

ある非線形楕円型境界値問題の 特異解の族について

大阪大学理学研究科
浜武 亜希子 鈴木 貴
(Akiko Hamatake and Takashi Suzuki)
1996 年 11 月

1 Introduction

$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 < 1\}$ に対し、次の方程式の解の族 $\{(\lambda, u(x))\}$ について考察したい。

$$-\Delta u = 2\lambda K(x) e^u \quad \text{in } D \quad (1)$$

with

$$u = 0 \quad \text{on } \partial D \quad (2)$$

ここで λ : 正定数、 $K(x)$ は与えられた実数値関数を表わす。方程式 (1) は、 $p = \lambda e^u$ に対する曲面 $(D, p^{1/2} ds)$ ($ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$) の Gauss 曲率が $K(x)$ であることを表わす (Bandle [1])。 $K(x) \equiv 1$ のとき、(1)-(2) の解は explicit に表示され、特に $0 < \lambda < 1$ のとき、解は 2 つ存在し大きい方の解は $\lambda \downarrow 0$ とすると、

$$u(x) \rightarrow 4 \log \frac{1}{|x|} \quad \text{locally uniformly in } \bar{D} \setminus \{0\} \quad (3)$$

という挙動をする。

Weston [10] と Moseley [4] は、与えられた単連結領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ において、次の方程式

$$-\Delta v = \lambda e^v \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

with

$$v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (5)$$

の古典解の族 $\{(\lambda, v(x))\}$ で、 $\lambda \downarrow 0$ としたとき、

$$v(x) \rightarrow 8\pi G(x, \kappa) \quad (6)$$

となるものを構成した。ここで、 $G(x, y)$ は Dirichlet 問題における $-\Delta$ の Green 関数、 $\kappa \in \Omega$ は Robin 関数

$$R(x) = \left[G(x, y) + \frac{1}{2\pi} \log |x - y| \right]_{y=x} \quad (7)$$

の臨界点を表わす。

これとは逆に、(4)-(5) における解の $\lambda \downarrow 0$ における漸近挙動を分類することは Nagasaki-Suzuki [5] によって行われている。

Weston と Moseley による理論では、等角写像 $g: D \rightarrow \Omega$ を用いて条件 (6) を満たす方程式 (4)-(5) を、 $K = 1/2|g'|^2$ に対する条件 (3) を満たす方程式 (1)-(2) に帰着する。これと Suzuki [7] の方法をまとめることにより、次の結果が得られる。

Proposition 1

$$p(0) \neq 0, \quad p'(0) = 0, \quad |p''(0)/p(0)| \neq 2 \quad (8)$$

を満たす D 上正則、 $\bar{D}$ 上連続な関数 p において、 $K = |p|^2$ に対する条件 (3) を満たす方程式 (1)-(2) の古典解の族 $\{(\lambda, u(x))\}$ が存在する。

上述の等角写像により Proposition 1 を方程式 (4)-(5) に適用すると、条件 (8) の $p'(0) = 0$ は、 $g(0) = \kappa \in \Omega$ が Robin 関数 $R(x)$ の臨界点であることを示し、 $|p''(0)/p(0)| \neq 2$ は、これが非退化であることを示す。すなわち $R(x)$ の非退化な臨界点 $\kappa \in \Omega$ に対し条件 (6) を満たす方程式 (4)-(5) の古典解の族が存在する。

$K = |p|^2$ とは異なる一般の $K(x)$ についてはどうだろうか？ このことを、方程式 (1) のかわりに

$$-\Delta u = 2\lambda K(x) e^u \quad \text{in } D \setminus \{0\} \quad (9)$$

とおきかえて考察しよう。

$$\begin{aligned} Z_n &\equiv \{ \text{実係数 } n \text{ 次 } 2 \text{ 変数斉次多項式} \} \\ H_n &\equiv \{ h \in Z_n \mid \Delta h = 0 \} \end{aligned}$$

更に、

$$Z \equiv \bigoplus_{n \geq 0} Z_n \subset A(D) \equiv \{ D \text{ 上実解析関数全体} \}$$

とおく。 $v \in A(D)$ に対し、

$$\|v\| \equiv \sup_{n \geq 0} (n+1)^2 |v|_n \quad (10)$$

とノルムを与え $X \equiv \{v \in A(D) \mid \|v\| < +\infty\}$ とし、さらに

$$X_{00} \equiv \left[\bigoplus_{\substack{k \geq 2 \\ l \geq 0}} |x|^{2k} H_l \right]^X$$

とする。ただし、

$$v(x) = \sum_{k,l \geq 0} a_{kl} x_1^k x_2^l \quad \text{for } x = (x_1, x_2)$$

に対し

$$|v|_n \equiv \max_{k+l \leq n} |a_{kl}|$$

であり、 $[\cdot]^X$ は X における閉包を表わす。

これらの準備のもとで得られた結果が次の定理である。

Theorem 2 $K(x) \in X_{00}$ とすると、条件 (3) を満たすような方程式 (9)-(2) の古典解の族 $\{(\lambda, u(x))\}$ が存在する。

(8) を満たす D 上正則、 $\bar{D}$ 上連続関数の集合を $\wp$ と記すと、

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \in \wp$$

に対し Proposition 1 の $K(x)$ は、

$$\begin{aligned} K = |p|^2 &= (p_0 + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots)(\bar{p}_0 + \bar{p}_2 \bar{z}^2 + \bar{p}_3 \bar{z}^3 + \cdots) \\ &= |p_0|^2 + 2\Re(\bar{p}_0 p_2 z^2) + (|p_2|^2 |z|^4 + 2\Re(\bar{p}_0 p_4 z^4)) + \cdots \end{aligned}$$

と表わされるので $|\wp|^2 \equiv \{|p|^2 \mid p \in \wp\}$ に対し、 $|\wp|^2 \cap X_{00} = \emptyset$ である。つまり Theorem 2 は Proposition 1 に依存していないものである。

実は、Theorem 2 の解は、

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = +\infty$$

すなわち、 $u(x)$ は $x=0$ を特異点としてもつ。また、 $K = K(|x|)$ であるとしても $u = u(|x|)$ とはならない。これは特異解の対称性という観点から興味深いことである ([6])。一方、条件 (3) の挙動をする方程式 (1) の古典解の族を許容するような $K(x)$ は相当制限されたものと思われる。

2 Sumarry

Proposition 1 は、次のように証明される。

- $K = |p|^2$ に対し、方程式 (1) を Liouville 積分によって explicit に解く。すなわち複素構造を活用する。
- そのことにより問題を境界上の方程式に帰着し、不動点定理によって解く。

Theorem 2 の証明にあたって、2 番目の step は活用できるが、最初の方法は $K(x) \in X_{00}$ に複素構造がないために活用できない。そこで予期される特異極限 $u_0(x) = 4 \log \frac{1}{|x|}$ に対し、 $v_0(x) = e^{-u_0(x)/2}$ は D 上滑らかであるので方程式 (9)-(2) の解 u に対して

$$v(x) = e^{-u(x)/2} \quad (11)$$

をとり、

$$\{v\} = \lambda K(x) \quad \text{in } D \quad (12)$$

with

$$v = 1 \quad \text{on } \partial D \quad (\text{ただし } \{v\} = v\Delta v - |\nabla v|^2) \quad (13)$$

の解の族 $\{(\lambda, v(x))\}$ で、

$$v(x) \rightarrow |x|^2 \quad \text{as } \lambda \downarrow 0 \quad (14)$$

なるものを構成することを考える。

$$v(x) \equiv |x|^2 + \lambda w(x) \quad (15)$$

とおけば方程式 (12)-(13) は、

$$Tw + \lambda \{w\} = K \quad \text{in } D \quad (16)$$

with

$$w = 0 \quad \text{on } \partial D \quad (17)$$

となる。ただし T は

$$\begin{aligned} Tv = d_v \{v\}|_{v=|x|^2} &\equiv \left. \frac{d}{dt} \{ |x|^2 + tv \} \right|_{t=0} \\ &= |x|^4 \Delta |x|^{-2} v \end{aligned}$$

という $X \subset A(D)$ に作用できる微分作用素である。

我々は (16)-(17) の解の族 $\{(\lambda, w(x))\}$ で

$$v(x) = |x|^2 + \lambda w(x) > 0 \quad \text{for } x \neq 0 \quad (18)$$

$$\|w\|_{L^\infty} = O(1) \quad \text{as } \lambda \downarrow 0 \quad (19)$$

なるものを構成する。

後に得られる方程式 (16)-(17) の解 $w(x)$ は $0 < \lambda \ll 1$ において一様に $w(x) = O(|x|^2)$ であるので、条件 (19) より 条件 (18) が成り立つ。よって (11) と (15) におきかえた計算をたどることにより Theorem 2 の解の族 $\{(\lambda, u(x))\}$ が得られる。

$w(0) = 0$ より $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = +\infty$ となることに注意せよ。

方程式 (16) の線形作用素 T の可逆性について述べる。

$$\tilde{X}_{1n} = \begin{cases} |x|^2 H_{n-2} & (n \geq 2) \\ Z_1 & (n = 1) \\ \{0\} & (n = 0) \end{cases}$$

とおく。 Z_n の分解

$$Z_n = \bigoplus_{\substack{2k+l=n \\ k, l \geq 0}} |x|^{2k} H_l$$

に従い、 $Z_n = \tilde{X}_{0n} \oplus \tilde{X}_{1n}$ となるように

$$\tilde{X}_{0n} \equiv \bigoplus_{\substack{2k+l=n \\ k \neq 1, (k,l) \neq (0,1)}} |x|^{2k} H_l$$

とする。 T の性質について次のようなことがわかる。

Proposition 3

$T_n = T|_{Z_n}$ とすると T_n は次の性質をもつ。

- 1 $T_n : Z_n \rightarrow Z_n$
- 2 $\ker T_n = \tilde{X}_{1n}$
- 3 $S_n = T_n^{-1}$ となる $S_n = T_n^{-1} : \tilde{X}_{0n} \rightarrow \tilde{X}_{0n}$ が存在

次に、非線形部分 $\{\cdot\}$ について、次の性質が得られる。

Proposition 4

$$\left\{ \bigoplus_{k \neq 0} |x|^{2k} H_l \right\} \subset \bigoplus_{k \neq 0,1} |x|^{2k} H_l \quad \text{for } k, l \geq 0 \quad (20)$$

これら2つのPropositionを用いて、方程式(16)を不動点方程式に帰着しよう。Proposition 3 から、

$$S : \bigoplus_{n \geq 0} \tilde{X}_{0n} \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \tilde{X}_{0n}$$

が $S|_{\tilde{X}_{00}} = S_n$ により定義できることと、 T も S も多項式のdegreeを保存することがわかる。さらに S は、

$$\left[\bigoplus_{n \geq 0} \tilde{X}_{0n} \right]^X$$

上の有界線形作用素として拡張される。こうして T は逆作用素 S を持つことがわかる。一方、Proposition 4 から、

$$\left\{ \bigoplus_{k \neq 0,1} |x|^{2k} H_l \right\} \subset \bigoplus_{k \neq 0,1} |x|^{2k} H_l$$

より、方程式(16)に対する反復列を X_{00} の中で定義できる。更に、境界条件(17)も満たすように解を構成することを考慮しなくてはならない。そのとき $\ker T_n = \tilde{X}_{0n}$ を利用するため、

$$Y_0 \equiv \left[\bigoplus_{l \geq 0} H_l \right]^X$$

とする。

$w_0 \in X_{00}$ と $h \in Y_0$ に対し、解が $w = w_0 + |x|^2 h$ という形で解けるものとしよう。 $Tw = Tw_0$ だから仮定、 $K \in X_{00}$ のもとで、方程式(16)に S を形式的に作用して、

$$w_0 = -\lambda S \{w_0 + |x|^2 h\} + SK \quad (21)$$

を得る。そこで関数 $h \in Y_0$ を固定して、

$$F(w_0) \equiv -\lambda S \{w_0 + |x|^2 h\} + SK \quad (22)$$

とする。

$$X_0 \equiv \left[\bigoplus_{k \neq 0} |x|^{2k} H_l \right]^X$$

$$\{v, w\} \equiv \frac{1}{2} (v \Delta w + w \Delta v) - \nabla v \cdot \nabla w$$

特に、

$$\{v\} \equiv \{v, v\} = v \Delta v - |\nabla v|^2$$

とすると、次の Proposition より $F: X_{00} \rightarrow X_{00}$ である。

Proposition 5

双一次形式

$$S\{\cdot, \cdot\}: \bigoplus_{k \neq 0} |x|^{2k} H_l \times \bigoplus_{k \neq 0} |x|^{2k} H_l \rightarrow \bigoplus_{k \neq 0, 1} |x|^{2k} H_l$$

は、

$$S\{\cdot, \cdot\}: X_0 \times X_0 \rightarrow X_{00}$$

なる連続一次形式に一意的に拡張される。特に $v, w \in X_0$ に対し、次がいえ。

1. $S\{v\} \in X_{00}$
2. $\|S\{v, w\}\| \leq C \|v\| \cdot \|w\|$ となるような定数 $C > 0$ が存在

$h \in Y_0$ が固定されていることと、 $K \in X_{00}$ であることを思い出すと、

$$\begin{aligned} R &\equiv \|SK\| + 1 \\ B_R &\equiv \{w_0 \in X_{00} \mid \|w_0\| \leq R\} \end{aligned}$$

に対し、

1. 定数 $\lambda_0 = \lambda_0(\|h\|) > 0$ が存在して、

$$\|F(w_0)\| \leq R \quad \text{for } w_0 \in B_R \quad 0 < \lambda < \lambda_0$$

2. 定数 $C = C(\|h\|) > 0$ が存在して、

$$\|F(w_0) - F(w'_0)\| \leq \lambda C \|w_0 - w'_0\| \quad \text{for } w_0, w'_0 \in B_R$$

となるので、 $0 < \lambda < \lambda_*(\|h\|) \equiv \min\{\lambda_0, 1/c\}$ に対し、 $F: X_{00} \rightarrow X_{00}$ は B_R 上の縮小写像となるので、不動点定理より

$$F(w_0) = w_0$$

なる $w_0 \in B_R$ が存在する。つまり、固定された $h \in Y_0$ に対し、不動点方程式 (21) の解 $w_0 = w_0(h) \in B_R \subset X_{00}$ が定まり、 $w = w_0 + |x|^2 h$ は、 $0 < \lambda < \lambda_*(\|h\|)$ における方程式 (16) を解く。

続いてこの $w = w_0 + |x|^2 h$ が境界条件 (17) も満たすように、 $h \in Y_0$ を定めよう。

Y_0 の元は D 上調和であるので $\Delta h = 0$ in D であることと、 $h = -w_0$ on ∂D であることに帰着して、 D 上の Poisson 作用素 $\wp$:

$$\wp(\varphi) = h \quad \text{for } \varphi \in C(\partial D) \iff \begin{array}{ll} \Delta h = 0 & \text{in } D \\ h = \varphi & \text{on } \partial D \end{array}$$

を用いる。境界条件 (17) を満たす $w = w_0 + |x|^2 h$ を得るためには、

$$h = \lambda \wp(S\{w_0 + |x|^2 h\}) - \wp SK \quad (23)$$

となる $h \in Y_0$ をとればよい。

$$\wp|x|^{2k}h = h \quad \text{for } h \in H_l$$

であるので、 $K \in X_{00}$ に対し、

$$\Phi(h) \equiv \lambda \wp(S\{w_0 + |x|^2 h\}) - \wp SK \quad (\text{ただし、} w_0 \in X_{00} \text{ は、(21) の解}) \quad (24)$$

は、任意の閉球 $\tilde{B}_r = \{h \in Y_0 \mid \|h\| \leq r\}$ に対し、 $\tilde{B}_r \rightarrow Y_0$ である。この写像 Φ も、 $\lambda > 0$ を更に小さくすることにより $r = \|\wp SK\| + 1$ に対する $\tilde{B}_r$ 上の縮小写像となり、

$$\Phi(h) = h$$

となる $h \in \tilde{B}_r \subset Y_0$ が存在する。

すなわち、こうして得られた不動点方程式 (23) の解 $h \in \tilde{B}_r \subset Y_0$ に対し、不動点方程式 (21) の解 $w_0 = w_0(h) \in B_R \subset X_{00}$ が定まり、方程式 (16)-(17) の解、 $w = w_0 + |x|^2 h$ が得られる。更に、

$$\|w\| \leq \|w_0\| + \||x|^2 h\| = O(1)$$

からは、埋め込み $X \subset C(\bar{D})$ を用いて条件 (19) も得られ、いよいよ Theorem 2 の証明が完成する。

References

- [1] C. Bandle, Isoperimetric Inequalities and Applications, Pitman, Boston, 1980.

- [2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [3] J. Liouville, Sur l'équation aux dérivées partielles $\partial^2 \log \lambda / \partial u \partial v \pm 2\lambda a^2 = 0$, *J. de Math.* 18 (1853) 71-72.
- [4] J. L. Moseley, Asymptotic solutions for a Dirichlet Problem with an exponential nonlinearity, *SIAM J. Math, Anal.* 14 (1983) 934-946.
- [5] K. Nagasaki and T. Suzuki, Asymptotic analysis for two dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially-dominated nonlinearities, *Asymptotic Analysis* 3 (1990) 173-188.
- [6] Y. Naito and T. Nishimoto and T. Suzuki, Radial symmetry of positive solutions for semilinear elliptic equations in a disc, *Hiroshima Math. J.* 26 (1996) 531-545
- [7] T. Suzuki, Global analysis for a two-dimensional elliptic eigenvalue problem with the exponential nonlinearity, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Nonlinéaire* 9 (1992) 367-398.
- [8] T. Suzuki, Some remarks about singular perturbed solutions for Emden-Fowler equation with exponential nonlinearity, *Lecture Note in Math.* 1540, Springer (1993) 341-360.
- [9] H. Wente, Counter example to a conjecture of H. Hopf, *Pacific J. Math.* 121 (1986) 193-243.
- [10] V. H. Weston, On the asymptotic solution of a partial differential equation with an exponential nonlinearity, *SIAM J. Math, Anal.* 9 (1978) 1030-1053.