

## 非定常温度場の逆解析の試み

信州大学工学部 田中 正隆 (Masataka Tanaka)

信州大学工学部 中村 正行 (Masayuki Nakamura)

信州大学大学院 石川 尚男 (Hisao Ishikawa)

### 1. 緒 言

直接計測することが不可能な情報を推定する逆問題に対して，実験計測により測定可能な計測データを利用するコンピュータ手法援用のアプローチが注目されている<sup>(1)-(3)</sup>．熱伝導問題においても，測定データをもとに，未知量を推定する逆解析に関する研究が数多く行われている<sup>(4)-(8)</sup>．

本研究では，非定常温度場における時間依存の未知境界値を，境界上のいくつかの点における温度の時刻歴応答の計側値と数値解析手法を用いて推定する逆解析手法について考察する．われわれは，これまでに温度の測定値をもとに最適化手法と境界要素法を用いて，時間依存の未知境界値を推定する手法を提案し，その有効性を検討してきた<sup>(9)(10)</sup>．本論文では，解析領域の節点値を直接パラメータとして扱って未

知境界値を推定する方法（ここでは直接推定法と呼ぶ）と，未知境界値を関数近似して関数のパラメータを最適化手法により決定し，未知境界値を推定する方法（関数近似推定法）により逆解析を試み，それぞれの手法の有効性について検討する．

## 2. 逆解析手法

本研究では，時間依存の未知境界値を，温度場の境界上におけるいくつかの点で計測された温度の時刻歴応答をもとに推定する問題を考える．ここでは，考えている温度場の形状および熱物性値はすべて既知であるとする．この逆問題を，未知境界値を表わすパラメータを最適化手法により求めるパラメータ同定に関する最適化問題として取り扱う．

最適化問題における目的関数  $w$  は，境界上の測定点  $p$  における時刻  $t = t_q$  での温度測定値  $u_{p,q}$  と，パラメータ値を仮定して境界要素法解析<sup>(11)</sup>により得られる対応する点  $p$  の時刻  $t_q$  での温度  $\bar{u}_{p,q}$  との残差二乗和とする．すなわち，

$$w = \sum_{p=1}^K \sum_{q=1}^L (u_{p,q} - \bar{u}_{p,q})^2 \quad (1)$$

ただし， $K$  は境界上の測定点数， $L$  は解析時間内の測定回数

である。本研究では，式(1)の目的関数を最小にするパラメータを決定するための最適化手法として，共役勾配法<sup>(12)</sup>を用いる。

未知境界値は時間空間にわたって分布するものと考えられるが，空間的には一様であり時間的にのみ変動する場合を考える。推定手法として直接推定法を用いた場合には，最適化パラメータは注目している時間軸上の節点値 $u(t)$ となる。関数近似推定法を用いる場合には，未知境界値の温度変化を近似する関数を表わすパラメータが最適化パラメータとなる。

関数近似推定法としては次に示す三種類の近似多項式または関数を用いた場合を検討する。

(1) チェビシェフ近似多項式

(2) フーリエ級数展開式

(3) B-スプライン関数

以下に各関数近似法について述べる。

(1) チェビシェフ近似多項式

時間軸上の推定区間 $[a, b]$ において，未知境界値を $N$ 個のチェビシェフの零点を通る $(N-1)$ 次多項式で近似するものとする。チェビシェフの零点は次式で与えられる。

$$t_j = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos \frac{(2j-1)\pi}{2N} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

このそれぞれの零点における関数値  $u(t_j)$  を最適化のパラメータとして取り扱う。この場合、解析に必要な各時間軸上の節点値は、チェビシェフの零点に関する  $N$  個の連立代数方程式を解いて求められる  $c_0, c_1, \dots, c_{N-1}$  を係数とした、次に示すチェビシェフ近似多項式<sup>(13)</sup>によって補間する。

$$u(t) \equiv c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{N-1} t^{N-1} \quad (3)$$

最適化パラメータは  $N$  個のチェビシェフの零点である。

## (2) フーリエ級数展開式

未知境界値  $u(t)$  が推定区間  $[a, b]$  を一周期とする周期関数で表わされると仮定し、 $u(t)$  をフーリエ級数<sup>(13)</sup>で近似した場合、次式のようになる。

$$u(t) \equiv \sum_{k=0}^{N/2} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{b-a}(t-a)\right) + \sum_{k=0}^{N/2} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{b-a}(t-a)\right) \quad (4)$$

ここで、 $a_k$  と  $b_k$  はフーリエ係数であり、これらを最適化パラメータとして取扱う。同定すべきパラメータの数は  $a_k$  と

$b_k$  の合計  $N$  個である。

### (3) B-スプライン関数

未知境界値を  $m$  階 ( $m-1$  次) の B-スプライン関数<sup>(14)</sup> で近似するものとすれば、次式のようになる。

$$u(t) \equiv \sum_{i=1}^N C_i S_i(t) \quad (5)$$

ここで、 $S_i(t)$  は階数  $m$  の B-スプライン関数である。求めるべき最適化パラメータは  $N$  個の係数  $C_i$  である。スプライン関数による近似においては、スプライン関数の節点と付加節点の取り方が近似精度に影響する。これらの節点の取り方は任意であるが、ここでは、 $N$  個の標本点と  $N+m$  個の節点はそれぞれ等間隔に与え、全節点数の中の  $2m$  個の付加節点は推定区間  $[a, b]$  の両端にそれぞれ  $m$  重節点として与えるものとする。

### 3. 逆解析の手順

本手法を用いて未知境界値を推定する手順を図1のフローチャートに示す。推定手順は次のステップからなる。

Step 1 温度場の形状寸法、物性値および各測定点における温度の測定値を読み込む。

Step 2 未知境界値に対する初期パラメータ値を仮定する。

Step 3 直接推定法では仮定したパラメータを境界値とする。  
関数近似推定法では関数近似により未知境界値を補間し境界値とする。

Step 4 仮定した未知境界値を境界条件として非定常熱伝導問題の境界要素法解析を行う。

Step 5 目的関数を計算し，最適化手法によりパラメータを修正する。

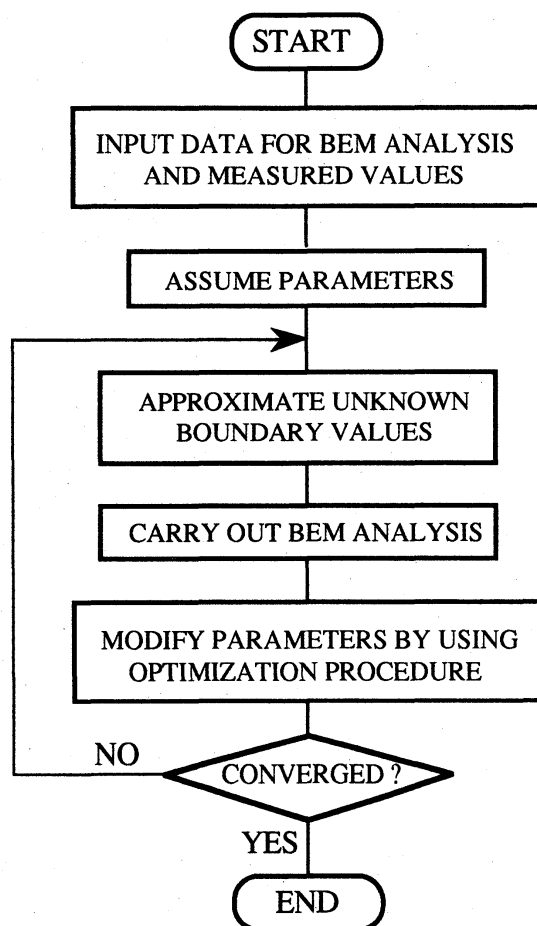


図 1 逆解析の手順

Step 6 収束判定を行い，収束判定基準を満たす場合は，このときのパラメータを最適解とし，計算を終了する．判定基準を満たさない場合は，Step 3へ戻る．

本研究では，反復計算の収束判定基準として次の不等式を用いる．

$$Z^k < \eta \quad \text{or} \quad |Z^k - Z^{k-1}| < \zeta \quad (6)$$

ここで， $\eta$  と  $\zeta$  は収束判定基準値である． $Z_k$  は  $k$  回目の反復計算における目的関数の無次元量であり，次のように表わされる．

$$Z^k = \frac{1}{2} \log(w^k / w^0) \quad (7)$$

#### 4. 数値実験

本手法の有効性を確認するため，いくつかの例題について数値実験を行う．図2に示すような  $10\text{ mm} \times 20\text{ mm}$  の二次元温度場のモデル A B C D を考える．辺 A D と辺 B C は断熱され，辺 C D では熱流束が指定されている．辺 A B 上で時間依

存の温度および熱流束が未知であり，測定点Eにおいて任意の時間間隔で温度の測定値が得られているものとする．熱物性値は，表1のように仮定し，初期温度は温度場全体にわたって0度とした．数値実験では，測定点Eにおける温度には，計測データのかわりに上述の境界条件，初期条件および物性値のもとで非定常熱伝導問題に対する境界要素法解析により求めた数値解を用いる．なお，境界要素法解析においては，温度場モデルの境界を30個の一定境界要素により要素分割したもの(図3)を用いた．時間ステップ幅は $\Delta t = 3.0 \text{ s}$ とした．また，最適化の反復計算においても同じ要素分割を用いた．以下の計算例では，式(6)の収束判定基準値として $\eta = -3.0$ および $\zeta = 0.005$ を用いた．

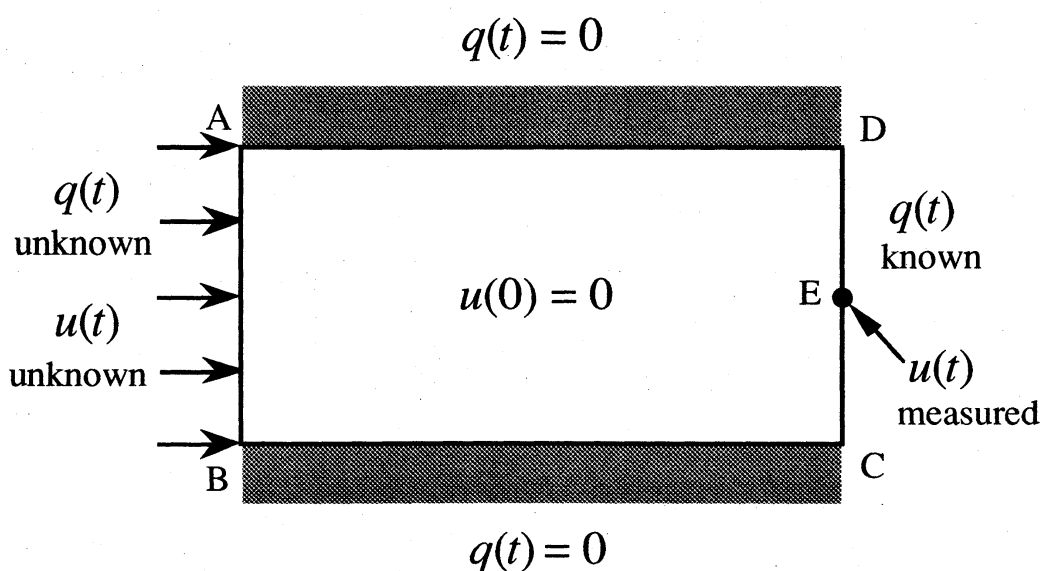


図2 数値実験のための温度場モデル

表 1 熱物性値

|                           |                    |                     |
|---------------------------|--------------------|---------------------|
| Thermal Conductivity      | 12.0               | W/m°C               |
| Specific Heat             | 0.88               | kJ/kg°C             |
| Mass Density              | $2.77 \times 10^3$ | kg/m <sup>3</sup>   |
| Heat Transfer Coefficient | 10.0               | W/m <sup>2</sup> °C |

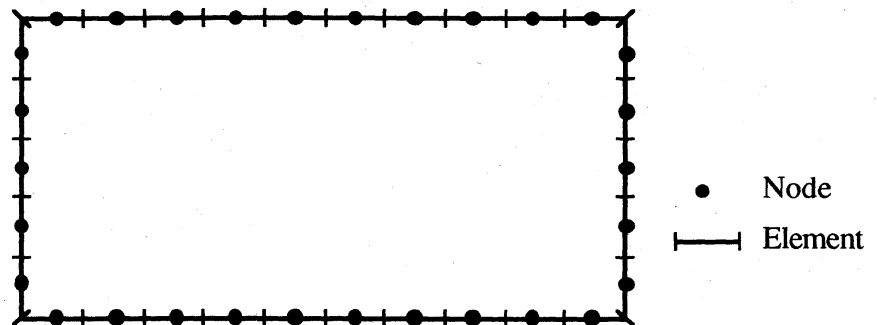


図 3 境界要素分割

ここでは，辺 A B 上の時間依存の温度変化が次式のように与えられる 2 種類の例題を解析する．

例題 1

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq 15) \\ -\frac{2}{3}t^2 + 40t - 450 & (15 < t \leq 45) \\ 0 & (45 < t \leq 60) \end{cases} \quad (8)$$

例題 2

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq 15) \\ 150 & (15 < t \leq 45) \\ 0 & (45 < t \leq 60) \end{cases} \quad (9)$$

ただし，辺  $AB$  上での温度分布は空間的に一様であるものと仮定する．図4と図5は，辺  $AB$  上の温度がそれぞれ式(8)と式(9)で与えられるとき，境界要素法により計算された測定点  $E$  における温度変化を示している．

図6と図7は，直接推定法による推定結果を示している．パラメータの数(時間軸上の節点値の数に等しい)は16個である．図において，四角のシンボルは逆解析によって得られた推定値であり，実線は式(8)または式(9)で与えられる正解の温度変化である．図8と図9は，パラメータの数を21個とした場合の結果を示す．図より，パラメータの数を多くとれば良い推定結果が得られることがわかる．

図10と図11は，関数近似推定法においてチェビシェフ近似多項式を用いた場合の推定結果である．点線は推定結果を表わし，四角のシンボルは，パラメータに用いたチェビシェフの零点における推定値である．パラメータの数は16個である．すなわち，15次の近似多項式を用いている．図より，推定区間の両端で大きな振動を生じ，正解から大きくずれていることがわかる．これは，次数が高いことによって起こる近似多項式の特性である．次数を下げることによって両端における振動は抑えることができるが，低次の多項式では複雑

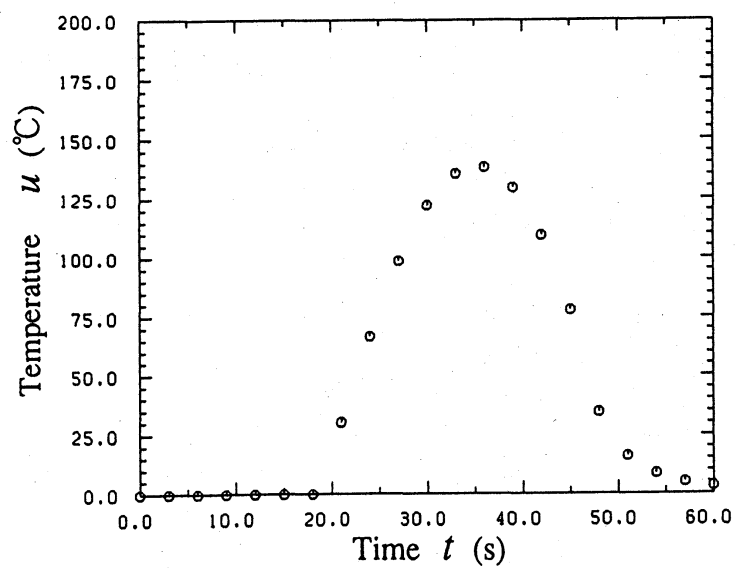


図4 辺AB上の温度の境界条件が式(8)で与えられた場合に，境界要素法により求めた測定点Eにおける温度の時間変化

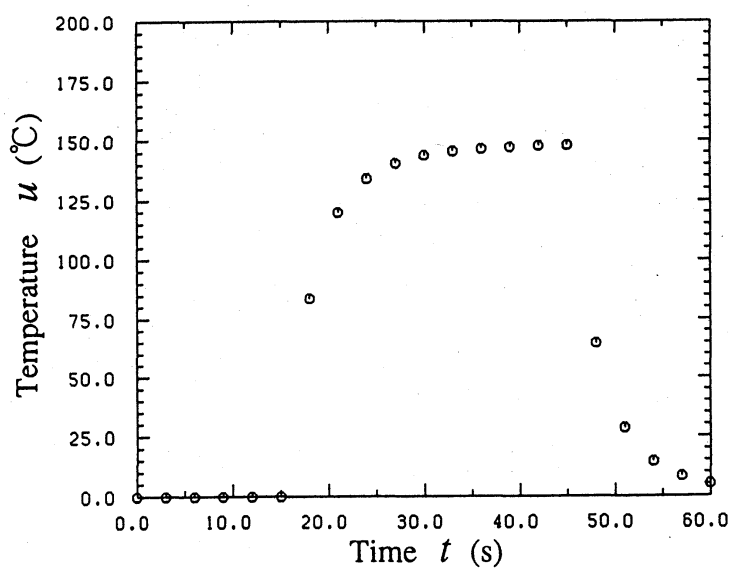


図5 辺AB上の温度の境界条件が式(9)で与えられた場合に，境界要素法により求めた測定点Eにおける温度の時間変化

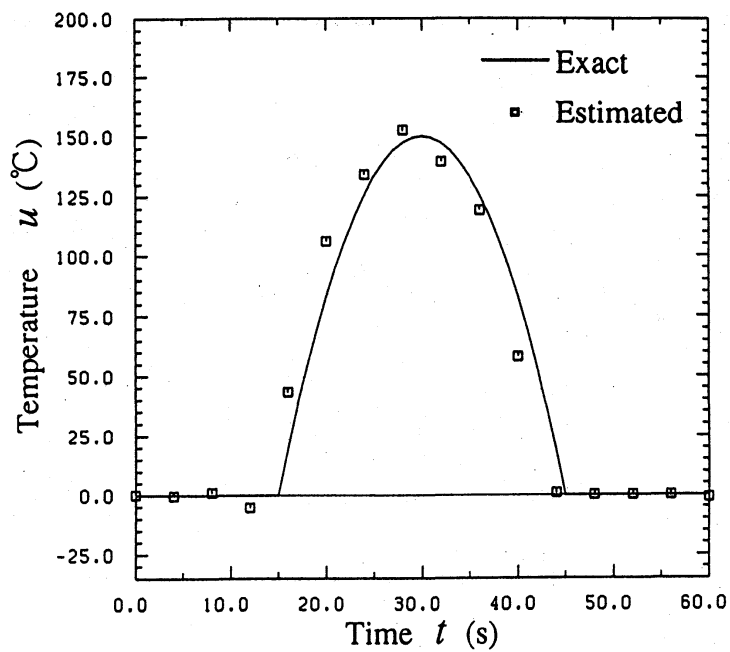


図6 未知境界値が式(8)で表される場合の直接推定法(パラメータ数16)による推定結果

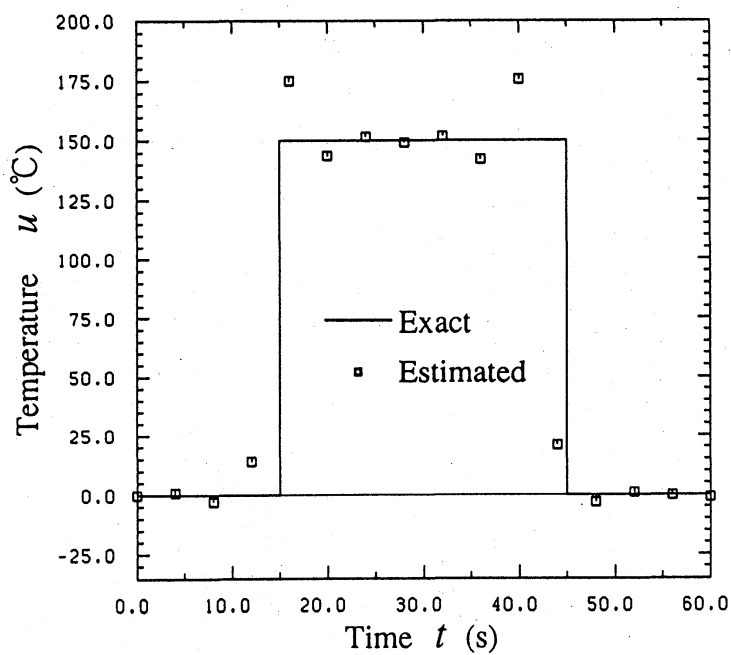


図7 未知境界値が式(9)で表される場合の直接推定法(パラメータ数16)による推定結果

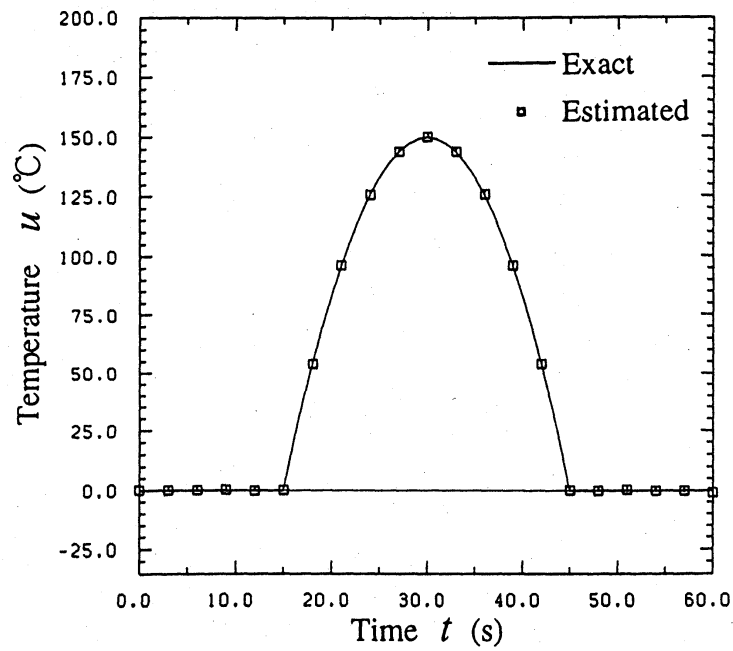


図8 未知境界値が式(8)で表される場合の直接推定法(パラメータ数21)による推定結果

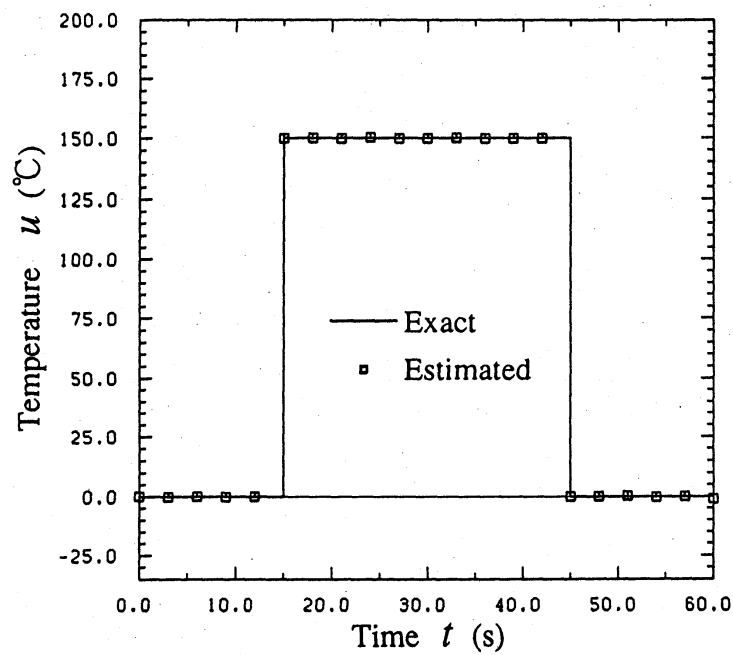


図9 未知境界値が式(9)で表される場合の直接推定法(パラメータ数21)による推定結果

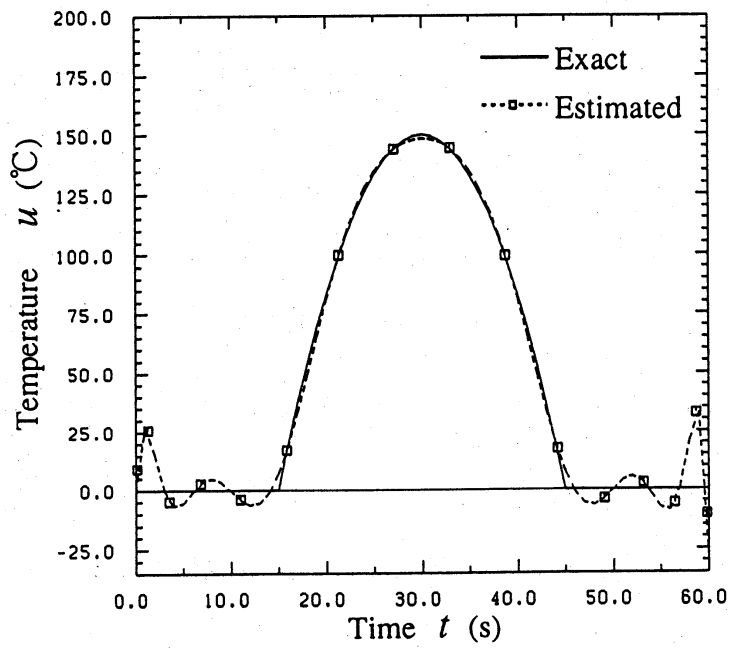


図10 未知境界値が式(8)で表される場合の関数近似推定法(チェビシェフ近似多項式, パラメータ数16)による推定結果

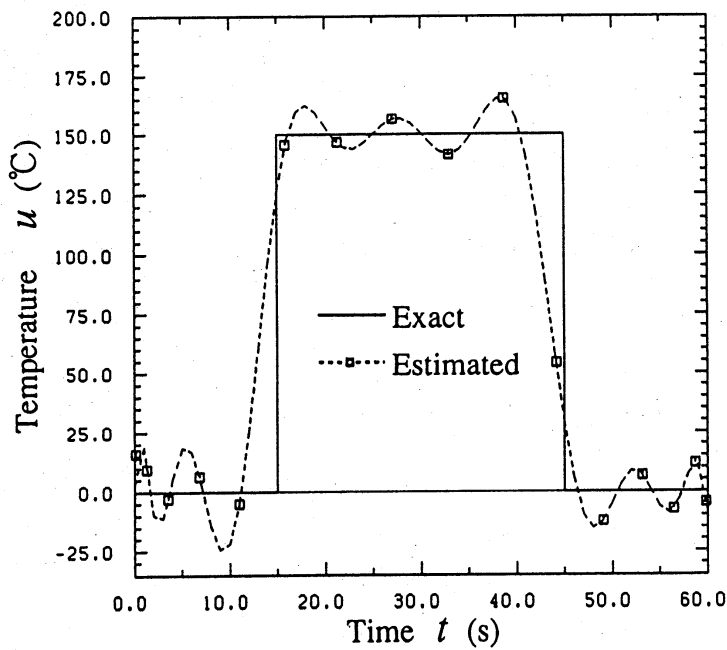


図11 未知境界値が式(9)で表される場合の関数近似推定法(チェビシェフ近似多項式, パラメータ数16)による推定結果

な温度変化は表現できない。

図12と図13は、フーリエ級数展開式を用いた場合の推定結果を示す。図14と図15は、3階（2次）のB-スプライン関数を用いた場合の推定結果である。どちらの関数を用いた場合も、パラメータの数は16個とした。図より、滑らかな温度変化の場合はフーリエ級数展開式、B-スプライン関数のいずれの関数近似を用いても比較的精度よく推定できることがわかる。しかし、不連続な温度変化に対しては、推定結果に振動が生じている。

## 5. 結 言

本研究では、境界上の測定点における温度計測値をもとに、時間依存の未知境界値を推定する非定常温度場の逆解析手法について検討した。未知境界値を、時間軸上の節点値ごとに最適化パラメータとして扱う場合と、チェビシェフ近似多項式やフーリエ級数、スプライン関数を用いて境界値を近似し、関数を表わすパラメータを最適化パラメータとして取扱う場合について、いくつかの例題に対する数値実験を行い手法の有効性について検討した。その結果、未知境界値の変化が滑らかな場合は、未知境界値を直接パラメータとして推定する手法と関数近似による推定手法のどちらを用いても精度よく

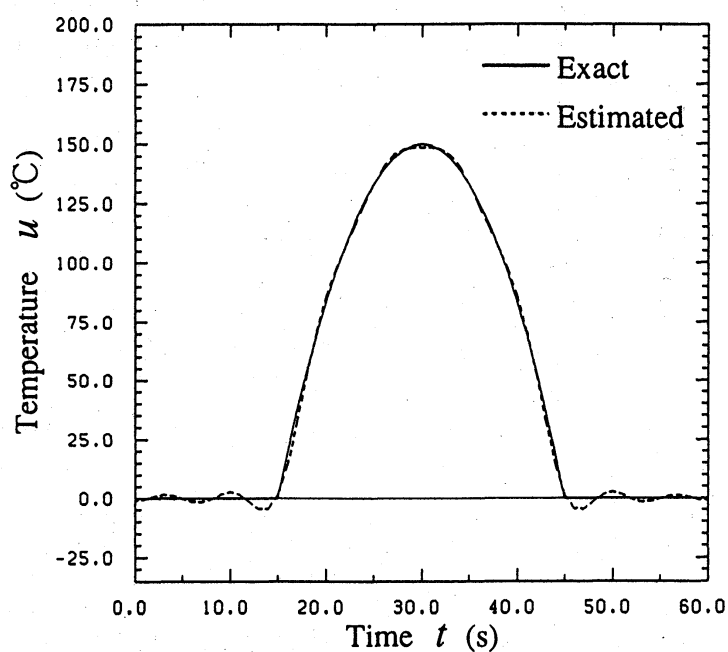


図12 未知境界値が式(8)で表される場合の関数近似推定法(フーリエ級数展開式, パラメータ数16)による推定結果

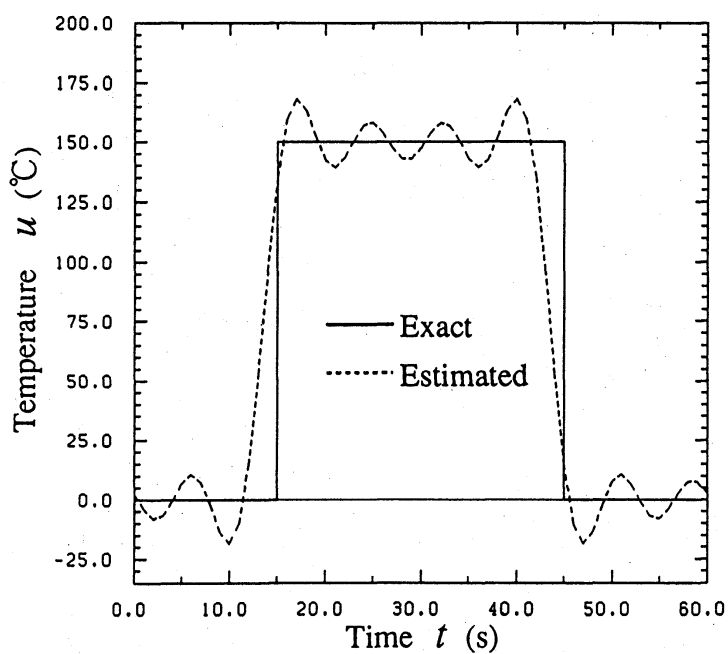


図13 未知境界値が式(9)で表される場合の関数近似推定法(フーリエ級数展開式, パラメータ数16)による推定結果

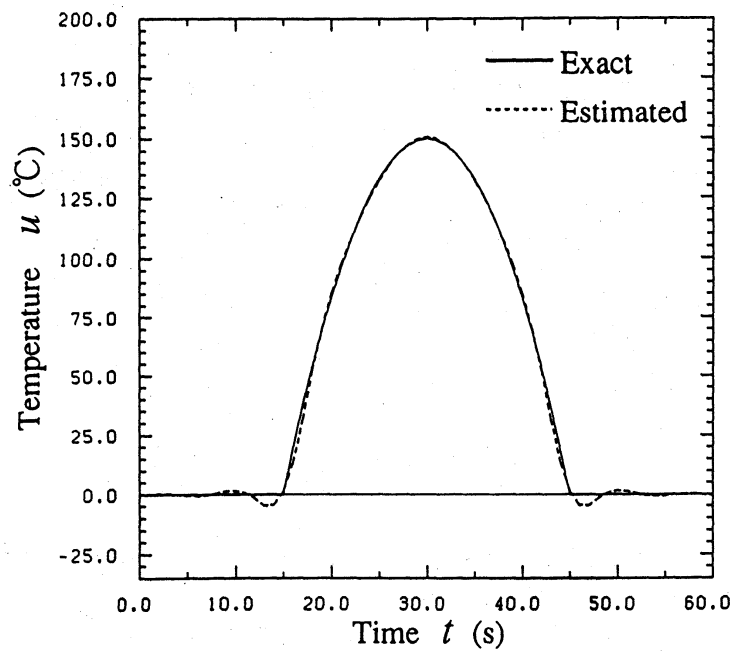


図14 未知境界値が式(8)で表される場合の関数近似推定法(Bースプライン関数, パラメータ数16)による推定結果

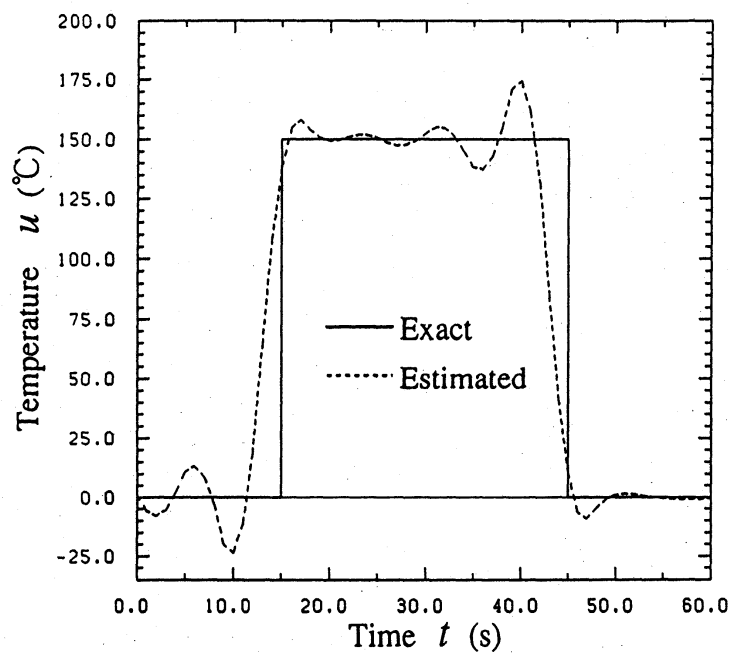


図15 未知境界値が式(9)で表される場合の関数近似推定法(Bースプライン関数, パラメータ数16)による推定結果

推定できることがわかった。また，未知境界値を直接パラメータとして扱う推定方法は，パラメータ数を多くとれば不連続な温度変化に対しても有効である。

謝 辞 本研究の一部は，文部省科学研究費補助金総合研究（A）（代表 久保司郎 大阪大学教授）の資金援助によって行なったことを付記し，関係各位に謝意を表する。

## 文 献

- (1) 日本機械学会シンポジウム＝「逆問題のコンピュータ手法とその応用」講演論文集，890-34(1989)。
- (2) 日本機械学会調査研究分科会P-SC111成果報告書，(1989)。
- (3) 田中正隆：逆問題解析における最近の研究動向(1)；(2)，機械の研究，43(1991)，pp.648-656；751-756。
- (4) 白鳥正樹，原田衛，桑嶋隆夫：赤外線温度計測に基づく三次元熱伝導解析システムの開発，日本機械学会論文集，57-539，A(1991)，pp.1593-1598。
- (5) Busby, H.R., Trujillo, D.M.: Numerical solution to a two-dimensional inverse heat conduction problem, Int. J. Num. Meth. Eng., 21(1985), pp.349-359.
- (6) Zabaras, N., Liu, J.C.: An analysis of two-dimensional linear inverse heat transfer problems using an integral method, Numerical Heat Transfer, 13(1988), pp.527-533.

- (7) Reinhardt, H.J.: A numerical method for the solution of two-dimensional inverse heat conduction problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 32(1991), pp.363-383.
- (8) 畑村洋太郎, 米山猛: 圧延ロール表面の実働応力・温度測定 (第3報, 冷間圧延におけるロール表面温度・熱流束分布の測定), *日本機械学会論文集*, 55-509, C(1989), pp.178-181.
- (9) 田中正隆, 中村正行, 峯寫光年: 境界要素法を用いた逆解析による非定常熱伝導場における未知境界値の推定, *BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集*, 1(1991), pp.33-38.
- (10) 田中正隆, 中村正行, 石川尚男: 境界要素法を用いた非定常熱伝導逆問題解析 (時間依存の未知境界値同定法に関する検討), *日本機械学会関西支部第250回講演会論文集*, 914-3, pp.40-42.
- (11) Tanaka, M., Togoh, H., Kikuta, M.: Fracture mechanics application in thermo-elastic states, *Topics in Boundary Element Research*, ed. by C.A. Brebbia, Springer-Verlag, 1 (1984), pp.59-77.
- (12) Fox, R.L.: *Optimization Methods for Engineering Design*, Addison-Wesley Publishing Co., (1971), pp.38-116.
- (13) 森正武: *曲線と曲面*, (1980), 教育出版.
- (14) 市田浩三, 吉本富士市: *スプライン関数とその応用*, (1979), 教育出版.