

# 区分線形間欠性カオス写像の Ruelle 共鳴と輸送現象

早稲田大学 理工学部 田崎秀一<sup>1</sup>

ブリュッセル自由大学 Pierre Gaspard

## 1 序

混合的力学系では、十分多数の物理量の統計平均が不変測度に関する平均に緩和し、統計平均を観測量と同一視すると「孤立系はその初期状態によらず熱平衡状態（不変測度で表される状態）に時間発展する」という熱力学の出発点となる経験事実が自然に理解できる。相空間体積が有限な強いカオス系（あらゆる軌道が正の Lyapunov 指数をもち、その下限が有限であるような系）では、統計平均の緩和が指数関数的になることが知られている (Pollicott-Ruelle[1, 2])。そして、相空間が無限に広がった強いカオス系のいくつかでは通常拡散が見られる (例えば、Ref.[3] 及び引用文献)。しかし、多くのハミルトン系は強いカオス性を持たず、カオス軌道と規則的軌道が相空間内で複雑に混ざり合っている。そのもっとも単純な例は、有限個の点で Lyapunov 指数が 0 になるカオスの一次元写像である。このような写像では間欠性カオスが現れ、相関関数が多項式的に緩和することが知られている [4]。さらに、このような写像が周期的に繰り返した場合、二乗平均偏差が時間に比例しない異常拡散が生じることも指摘されている [5, 6]。

強いカオス系では、その指数緩和は、分布関数の時間発展を支配する Frobenius-Perron 演算子 (FP 演算子) の固有値 (Pollicott-Ruelle 共鳴) で特徴付けられる。ところが、間欠性カオスの場合、一般的性質はよく分かっていない。そこで、区分的線形間欠性カオス写像 (図 1 参照) を用い、確率測度に関する平均値の緩和と Frobenius-Perron 演算子のスペクトルの関係について調べ

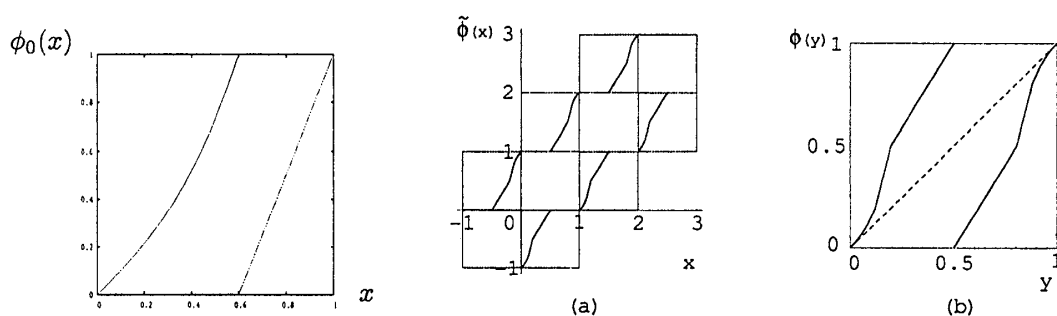


図 1: 左 : Manneville-Pomeau 型写像、右 : Geisel-Nierwetberg-Zacherl 型写像 (a) と回帰写像 (b)

<sup>1</sup>E-mail:stasaki@waseda.jp

た [7, 8]。本稿ではその結果を紹介する。間欠性カオスが非定常性を示すようになると規格化不可能な不変測度が現れるため、一般の不変測度を考慮できる枠組みで議論することが多いが、ここでは統計力学との対応を重視し、規格化可能な確率測度の範疇で議論を進める。このアプローチでも正しく規格化不可能な不変測度を扱うことができるが、紙数の都合で説明を省略する。

## 2 Manneville-Pomeau 型写像のスペクトルと多項式緩和

図 1 左にある写像は Manneville-Pomeau 写像 [9] を区分別線形化したもので、原点に中立固定点を持ち、軌道は  $x_{n+1} = \phi_0(x_n)$  で生成される。ただし、 $\phi_0$  は、 $\zeta(\beta)$  をリーマンのゼータ関数、 $\xi_{k-1} - \xi_k = \frac{a}{\zeta(\beta)} \left(\frac{1}{k}\right)^\beta$  ( $k = 1, 2, \dots$ )、 $\xi_0 = a$  とするとき、次式で定義される。

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \eta_k(x - \xi_k) + \xi_{k-1}, & (\xi_k \leq x \leq \xi_{k-1}) \\ \frac{x-a}{1-a}, & (a \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\eta_k = \begin{cases} \frac{\xi_{k-2} - \xi_{k-1}}{\xi_{k-1} - \xi_k} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^\beta, & (k = 2, 3, \dots) \\ \frac{1-a}{a - \xi_1} = \frac{1-a}{a} \zeta(\beta), & (k = 1) \end{cases}$$

この写像は、原点近くで  $\phi_0(x) \sim x + cx^{\beta/(\beta-1)}$  のように振る舞い、 $\beta > 2$  のとき定常カオス、 $\beta < 2$  のとき非定常カオスを示す。

原点で Hölder 連続な関数  $A$  と区分的に定数値をとる初期分布関数  $\rho$  について、Frobenius-Perron 演算子  $\hat{P}$  を  $\hat{P}^\dagger A(x) = A \circ \phi_0(x)$  で定義される演算子の随伴演算子として定義すると、

$$(A, \hat{P}^t \rho) = (A, F_{in})(\tilde{F}_{in}, \rho) + \lambda_d^t (A, F_d)(\tilde{F}_d, \rho) + \int_0^1 d\lambda \lambda^t (A, F_\lambda)(\tilde{F}_\lambda, \rho) \quad (1)$$

が成り立つことが示せる。ただし、 $\lambda_d \in (-1, 0)$  かつ  $(A, \hat{P}^t \rho) \equiv \int_0^1 dx A(x) \hat{P}^t \rho(x)$  で、 $F_{in}$ ,  $F_d$ ,  $F_\lambda$  および  $\tilde{F}_{in}$ ,  $\tilde{F}_d$ ,  $\tilde{F}_\lambda$  はそれぞれ関数  $A$ 、初期分布関数  $\rho$  に作用する線形汎関数である。さらに  $(A, \hat{P} F_d) = \lambda_d (A, F_d)$ 、 $(\hat{P}^\dagger \tilde{F}_d, \rho) = \lambda_d (\tilde{F}_d, \rho)$  等の関係が成り立ち、 $F_d$  等は  $\hat{P}$  の、 $\tilde{F}_d$  等は  $\hat{P}^\dagger$  の固有(超)関数であることが分かる。(1) 式は、FP 演算子のスペクトルが線分  $[0, 1]$  と 1 および  $\lambda_d$  であることを示している。

強いカオス系と比較すると、大きく違うのは線分  $[0, 1]$  上に連続スペクトルが現れる点である。これは、いくらでも 1 に近い固有値が存在することを意味し、このため相関関数は時間の関数として多項式的に減衰する。実際、以下の関係を得る。

(i) 定常域 ( $\beta > 2$ )

$$(A, \hat{P}^t \rho) \simeq \frac{1}{\Omega(1)} \int_0^1 dx A(x) f_1(x) + \frac{K'_1}{t^{\beta-2}} \int_0^1 dx \{A(x) - A(0)\} f_1(x)$$

(ii) 非定常域 I ( $2 \geq \beta > 3/2$ )

$$(A, \hat{P}^t \rho) \simeq A(0) + \frac{K'_2}{\log t} \int_0^1 dx \{A(x) - A(0)\} f_1(x), \quad (\beta = 2)$$

$$(A, \hat{P}^t \rho) \simeq A(0) + \frac{K'_3}{t^{2-\beta}} \int_0^1 dx \{A(x) - A(0)\} f_1(x), \quad (2 > \beta > 3/2)$$

(iii) 非定常域 II ( $3/2 \geq \beta$ )

$$(A, \hat{P}^t \rho) \simeq A(0) + \frac{K'_4 \log t}{\sqrt{t}} A'(0), \quad (\beta = 3/2)$$

$$(A, \hat{P}^t \rho) \simeq A(0) + \frac{K'_5}{t^{\beta-1}} A'(0). \quad (3/2 > \beta)$$

ただし、 $K'_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) は正の定数、関数  $f_1(x)$  は不変測度の密度分布関数で、 $\hat{\Omega}(1) = \int_0^1 dx f_1(x)$  である。関数  $f_1(x)$  は全ての  $\beta > 1$  に対して存在するが原点で発散し、その積分  $\hat{\Omega}(1)$  は、定常域では有限で、非定常域では無限大になる。規格化可能な測度の範疇で考えているにもかかわらず、規格化不可能な不変測度がスペクトル分解に現れることに注意してほしい。

### 3 Geisel-Nierwetberg-Zacherl 型写像の異常拡散とスペクトル

図 1 右の写像は Geisel-Nierwetberg-Zacherl 写像 [5] を区分線形化したもので次式で与えられる。

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x - [x]) + [x] - 1, & \text{if } x - [x] \leq 1/2 \\ \phi(x - [x]) + [x] + 1, & \text{if } x - [x] > 1/2 \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $[x]$  は  $x$  を越えない最小の整数を表し、回帰写像 (図 1 右 (b)) は

$$\phi(y) = \begin{cases} \eta_k(y - \xi_k) + \xi_{k-1}, & (\xi_k \leq y \leq \xi_{k-1}) \\ \eta_k(y - 1 + \xi_k) + 1 - \xi_{k-1}, & (1 - \xi_{k-1} \leq y \leq 1 - \xi_k) \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

である。ただし、 $\xi_{k-1} - \xi_k = \frac{1}{2\zeta(\beta)} \left(\frac{1}{k}\right)^\beta$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $\xi_0 = \frac{1}{2}$  かつ

$$\eta_k = \begin{cases} \frac{\xi_{k-2} - \xi_{k-1}}{\xi_{k-1} - \xi_k} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^\beta, & (k = 2, 3, \dots) \\ \frac{1}{1 - 2\xi_1} = \zeta(\beta), & (k = 1) \end{cases}$$

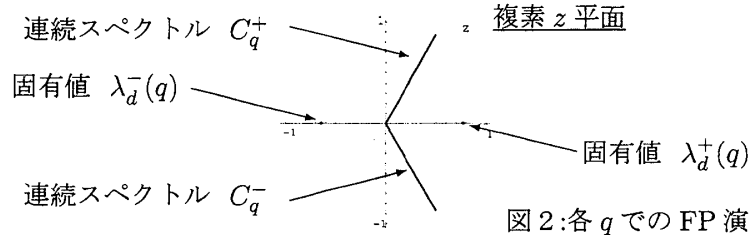
Geisel-Nierwetberg-Zacherl[5]、Shlesinger-Klafter[6] が指摘したように、 $\tilde{\phi}$  は異常拡散 (Lévy walk) を示す。

$$\langle ([x] - \langle [x] \rangle_t)^2 \rangle_t \propto \begin{cases} t & \beta > 3 \\ t \log t & \beta = 3 \\ t^{4-\beta} & 3 > \beta > 2 \\ t^2 & 2 > \beta > 1 \end{cases},$$

中立不動点 0 と 1 で Hölder 連続な関数  $A$  と区分的に定数である初期分布関数  $\rho$  について、

$$\begin{aligned} (A, \hat{P}^t \rho) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \sum_{\sigma=\pm} (A, F_d^\sigma(q)) \lambda_d^\sigma(q)^t (\tilde{F}_d^\sigma(q), \rho) \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \sum_{\alpha=\pm} \int_{C_q^\alpha} dz (A, F_\alpha(q, z)) z^t (\tilde{F}_\alpha(q, z), \rho) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $q$  は空間波数、 $C_q^\pm$  は図 2 に示す上側・下側の連続スペクトルで、 $\lambda_d^\pm(q)$  はそれぞれ  $[0, 1]$  および  $[-1, 0]$  にある固有値である。また、 $F_d^\pm(q)$ ,  $F_\pm(q, z)$  は  $A$  に、 $\tilde{F}_d^\pm(q)$ ,  $\tilde{F}_\pm(q, z)$  は  $\rho$  に作用する線形汎関数で、それぞれ  $\hat{P}$ ,  $\hat{P}^\dagger$  の固有超関数である。

図 2: 各  $q$  での FP 演算子のスペクトル

定常域にあるとき、即ち  $\beta > 2$  のとき、写像の示す緩やかな時間変化は 1 に近い固有値  $\lambda_d^+(q)$  に支配される。実際、 $\beta > 3$  では  $\lambda_d^+(q) \simeq 1 - D_\beta q^2$ 、 $3 > \beta > 2$  では  $\lambda_d^+(q) \simeq 1 - D_\beta |q|^{\beta-1}$  と振舞い、 $[x] = L_\xi X$ 、 $t = L_\xi^\nu T$  ( $\nu = 2$  ( $\beta > 3$ ):  $\nu = \beta - 1$  ( $3 > \beta > 2$ )) かつ  $L_\xi \rightarrow +\infty$  のスケール極限で、 $A$  の平均は次のように時間変化する：

$$\langle A \rangle_T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dQ}{2\pi} \hat{A}^{(\text{cg})}(Q)^* e^{-D_\beta |Q|^\nu T} \hat{\rho}^{(\text{cg})}(Q) .$$

つまり、 $\beta > 3$  では通常拡散が、 $3 > \beta > 2$  では Lévy flight が現れる。他方、非定常域 ( $2 > \beta > 1$ ) では、スケール極限でも  $\lambda_d^+(q)$  だけでなく連続スペクトルも緩やかな時間変化に寄与し、一種の弾道型輸送が得られる。このように FP 演算子のスペクトルで輸送現象を特徴づけることができる。

## 謝辞

本研究は科研費・基盤研究 C、特定領域研究「強レーザー光子場における分子制御」、早稲田大学 21 世紀 COE プログラム「多元要素からなる自己組織系の物理」から支援を受けています。

## 参考文献

- [1] M. Pollicott, Invent. Math. **81** (1985) 413; Ann. Math. **131** (1990) 331.
- [2] D. Ruelle, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 405; J. Stat. Phys. **44** (1986) 281; J. Diff. Geom. **25** (1987) 99; Commun. Math. Phys. **125** (1989) 239; Publ. Math. IHES **72** (1990) 175.
- [3] P. Gaspard, *Chaos, scattering and statistical mechanics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).
- [4] A. Ben-Mizrachi, I. Procaccia, N. Rosenberg, A. Schmidt and H.G. Schuster, Phys. Rev. A **31** (1985) 1830.
- [5] T. Geisel, J. Nierwetberg and A. Zacherl, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 616.
- [6] M.F. Shlesinger, J. Klafter, Phys. Rev. Lett. **54**(1985) 2551; G. Zumofen, J. Klafter, Phys. Rev. E **47** (1993) 851.
- [7] S. Tasaki, P. Gaspard, J. Stat. Phys. **109** (2002) 803.
- [8] S. Tasaki, P. Gaspard, Physica D **183** (2003) 205.
- [9] P. Manneville and Y. Pomeau, Phys. Lett. **75A** (1979) 1; Y. Pomeau and P. Manneville, Commun. Math. Phys. **14** (1980) 189.