

変数係数二次形式のゼータ函数について

(附記. 不定値の Siegel Modular)

名大 理 鈴木利明

L_2 を n 次元縦ベクトル空間 V_2 の lattice とし, L_1 を size n の対称行列の空間 V_1 の lattice とする。 L_1 の非退化な元 X_1 に次のような不定値二次形式 $\eta_j(s, L_2, X_1)$ ($j = \pm 1$) を対応させる。 ($s \in \mathbb{C}$) のゼータ函数

$$\eta_j(s, L_2, X_1) = \sum_{\substack{X_2 \in L_2 \\ \det X_1[X_2] = j}} \mu_{X_1}(X_2) |X_1[X_2]|^{-s}$$

ここで, $G(X_1) = \{g \in GL(n; \mathbb{R}) : X_1[{}^t g] = X_1\}$ 上の Haar 測度 dg_{X_1} が

$$\int_{GL(n; \mathbb{R})} f(g) dg = \int_{GL(n; \mathbb{R})/G(X_1)} |X_1[{}^t g]|^{-\frac{n+1}{2}} dX_1[{}^t g]$$

$$\int_{G(X_1)} f(gg) dg_{X_1}$$

$$(dg = |\det g|^{-n} \prod_{1 \leq i, j \leq n} dg_{ij} \quad f \in L^1(GL(n; \mathbb{R})))$$

2

正規化 ζ による
で定義される ~~とき~~ 時に定まる $\mu_{X_1}(X_2)$ とする。([1] 参照)

ここで、ゼータ函数 $\xi_{ij}(s_1, s_2, L)$, $\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$ を次のように定義する。

$$\xi_{ij}(s_1, s_2, L) = \sum_{\substack{X_1 \in L_1/\sim \\ \det X_1 = (i, n-i)}} \eta_j(s_2, L_2, X_1) \|X_1\|^{-s_1 - \frac{1}{2}}$$

$$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L}) = \sum_{\substack{Y_1 \in L_1^*/\sim \\ \det Y_1 = (i, n-i)}} \eta_j(s_2, L_2, Y_1^c) \|Y_1\|^{-s_1 - \frac{n-1}{2}}$$

$s_2 \in \mathbb{C} \quad (0 \leq i \leq n)$

但し, $L = L_1 \oplus L_2$, $\bar{L} = L_1^* \oplus L_2$, L_1^* は L_1 の dual lattice $\mathbb{Z}^n$, $\|X_1\|$ は $\det X_1$ の絶対値, Y_1^c は Y_1 の余因子行列, $L_1/\sim$ は $\Gamma = GL(n; \mathbb{Z})$ の作用についての軌道の代表系とする。

上記のゼータ函数 $\xi_{ij}(s_1, s_2, L)$, $\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$ は、実は下記の概均質ベクトル空間 (G, ρ, V) , $(\bar{G}, \bar{\rho}, \bar{V})$ から定義されるゼータ函数になっていることが簡単に示される。

$$G = GL(n, \mathbb{R}) \times GL(1, \mathbb{R}), \quad V = V_1 \oplus V_2, \quad \bar{V} = \bar{V}_1^* \oplus V_2$$

$$\rho(g, h)(X_1, X_2) = (X_1 [{}^t g], {}^t g^{-1} X_2 h)$$

$$\bar{\rho}(g, h)(Y_1, X_2) = (Y_1 [g^{-1}], {}^t g^{-1} X_2 h)$$

$$g \in GL(n, \mathbb{R}), \quad h \in GL(1, \mathbb{R}), \quad X_1 \in V_1, \quad Y_1 \in V_1^*, \quad X_2 \in V_2$$

$G_+ = GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+^*$ として、その上の Haar 測度 dG_+ を

$$dG_+ = |\det g|^{-n} h^{-1} \prod_{1 \leq i, j \leq n} dg_{ij} dh$$

で定義する。 $G_{X_1, X_2}^+ = \{ (g, h) \in G_+ : p(g, h)(X_1, X_2) = (X_1, X_2) \}$
 $G_{Y_1, X_2}^+ = \{ (g, h) \in G_+ : \bar{p}(g, h)(Y_1, X_2) = (Y_1, X_2) \}$ として、それ
 ぞれの上の Haar 測度を次のように正規化しておく。

$$\int_{G_+} f(g, h) dG_+ = \int_{G_+/G_{X_1, X_2}^+} \|X_1 [{}^t \dot{g}]\|^{-\frac{n}{2}} |X_1 [{}^t \dot{g}] [{}^t \dot{g}^{-1} X_2 h]|^{-\frac{n}{2}}$$

$$d(X_1 [{}^t \dot{g}]) d({}^t \dot{g}^{-1} X_2 h) \int_{G_{X_1, X_2}^+} f(\dot{g}, h) d\nu_{X_1, X_2}(\dot{g})$$

$$\int_{G_+} f(g, h) dG_+ = \int_{G_+/G_{Y_1, X_2}^+} \|Y_1 [\dot{g}^{-1}]\|^{-1} |Y_1 [\dot{g}^{-1}]^c [{}^t \dot{g}^{-1} X_2 h]|^{-\frac{n}{2}}$$

$$d(Y_1 [\dot{g}^{-1}]) d({}^t \dot{g}^{-1} X_2 h) \int_{G_{Y_1, X_2}^+} f(\dot{g}, h) d\nu_{Y_1, X_2}(\dot{g}).$$

$L, \bar{L}$ は Γ の作用 $P, \bar{P}$ で不変であるとする。 $L_{2j} = \{ (X_1, X_2) \in L$
 $; \operatorname{sgn} X_1 = (2, n-2), \operatorname{sgn} X_1 [X_2] = j \}$, $\bar{L}_{2j} = \{ (Y_1, X_2) \in \bar{L}; \operatorname{sgn} Y_1$
 $= (2, n-2), \operatorname{sgn} Y_1^c [X_2] = j \}$. $L_{2j}/\sim$ は Γ の作用 P による軌
 道の代表系とする。このとき、 $\xi_{2j}(s_1, s_2, L), \bar{\xi}_{2j}(s_1, s_2, \bar{L})$
 は次のようにも定義することが出来る。

$$\xi_{2j}(s_1, s_2, L) = \sum_{(X_1, X_2) \in L_{2j}/\sim} \mu(X_1, X_2) \|X_1\|^{-s_1} |\chi_1[X_2]|^{-s_2}$$

$$\bar{\xi}_{2j}(s_1, s_2, L) = \sum_{(Y_1, X_2) \in \bar{L}_{2j}/\sim} \mu(Y_1, X_2) \|Y_1\|^{-s_1} |Y_1^c[X_2]|^{-s_2}$$

但し $\mu(X_1, X_2) = \int_{G_{X_1, X_2}^+ / P_{X_1, X_2}} d\nu_{X_1, X_2} \quad (P_{X_1, X_2} = P \cap G_{X_1, X_2}^+)$

$$\mu(Y_1, X_2) = \int_{G_{Y_1, X_2}^+ / P_{Y_1, X_2}} d\nu_{Y_1, X_2} \quad (P_{Y_1, X_2} = P \cap G_{Y_1, X_2}^+)$$

定理. 1) $n \geq 4$ のとき 正の数 A, B があって, $\operatorname{Re}(s_1) > A$ かつ $\operatorname{Re}(s_2) > B$ のとき $\xi_{2j}(s_1, s_2, L), \bar{\xi}_{2j}(s_1, s_2, L)$ は絶対収束して, そこで, (s_1, s_2) についての正則函数を表わす。

2) $\xi_{2j}, \bar{\xi}_{2j}$ は全平面 $\mathbb{C}^2$ に解析接続されて, 有理型函数となり, 次の函数等式を満足する。

$$\bar{\xi}_{2j}\left(\frac{n+1}{2} - s_1 - s_2, s_2, \bar{L}\right) = v(L_1^*)^{-1} (2\pi)^{-ns_1 - s_2} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

$$e^{M(\pi i \frac{ns_1 + s_2}{2})} \Gamma(s_1) \Gamma(s_1 - \frac{1}{2}) \cdots \Gamma(s_1 - \frac{n-2}{2}) \Gamma(s_1 + s_2 - \frac{n-1}{2})$$

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k = \pm 1}} A_{2k, 2j}(s_1, s_2) \xi_{2k}(s_1, s_2, L)$$

$$(0 \leq i \leq n, j = \pm 1)$$

$$\xi_{2j}(s_1, s_2, L^*) = v(L_2^*)^{-1} \pi^{2s_2 - \frac{n}{2} - 1} \Gamma(\frac{n}{2} - s_2) \Gamma(1 - s_2)$$

$$\sum_{k=\pm 1} B_{k,i}^i(s_2) \bar{\xi}_{2k}(s_1 + s_2 - \frac{n-1}{2}, \frac{n}{2} - s_2, \bar{L})$$

$$(0 \leq i \leq n, j = \pm 1)$$

但し $v(L_1^*) = \int_{V_1^*/L_1^*} dY_1$, $v(L_2^*) = \int_{V_2^*/L_2^*} dY_2$ ($dY_i = \prod_{i=1}^n dY_i^{2i}$,

$$dY_2 = \prod_{i=1}^n dY_2^i$$

$$3) \quad \xi_{2j}(s_1, s_2, L) (s_1 + s_2 - \frac{n-3}{2})(s_1 - 1)(s_1 - 1 - \frac{1}{2}) \cdots (s_1 - 1 - \frac{n-2}{2})$$

$$(s_1 - 2)(s_1 - 2 - \frac{1}{2}) \cdots (s_1 - 2 - \frac{n-2}{2})(s_2 - 1)(s_2 - \frac{n}{2})$$

$$, \quad \bar{\xi}_{2j}(s_1, s_2, \bar{L}) (s_1 - 1)(s_1 - 2)(s_1 + s_2 - 1 - \frac{1}{2})(s_1 + s_2 - 1 - \frac{2}{2}) \cdots$$

$$\cdots (s_1 + s_2 - 1 - \frac{n-1}{2})(s_1 - 1)(s_2 - \frac{n}{2}) \quad (0 \leq i \leq n, j = \pm 1)$$

は全平面 $\mathbb{C}^2$ で整数となる。また、 $\operatorname{Re}(s_1)$ を充分大にして

おけば

$$\lim_{s_2 \rightarrow \frac{n}{2}} (s_2 - \frac{n}{2}) \xi_{2j}(s_1, s_2, L) = v(L_2)^{-1} \xi_2(s_1 + \frac{1}{2}, L_1)$$

$$\lim_{s_2 \rightarrow \frac{n}{2}} (s_2 - \frac{n}{2}) \bar{\xi}_{2j}(s_1, s_2, \bar{L}) = v(L_2)^{-1} \bar{\xi}_2(s_1 + \frac{n-1}{2}, L_1^*)$$

を得る。

また, $\operatorname{Re}(s_i)$ が充分大なるとき, $(1 \leq i \leq n-1)$

$$\lim_{s_2 \rightarrow 1} (s_2 - 1) \xi_{ij}^{(10)}(s_1, s_2, L)$$

$$= v(L_2)^{-1} \xi_i^{(10)}(s_1 + \frac{1}{2}, L_1 \oplus L_2^*) \pi^{1-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} - 1)$$

$$\begin{cases} \lim \pi \frac{n-i}{2} & \text{if } j = +1 \\ \lim \pi \frac{i}{2} & \text{if } j = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{s_2 \rightarrow 1} (s_2 - 1) \bar{\xi}_{ij}^{(10)}(s_1, s_2, \bar{L})$$

$$= v(L_2)^{-1} \bar{\xi}_i^{(10)}(s_1 + \frac{1}{2}, L^*) \pi^{1-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} - 1)$$

$$\begin{cases} \lim \pi \frac{n-i}{2} & \text{if } j = (-1)^{n-i} \\ \lim \pi \frac{i}{2} & \text{if } j = (-1)^{n-i+1} \end{cases}$$

但し, $\xi_i^{(10)}$, $\bar{\xi}_i^{(10)}$ は, 不定値二次形式のゼータ函数の $s=1$ における留数から作られるゼータ函数であって, 次のような函数等式を満足する。

$$\xi_i^{(10)}(\frac{n}{2} - s_1, L^*) = v(L_1^*)^{-1} (2\pi)^{-ns_1-1} \exp(2\pi i \frac{ns_1+1}{4})$$

$$\Gamma(s_1) \cdots \Gamma(s_1 - \frac{n-2}{2}) \Gamma(s_1 - \frac{n-3}{2}) \pi^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

$$\sum_{1 \leq l \leq n-1} A_{lR_{ij}}(s_1, 1) \bar{\xi}_l^{(10)}(s_1 + \frac{1}{2}, L_1 \oplus L_2^*)$$

(附記) 不定値 (対称行列) の Siegel modular について

ここで、 T は半整数係数の対称行列、 $a(T)$, $b(T)$ を、その絶対値が $\|T\|$ の多項式でおさえられる列で、 $a(UT^cU) = a(T)$, $b(UT^cU) = b(T)$ ($U \in \Gamma = SL(n, \mathbb{Z})$, n は T の size $n \geq 3$) を満たすものとする。[I], [II] の記号に従って、次のような Dirichlet 級数を定義する。(これは $\text{Re } s$ が大なり絶対収束)

$$\xi_z(s) = \sum_{\substack{T \in \Gamma \\ \text{sym } T = (z, n-z)}} a(T) \mu(T) \|T\|^{-s}$$

$$\xi'_z(s) = \sum_{\substack{T \in \Gamma \\ \text{sym } T = (z, n-z)}} b(T) \mu(T) \|T\|^{-s} \quad 0 \leq z \leq n$$

(和は Γ の作用による代表系を動く)

以下、 $V = \{X; X \text{ は size } n \text{ の対称行列}\}$, $S = \{X \mid |X| = 0\}$

$$d\psi = \|X\|^{-\frac{n+1}{2}} dX, \quad (dX = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dx_{ij}, \quad X = (x_{ij})), \quad M_n = |X| \left| \frac{\partial}{\partial X} \right|$$

$$f \in C_0^\infty(V-S), \quad \check{f}(X) = f(X^{-1})$$

$$\hat{f}(Y) = \int e^{2\pi i \alpha(X \cdot Y)} \check{f}(X) d\psi \quad (\text{但し } \alpha \text{ は trace}).$$

と記号を決め、また簡単のため

$$(i) \quad M_n \|X\|^s = b(s) \|X\|^s$$

$$\Xi_z(\hat{f}, s) = \int_{\text{sym } X = (z, n-z)} \check{f}(X) \|X\|^s d\psi$$

$$(2) \quad \Phi_2(\hat{f}, s) = \sum_{j=0}^n \gamma_{2j}(s) \Phi_j(\hat{f}, -s)$$

と書くことにする。

定理 11. $V-S$ 上の distribution としての関係式

$$(3) \quad \sum_T a(T) e^{2\pi i \lambda(T \cdot X^{-1})} = |X|^k \sum_T b(T) e^{2\pi i \lambda(T \cdot X)}$$

(k は正の整数)

が成立するならば、 $\xi_2(s)$, $\xi'_2(s)$ は s についての有理型関数として全平面に解析接続されて、次のような関数等式をもつ；

$$\begin{aligned} & b(s-k) \cdot \sum_{j=0}^n \xi_2(s) \gamma_{2j}(s) \\ (4) \quad & = (-1)^{(n-j)k} b(-s) \sum_{j=0}^n \xi'_2(k-s) \gamma_{2j}(k-s) \\ & \quad (0 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

証明 (3)より次の式を得る

$$\begin{aligned} (5) \quad & \sum_{|T| \neq 0} a(T) |T| \widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k}} \check{f}(\tau g^{-1} T g^{-1}) \\ & = \chi(g)^{k+2} \sum_{|T| \neq 0} b(T) |T| \widehat{|X|^{k+1} M_n} \check{f}(g T \tau g) \\ & \quad (g \in GL(n, \mathbb{R})^+) \end{aligned}$$

- 5 $\text{supp } f \subset V_j = \{X \in V - S; \deg X = (j, n-j)\}$ ~~と示す~~

$$I^a(s, |x|^{k+1} M_n |x|^{-k} f)$$

$$= \int_{G/P} \chi(g)^s \sum_{\pi \neq 0} a(\pi) |\pi| |x|^{k+1} M_n |x|^{-k} f(gT^*g) dg$$

とすれば (但し $\chi(g) = (\det g)^2$, $G = GL(n, \mathbb{R})^+$, $dg = (\det g)^{-n} \pi d\mathbb{R}_i$)

$$I^a(s, |x|^{k+1} M_n |x|^{-k} f)$$

$$= \sum_{z=0}^n \xi_z(s-1) (-1)^{n-z} \Phi_z(|x|^{k+1} M_n |x|^{-k} f, s)$$

$$= \sum_{z=0}^n \xi_z(s-1) (-1)^{n-z} \gamma_{z,j}(s) \Phi_j(|x|^{k+1} M_n |x|^{-k} f, -s)$$

$$= b(s-k-1) \Phi_j(f, s-1) - \sum_{z=0}^n \xi_z(s-1) \gamma_{z,j}(s-1)$$

また,

$$I^b(k-s+2, |x|^{k+1} M_n f)$$

$$= \int_{G/P} \chi(g)^{k-s+2} \sum_{\pi \neq 0} b(\pi) |\pi| |x|^{k+1} M_n f(gT^*g) dg$$

$$= (-1)^{(n-j)k} b(-s+1) \Phi_j(f, s-1) \sum_{l=0}^n \xi'_l(k-s+1) \gamma_{l,j}(k-s+1)$$

となる. ($I^a(s, f)$, $I^b(s, f)$ は $\text{Re } s$ が大なら絶対収束して, f の distribution となる.)

10

$\lambda = 3$ の場合.

$$\int_{G/P} \chi(g)^s \sum_{\pi \neq 0} a(\pi) |\pi| \widehat{|x|^{R+1} M_n |x|^{-R}}^\vee (gTg) dg$$

$$= \int_{G/P, \chi(g) \geq 1} + \int_{G/P, \chi(g) \leq 1}$$

とすれば、前者は s について正則で、後者は (5) により、

$$\int_{G/P, \chi(g) \geq 1} \chi(g)^{-s} \sum_{\pi \neq 0} a(\pi) |\pi| \widehat{|x|^{R+1} M_n |x|^{-R}}^\vee (\pi g^{-1} T g^{-1}) dg$$

$$= \int_{G/P, \chi(g) \geq 1} \chi(g)^{R-s+2} \sum_{\pi \neq 0} b(\pi) |\pi| \widehat{|x|^{R+1} M_n}^\vee (gTg) dg$$

となり、これも s について正則となり、結局

$$I^a(s, |x|^{R+1} M_n |x|^{-R})^\vee = I^b(R-s+2, |x|^{R+1} M_n)^\vee$$

で、両辺とも s について正則である。

各 s について、 f を $\chi_f(f, s-1) \neq 0$ と選ぶことが出来るから、定理が成り立つ。

(3) を満たすような distribution の構成は、affine 対称空間 $SP(n, \mathbb{R}) / U(p, q)$ ($p+q=n$) の表現に関係しており、大島利雄氏らの協力により研究中被論である。

参考文献

- [1] Sato, M. and Shintani, T., On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, *Ann. of Math.* 100 (1974), 131-170
- [2] Shintani, T., On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo* 22 (1975), 25-65
- [3] Maass, H., *Siegel's Modular forms and Dirichlet series*, *Lect. note series of Math.*, No. 216 Springer, (1971).