_i \in B} e_i \quad (B \in \mathcal{BC}(G))$$

$\text{cpi}(FG)$ は, *lifting idempotent* より, e_B の *mod p* reduction $\bar{e}_B$ である.

(2) $H = G$ の場合

$\{G, G\}_G = \langle [G, 1, A, G] \mid A \leq G \rangle \cong \Omega(G)$ (Burnside 環)
対応は $[G, 1, A, G] \leftrightarrow [G/A]$ による. Burnside ring $\Omega(G)$ は, 有限 G 集合のカテゴリ-の直和と直積に関する Grothendieck ring である.

各 $S \leq G$ に対し, 環準同型 φ_S を

$$\varphi_S: \mathbb{R} \otimes \Omega(G) \longrightarrow \mathbb{R}: [X] \longmapsto |X^S|,$$

(X^S は固定点集合) で定義すると, $\mathbb{R}$ が $|G|$ -torsion free なら

$$\varphi = (\varphi_S): \mathbb{R} \otimes \Omega(G) \longrightarrow \prod_{(S) \in C_G} \mathbb{R} \quad (\text{ring mono})$$

である. $|G|^{-1} \in \mathbb{R}$ なら, φ は同型である. (C_G は, G の部分群の共役類である).

$|G|^{-1} \in \mathbb{R}$ のとき, $\text{cpi}(\mathbb{R} \otimes \Omega(G))$ は次の形をもちいる.

$$e_{G,S} = \frac{1}{|N_G(S)|} \sum_{D \leq S} |D| \mu(D, S) [G/D] \quad ((S) \in C_G)$$

ここで, μ は subgroup lattice の Möbius function.

$$\varphi_T(e_{G,S}) = 1 \quad \text{if } S \leq T, \quad \varphi_T(e_{G,S}) = 0 \quad \text{if } S \not\leq T.$$

$p' \nmid R, |G|_{p'} \in R$ のとき, $\text{cpi}(R \otimes \Omega(G))$ は

$$e_{G, S}^p = \sum_{(T) \in C_G: O^p(T) \subseteq S} e_{G, S} \quad ((S) \in C_G, O^p(S) = S)$$

$\equiv \mathbb{Z}$, $O^p(T) = \langle x \in T \mid x \text{ は } p'\text{-element} \rangle$.

(3) $H \trianglelefteq G$ の場合.

この場合, $\{H, H\}_G$ は *twisted group ring* $\Omega(H) \circ \mathbb{Z}[G/H]$ である. ただし, G/H を共役により, $\mathbb{Z} \Omega(H)$ に作用させる.

(4) Hecke 環との関係.

$$\omega: \{H, K\}_G \longrightarrow \mathbb{Z}[H \backslash G/K]: [H, x, A, K] \mapsto |H^x \cap K: A| \cdot (HxK)$$

は *epi* であり, $\omega(\lambda\mu) = \omega(\lambda)\omega(\mu)$ である. ω は Hecke 環 $\mathbb{Z}[H \backslash G/H] (\cong \text{End}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}[H \backslash G]))$ は $\{H, H\}_G$ の剰余環である.

Burnside ring の中算元分解は 2 つの応用をもつ. (似たことは group ring の場合にも言える).

(a) 係数の整数性.

$O^p(S) = S \leq G$ のとき, $e_{G, S}^p$ における $[G/H]$ の係数は p -local integer である. ω は, $S = H = 1$ のとき, その係数は $|G|^{-1} \sum_S \mu(1, S)$ (S は G の p -subgrp 全体を動く) となる. よって $\sum_S \mu(1, S) \equiv 0 \pmod{|G|_p}$. これは, p -subgroups の lattice の Euler 標数に関する Brown と Quillen の定理と

2.3

(b) Induction 定理への応用.

$\mathbb{Z}_{(p)}$ を $\mathbb{Z}$ の $p\mathbb{Z}$ での局所化とする. 中等元公式を観察すると, $e_{G,S}^p \in \text{Ind}_H^G(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \Omega(H))$ となることがわかる. ここで, $O^p(S) = S \trianglelefteq H \leq G$, $H/S \in \text{Hyp}_p(N_G(S)/S)$ とする. 一方, 指標環 $R(G)$ は $\Omega(G)$ 加群で $(\theta, [G/H] := \theta_H^G)$, noncyclic $T \leq G$ に対し, $e_{G,T} \cdot R(G) = 0$ となることがわかる. よって

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{(p)} \otimes R(G) &= \bigoplus_{\substack{(S) \in C_G: S \text{ is cyclic } p\text{-gp.}}} \mathbb{Z}_{(p)} \otimes e_{G,S}^p \cdot R(G) \\ &= \sum \left\{ \text{Ind}_H^G(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes R(H)) \mid H \text{ is hyper } p\text{-elem} \right\} \end{aligned}$$

これより, 指標環に関する hyper-elementary induction が得られる.

§ 3. 主要定理.

G を有限群, $H \leq G$, (K, R, F) を splitting p -modular system とする.

$S \leq G$, $N := N_G(S)$, $\bar{N} = N/S$, $\alpha \in \text{Irr}(\bar{N})$, $b \in \text{BC}(\bar{N})$ に対し, $K \otimes \{H, H\}_G$ の元 $E_S(H)$, $E_S^p(H)$, $E_{S,\alpha}(H)$, $E_{S,b}^p(H)$ を次のように定義する. ($\forall T \leq G$ に対し, $W_T := N_G(T)/T$ とおく).

$$E_S(H) := \frac{1}{|N| \cdot |H|} \sum_{\substack{A \leq S \\ g \in G: S^g \subseteq H}} |A| \mu(A, S) [H, 1, A^g, H]$$

$$E_S^P(H) := \sum_{(T) \in C_G: O^p(T) = S} E_T(H) \quad (S \in E' \cup O^p(S) = S)$$

$$E_{S, \alpha}(H) := \frac{\alpha(1)}{|H| \cdot |N|^2} \sum_{\substack{A \leq S \\ g \in G: S^g \subseteq H}} \sum_{n \in N} \alpha(n^{-1}) |A| \mu(A, S) [H, n^g, A^g, H]$$

$$E_{S, b}^P(H) := \sum_{\substack{(T) \in C_G \\ O^p(T) = S}} \sum_{b' \in \text{Br}(WT)} \sum_{\alpha \in b'} E_{T, \alpha}(H) \quad (O^p(S) = S)$$

: $b' \bar{N} = b$

最後の $b' \bar{N} = b$ は, Brauer from $Z(F\bar{N}) \xrightarrow{Z(FN\bar{N}(\bar{T}))} Z(FN\bar{N}(\bar{T})/\bar{T}) \cong Z(WT)$ によ, $2 \quad b' \in \text{Br}(WT) = \text{Br}(N\bar{N}(\bar{T})/\bar{T})$ と $b \in \text{Br}(\bar{N})$ とが対応することを意味する.

$$E_S(H) \neq 0 \Leftrightarrow S \leq_G H,$$

$$E_S^P(H) \neq 0 \Leftrightarrow S \leq_G H.$$

$$E_{S, \alpha}(H) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq \pi_{(H|G)^S} \quad (\pi \text{ は置換表現の指標}),$$

$$E_{S, b}^P(H) \neq 0 \Leftrightarrow \exists \alpha \leq \pi_{(H|G)^S} \text{ st } \alpha \in b.$$

定理 A. 任意の可換環 R に対し,

$$R \otimes \Omega(G) \longrightarrow Z(R \otimes \{H, H\}_G) : [A|G] \mapsto \sum_{g \in A|G/H} [H, 1, A^g, H, H]$$

は環準同型で, $e_{G, S}(\text{cp} : (R \otimes \Omega(G)))$, $e_{G, S}^P(\text{cp} : (Z_{(p)} \otimes \Omega(G)))$

の像が $E_S(H)$, $E_S^P(H)$ である.

定理 B.

$$cpi(K \otimes \{H, H\}_G) = \{E_{\xi, \alpha}(H) \neq 0 \mid (\xi) \in C_G, \alpha \in Irr(W\xi)\}$$

定理 C.

$$cpi(R \otimes \{H, H\}_G) = \{E_{\xi, b}^r(H) \neq 0 \mid (\xi) \in C_G, D^r(\xi) = \xi, b \in BL(W\xi)\}$$

$$cpi(F \otimes \{H, H\}_G) = \{\bar{E} \mid 0 \neq E \in cpi(R \otimes \{H, H\}_G)\}.$$

$E_{\xi, b}^r(H)$ における $[H, x, A, H]$ の係数は次で与えられる.

$$(*) \frac{|A|}{|N_H(A)|} \sum_{\substack{A \leq T \leq H \\ : D^r(T) \not\subseteq S}} \sum_{\substack{b' \in BL(WT) \\ : b' \bar{N} \sim b}} \sum_{\substack{u \in N_G(T) \cap H \times N_H(A)}} \frac{\mu(A, T)}{|N_G(T)|} p_{b'}(u^{-1}) \in R$$

$$= \sum_{\alpha' \in b' \cap Irr(WT)} \alpha'(1) \alpha' \in R(WT), \bar{N}' = WT.$$

$\chi \in R, \xi = 1, A = 1, B \in BL(G)$ の defect 0 のとき,

$$\frac{\chi(1)}{|G|} \cdot \frac{1}{|H|} \sum_{\gamma \in H \times H} \chi(\gamma) \in R \quad \therefore \sum_{\gamma \in H \times H} \chi(\gamma) \in |H|_p \cdot \bar{\mathbb{Z}}.$$

(最後の結果は, $|G : C_G(\gamma)| \cdot \chi(\gamma) / \chi(1) \in \bar{\mathbb{Z}}$ から簡単に出る).

中等元公式 (定理 B, C) は新しい型の induction 定理を与えるかもしれない. $\{G, G\}_G \cong \Omega(G) \mathbb{Z}$, $E_{\xi, \alpha}(G) = 0$ if $\alpha \neq 1_{W\xi}$ だから, $H = G$ の場合は古典的な結果 (Dress, Artin, Brauer, ...) を与える.

$(\alpha, \tau, \rho, \sigma)$ を $\mathbb{C}$ 係数の G -functor とする. $S \leq G$ に対し, $W_S (= N_G(S)/S)$ は共役により, $\mathbb{Z} \Omega(S)$ に作用している.

したが、2 直和分解 $Q(S) = \bigoplus_{\alpha} Q(S)_{\alpha}$ ($\alpha \in \text{Irr}(WS)$)

を得る. $\{H, H\}_G$ は $Q(H)$ に, $\theta \cdot [H, x, A, H] = \theta^x_A H$ に

作用し、作用から、直和分解

$$Q(H) = \bigoplus_{(S) \in C_G} \bigoplus_{\alpha \in \text{Irr}(WS)} Q(H)_{S, \alpha},$$

$$(\text{ここ、} Q(H)_{S, \alpha} = Q(H) \cdot E_{S, \alpha}(H))$$

を得る. このとき次が言える.

$$Q(H)_{S, \alpha} \subseteq \{ \varphi^g H \mid \varphi \in Q(S)_{\alpha}, g \in G, S^g \subseteq H \}$$

$Q = \mathbb{C} \otimes R$ (R は指標環から得られる G -functor) の場合, θ

$\in \mathbb{C} \otimes R(H)$ は

$$(*) \quad \theta = \sum_{(S), \alpha} \theta_{S, \alpha}, \quad \theta_{S, \alpha} := \theta \cdot E_{S, \alpha}(H), \alpha \in \text{Irr}(WS), (S) \in C_G$$

と分解される. $\text{supp } \theta_{S, \alpha} \subseteq \{ x^g \in H \mid g \in G, \langle x \rangle = S \}$, $\theta_{S, \alpha} \in$

$\sum \{ \text{Im}(\text{Ind}_T^H) \mid T \subseteq H, T \leq S \}$ であり $(*)$ は Artin の定理を含

んでいる. したが、 $\theta_{S, \alpha} \neq 0$ に関係があるが、 $S \not\leq G$

H の場合、 S が noncyclic の場合、 $\text{Ker } \alpha \neq C_G(S)$ の場合に、

$\theta_{S, \alpha} = 0$ となる. $\exists \in N_G(S) \subseteq H \text{ 且 } G \text{ で } \alpha \neq 1$ のとき、

θ が有理指標で $\alpha \neq 1$ のとき $\theta_{S, \alpha} = 0$ となる.

これに似たを用えよう. $E_{S, B}^P(H)$ にお

ける $[H, x, H, H]$ ($x \in N_G(H)$) の係数は、

$$O^P(H) = S \Rightarrow \frac{1}{|WH|} \sum_{b \in \text{Br}(WH): b\bar{N} = B} P_b(x^{-1})$$

$$O^p(H) \not\leq G \Rightarrow 0$$

2. ある, $\exists \neq$, $H, L \leq G$, $z \in G$, $A \leq H^x$, L に對し,

$$E_{\mathcal{S}, \mathcal{A}}(H) \cdot [H, x, A, L] = [H, x, A, L] \cdot E_{\mathcal{S}, \mathcal{A}}(L)$$

と成る. $\mathcal{S} \neq \emptyset$, R 上の G -functor $\mathcal{A}$ に對し, $H \mapsto \mathcal{A}(H) \cdot E_{\mathcal{S}, \mathcal{B}}(H)$

は $\mathcal{A}$ の direct summand である. $\mathcal{A}$ が直既約と仮定すると,

ある $\mathcal{S} \leq G \leq \mathcal{B} \in \mathcal{BL}(WH)$ があ, $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot E_{\mathcal{S}, \mathcal{B}}$ と成る.

このとき, $\forall \theta \in \mathcal{A}(H)$ に對し,

$$\theta = \theta \cdot E_{\mathcal{S}, \mathcal{B}}(H) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } O^p(H) \not\leq G \\ \theta \cdot \sum_{b \in \mathcal{BL}(WH): b^{WH} = B} e_b & \text{if } O^p(H) = \mathcal{S} \end{cases} \pmod{\mathcal{I}(H)}.$$

== 2. $e_b \in \mathbb{Z}(R[WH])$ は b に對する c.p.i. $\mathbb{Z} \neq \mathbb{C}$

$$\mathcal{I}(H) := \sum_{A \neq H} \mathcal{A}(A)^H \text{ 且 } L \neq \emptyset, L \neq G, \mathcal{A} \neq \emptyset,$$

$$O^p(H) \not\leq G \Rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(H) = 0$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(H) \text{ の simple } WH\text{-factor} \in \bigcup \{b \in \mathcal{BL}(W) \mid b^{WH} = B\}.$$

例として, V を直既約 FG 加群 $\in \mathcal{B} \in \mathcal{BL}(G)$, $C_V(H) := \{v \in V \mid$

$vh = v \ \forall h \in H\}$ とすれば,

$$(***) \begin{cases} H \text{ が } P \text{ 部分群でない} \Rightarrow C_V(H) = \sum \{I_m(T_{r_A}^H) \mid A \neq H\}, \\ C_V(H) / \sum_{A \neq H} I_m(T_{r_A}^H) \text{ の simple factor} \in \bigcup \{b \in \mathcal{BL}(WH) \mid b^G = B\} \end{cases}$$

$$== 2. \ T_{r_A}^H: C_V(A) \rightarrow C_V(H): v \mapsto \sum_{R \in A \setminus H} v_R.$$

§ 4. Spans.

定義. pull-back $\mathcal{E}$ も $\mathcal{C}$ small category $\mathcal{C}$ に対し, Span と呼ばれるカテゴリ $\mathcal{S}_p(\mathcal{C})$ $\mathcal{E}$ 次で定義する.

$$(i) \text{Obj}(\mathcal{S}_p(\mathcal{C})) = \text{Obj}(\mathcal{C})$$

(ii) $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し, $\mathcal{S}_p(\mathcal{C})$ における X から Y への morphism は, $[f', f''] := (X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y)$ の形をとり, さらに,

$$(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y) = (X \xleftarrow{g'} B \xrightarrow{g''} Y)$$

$$\Leftrightarrow \exists h: A \xrightarrow{\sim} B \quad \text{st.} \quad \begin{array}{ccccc} & & f' & A & & f'' \\ & & \swarrow & & \searrow & \\ X & & & & & Y \\ & \nwarrow & h & \downarrow & \nearrow & \\ & g' & B & & g'' & \end{array}$$

とする.

(iii) $[f', f'']: X \leftarrow A \rightarrow Y$ と $[g', g'']: Y \leftarrow B \rightarrow Z$ の合成を, $f' \circ g' = [\hat{g}' \circ f', \hat{f}'' \circ g'']: X \leftarrow C \rightarrow Z$, $C =$

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\hat{f}''} & B & \xrightarrow{g''} & Z \\ \hat{g}' \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow g' & & \\ A & \xrightarrow{f''} & Y & & \\ f' \downarrow & & & & \\ X & & & & \end{array}$$

(p.b. = pull-back)

により, $\mathcal{S}_p$ 定義する.

$\mathcal{S}_f^G$ を有限 G 集合のカテゴリとする. $\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)$ は bi-product をもち, $\mathcal{S}_p$ が $\mathcal{S}_f^G$ 上の semi-additive である, 可換環

k に対し, 係数拡大 $(k \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G))(X, Y) := k \otimes_{\bar{k}} \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)(X, Y)$ により 2 k -additive category $k \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)$ を得る.

$$k\{X, Y\} := k \otimes_{\bar{k}} \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)(X, Y), \quad (X, Y \in \mathcal{S}_f^G)$$

とあり, 加群とし Ω は, $k\{X, Y\} \cong k \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(\mathcal{S}_f^G/X \times Y)$, Ω は $+ \times X$ に関する Gro 環である.

$k\{H|G, K|G\}$ は,

$$[H, x, A, K] := [f', f''] : H|G \xleftarrow{f'} A|G \xrightarrow{f''} K|G$$

$$Hx \xleftarrow{\quad} A \xrightarrow{\quad} K$$

$(x \in G, A \subseteq Hx, K)$ の形の元により, Ω 生成される. 積は Ω で述べたものと一致する.

定義. permutation kG -modules と kG -maps のカテゴリーを Hecke カテゴリーと言ひ, H_{kG} と書く.

kG -map $f: kX \rightarrow kY$ ($X, Y \in \mathcal{S}_f^G$) は行列の形で表わせる. $f(x) = \sum_{y \in Y} f_{xy} y$ とし f の行列形は $(f_{xy})_{x \in X, y \in Y}$ である. f が kG -hom という条件は, $f_{xy} = f_{xg, yg}$ ($g \in G$) と表わせる. とくに $H_k \cong \underline{Mat}_k \cong k \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f)$.

C_G を G の部分群の共役類とする. 各 $S \leq G$ に対し, additive functor $\Psi_S: \mathbb{Z} \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G) \rightarrow H_{\mathbb{Z}[WS]}$ を,

$$X \longmapsto \mathbb{Z}[X^S],$$

$$(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y) \longmapsto (|f'^{-1}(x) \cap f''^{-1}(y) \cap A^S|)_{x \in X^S, y \in Y^S}$$

により, Ω を定義する. さらに,

$$\Psi = (\Psi_s) : \mathbb{Z} \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G) \longrightarrow \prod_{(s) \in C_G} \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[w_s]}$$

とする.

定理 1. Ψ は埋め込みである. 即ち,

$$\psi : \mathbb{Z}\{X, Y\} \longrightarrow \prod_{(s) \in C_G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[w_s]}(\mathbb{Z}[X^s], \mathbb{Z}[Y^s]).$$

さらに $\text{Coker } \psi$ は *torsion* 群.

この定理を証明するために次の定理を $\Sigma = \mathcal{S}_f^G / X \times Y$ などに適用する.

Σ を small $\mathcal{S}_f$ -topos, $\Omega(\Sigma)$ を Σ に関する Gro 環 (これは Σ の Burnside 環ともいう), $\mathcal{I}$ を Σ の連結な object の同型類の完全代表系とする. 各 $I \in \mathcal{I}$ に対し,

$$\varphi_I : \Omega(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{Z} : [X] \longmapsto |\Sigma(I, X)|$$

$$\varphi = (\varphi_I) : \Omega(\Sigma) \longrightarrow \prod_{I \in \mathcal{I}} \mathbb{Z}$$

とする.

定理 2. φ は ring hom としても mono.

前半はトカスの基本的結果から出る. mono を示すには,
 $X, Y \in \Sigma$, $|\Sigma(I, X)| = |\Sigma(I, Y)| \quad \forall I \in \mathcal{I} \Rightarrow X \cong Y$
 を示せばよい. そのために, $\forall A \in \Sigma$ に対し, $\#\{f : A \rightarrow X\}$
 $= \#\{g : A \rightarrow Y\}$ であることを, A の商対象の個数 ($|\text{Sub}(\Omega A)|$)
 に関する帰納法で証明すればよい.

定理 1 より, $\text{cpi}(\mathbb{C} \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)) \xrightarrow{\Psi} \text{cpi}(\prod_{(s)} H_{\mathbb{C}}[W_s]) \leftrightarrow \cup \{ \text{Irr}(W_s) \mid (s) \in C_G \}$ となる. Ψ の逆写像 Ψ^{-1} により, 定理 B の $\{ E_{s,r}(H) \mid H \leq G \}$ が $\mathbb{C} \otimes \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)$ の cpi を与えることがわかる. こうして定理 B が証明される.

定義. $s \leq G$, $N = N_G(s)$, $W_s := N/s$ とする. functor $\mathcal{S}_f^G \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{S}_f^N \xrightarrow{\text{pr}} \mathcal{S}_f^{W_s} : X \mapsto X|_N \mapsto X^s$ から誘導される span や Hecke カテゴリリー間の functor を Brauer functor とする. $\text{Br} : \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G) \rightarrow \mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^{W_s})$ は常に functor である.

Lemma. $\text{ch}(k) = p$, s が k -subgp のとき k により, $\text{Br} : H_{kG} \rightarrow H_k[W_s]$ は functor であり, k ring hom

$$\begin{array}{ccc} \beta : Z(kG) & \longrightarrow & Z(k[W_s]) \\ \parallel & & \parallel \\ Z(H_{kG}) & & Z(H_k[W_s]) \end{array}$$

を誘導する. さらに, β を Brauer 準同型とすれば,

$$\begin{array}{ccc} Z(kG) & \xrightarrow{\beta} & Z(k[W_s]) \\ & \searrow \alpha & \nearrow \gamma \\ & Z(kN) & \end{array}$$

(K, R, F) を splitting P -modular system とする. 定理 2 より,

$$Z(R \otimes \mathcal{O}_P(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{Z(\Psi)} \bigoplus_{(\xi) \in C_G} Z(H_{R[\omega\xi]}) \cong \bigoplus_{(\xi) \in C_G} Z(R[\omega\xi])$$



$$\bigoplus_{(\xi) \in C_G} \bigoplus_{b \in \text{Br}(\omega\xi)} e_b \cdot Z(R[\omega\xi]),$$

上の補題により, $\text{cpr}(R \otimes \mathcal{O}_P(\mathcal{O}_F))$ は, 定理 C の $E_{\xi, b}^P$ の形の $Z(K \otimes \mathcal{O}_P(\mathcal{O}_F))$ の元の和であることがわかる.

補題. $\tau: K \otimes \Omega(F) \longrightarrow Z(K \otimes \mathcal{O}_P(\mathcal{O}_F))$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ [A] \end{matrix} \longmapsto \tau(A) = (\tau(A)(x))_{x \in \mathcal{O}_F},$$

$$\tau(A)(x) = [\pi, \pi]: x \xleftarrow{\pi} A \times x \xrightarrow{\pi} x$$

は ring hom 2-mono.

$e_{G, \xi}$ や $e_{G, \xi}^P$ の τ による像が定理 A の E_{ξ} や E_{ξ}^P である.

定理 3. $|G|_p^f \in R$, $\xi = \mathcal{O}^P(\xi) \leq G$, のとき, Brauer function

により,

$$E_{\xi}^P \cdot (K \otimes \mathcal{O}_P(\mathcal{O}_F)) \cong E_{\xi}^P \cdot (K \otimes \mathcal{O}_P(\mathcal{O}_F^{\omega\xi})).$$

と 2, 定理 C を証明するには, $|\text{cpr}(E_{\xi}^P \cdot (R \otimes \mathcal{O}_P(\mathcal{O}_F)))| \geq |\text{Br}(\omega\xi)|$ を示せばよい. 定理 3 より, $\xi = 1$ の場合に証明す

9.4. "既約 $E_i^p(F \otimes_{\mathcal{S}_f} \mathcal{S}_f^G)$ -module" とは F 上の G を
 ロジ-的 G -functor のことであり, $C_{\mathbb{F}_G}$ が G をロジ-的 G -
 functor に作用するから, 既約 $E_i^p(F \otimes_{\mathcal{S}_f} \mathcal{S}_f^G)$ -module は $|Bl$
 $(G)|$ 個のブロックに分解される. これより, $\text{cpi}(E_i^p(\mathbb{R} \otimes_{\mathcal{S}_f} \mathcal{S}_f^G))$
 $= \text{cpi}(E_i^p(F \otimes_{\mathcal{S}_f} \mathcal{S}_f^G)) = |Bl(G)|$ となる定理が示される.