

非可換ミンコフスキー空間と真空表現

大森 英樹 (Hideki Omori)

東京理科大学嘱託教授 (Tokyo Univ. of Science)
慶応大学訪問教授 (Visiting Prof. Keio University)

表題が物理っぽいですが、内容自身は極めて限られた興味で、枝葉末節的になると思うので、その弁解をかねて、どうしてこのようなものに興味を持っているのかを始に記しておく。

1 数学と物理学の狭間、幾何学と数論の狭間

数学と物理学の境界線をどこに引くかは人によると思うが、私は「時間とエネルギー概念をそのまま認める立場のものを物理学」「これに疑問符を打つ立場のものを数学」として区別している。

さらに数学の中でも、「面積、体積の概念をそのまま認める立場の数学を幾何学」「これに疑問符を打つ立場のものを数論」として区別してもいる。

さらに、数論の中でも、「個数の概念をそのまま認める立場のもの」「これに疑問符を打つ立場のもの」を区別してもいる。

日本における微積分学の定番は「解析概論」ということになっているが、この教科書では微分方程式のような「運動学」が扱われていないことを不満に思っている人もいるらしい。しかし、よく考えてみると、時間概念を無視した運動学などありえないのだから、当然のことでもある。

「時(とき)」などという言葉は文学者が口にすべき言葉で、論理関係にしか注目していない数学者がこれについて発言すると、それは「小賢(こざか)しい」論議とうけとられるのが常で、まじめに扱われたことがない。たしかに、数学は論理関係でしか発言しないのだが、その数学(主に微積分)を使っている人達はほとんど因果関係を記述する為に数学を使っている。確かに、時間の前後を意識しておれば因果関係も、数学で言う論理関係のように扱って良いということは経験的に受け入れられているが、これはなぜだろうか、というのが根底にある疑問である。

射影幾何学の Staudt 代数を思い出せば、図形の操作と数の演算には深いつながりがあることはわかるが、数量についての感覚は幾何学と数論ではかなり違っている。私は行列式を「裏表のある面積、体積のこと」と説明するが、この説明を嫌って逆行列があるかどうかの判定法として導入する人も多い。

曲面の表面積の定義に不自然さを感じる人も多いと思うし、直観的な図形概念を基礎に組み立てられているベクトル解析をきらって、微分形式で書きたがる人も多いだろう。

また、Peano の自然数の公理系は successor なる概念をもとに組み立てられているのだが、これは「個数」の概念というよりは、次々に同じことを繰り返すという、時間の経過のような 1 次元的感觉のものであり、少し変形すると個数の概念では得られない cyclic に繰り返す数系も得られる。

一方、電磁気学に「電価保存法則」というのがある。電子、陽電子が対発生したり、対消滅して個数などは変化するが、電価の代数和は変化しないというものである。

かようなことは、物理の話で数学には関係ないという立場もあるだろうが、量子論までくると、個数の概念すら絶対不動のものではなくなっていることがわかる。

さらに、量子論では電子一つ一つを区別する事は原理的にできないとされている。つまり、同じものが複数あるという取り扱いになる。同じビー球が沢山あるという言い方に何の抵抗もない人でも、「同一人物が二人居る」言い方には抵抗があるだろう。「同じビー球が沢山」と言うときには、暗黙に、精密にやれば一つ一つ識別できるが、それをやっても意味がないという判断が働いている。しかし、物理が言う不確定性原理は単に識別努力に限界があると言うのではなく、これは原理的に不可能としているのである。何をもって同じと言うかは難しいことだが、原理的に区別できないものを複数許容するというのとは一体どういう論理なのだろうか。

しかし、精密なことを言おうとすれば、それなりに精密に組み立てられた言語が要る。物理で重要なパリティという概念もグラスマン代数とかクリフォード代数を使って説明されるが、どうしてそうなのか、根底のところは分からない。

様々な立場はあるだろうが、とにかく物理と数学に共通しているのは「微積分学」を共通の思考道具、表現手段として使っているということである。違いは、それによって何を表現したいかである。

私の基本的態度は「これらのことは、時間の問題もこめて、すべて微積分学の中にすでに書いてある」というものである。我々が、微積分学の表現手段としての可能性を精査していないが故に上に述べたようなことが、物理特有の説明のように見えてしまうだけであると考えている。これは奇妙な神秘主義に陥る考え方とは正反対の（多くの若者に推奨したい）実践的考え方である。

しかし、量子物理が生成、消滅を書くために場の理論に shift したことを数学的に追跡することはできていないので、この辺から、数学論理との乖離が起こったのである。なぜ場の理論にしなければならなかったのかは物理学では様々に説明されているが、どれも数学的な理由付けにはなっていない。つまり、このあたりから、数学者は物理学者についていけなくなって、数学会と物理学会の離縁が起こるのである。

私のもくろみは、この不幸な不協和音を取り除こうというものである。その手掛かりは何か？それは次節に譲る。

2 積公式と表示

我々は微積分学を表現手段として考えているので、微積分の作る代数的側面に注目し、これを超越的に拡張して使う。

だから、様々なグラスマン代数とか、クリフォード代数を考えるとと言っても、微積分学の中にそのモデルが作られない限りそれを認めないという立場をとるのである。これはかなり極端な考え

方で、始からクリフォード代数の公理系と、微積分学を融合させた、super 数学を「定義」してしまおうという立場とは全く違う。

表示の問題は、生成元の固定された多項式の空間に、積の公式を定義しなおしてもとの代数と同形なものを構成せよという問題だから、非可換代数に限らず可換代数でも同様のことは考えられる。ここで少し一般論を考えよう：

任意に固定した $n \times n$ 複素定数行列 Λ に対して、多項式の空間 $\mathcal{A}[u]$ に $*_{\Lambda}$ -積を

$$f *_{\Lambda} g = f e^{\frac{i\hbar}{2} (\sum \overrightarrow{\partial_{u_i}} \Lambda^{ij} \overrightarrow{\partial_{u_j}})} g = \sum_k \frac{(i\hbar)^k}{k! 2^k} \Lambda^{i_1 j_1} \dots \Lambda^{i_k j_k} \partial_{u_{i_1}} \dots \partial_{u_{i_k}} f \partial_{u_{j_1}} \dots \partial_{u_{j_k}} g \quad (1)$$

で定義すれば、これで結合代数 $(\mathcal{A}[u], *_{\Lambda})$ が得られる。

a) $(\mathcal{A}[u], *_{\Lambda})$ の代数構造は Λ の歪対称部分 (実際はその共役類) できまる。

b) 特に Λ が対称行列ならば得られる代数は普通の多項式環と同形。

$\Lambda = K + J$, $K =$ 対称, $J =$ 歪対称 として, J を変えずに K だけを変更することを代数表示の変更とよぶ。同形類は変えないが積の計算のしかたが変更されている。

計算例: $u_i *_{\Lambda} u_j = u_i u_j + \frac{i\hbar}{2} \Lambda^{ij}$, $u_i *_{\Lambda} u_j *_{\Lambda} u_k = u_i u_j u_k + \frac{i\hbar}{2} (\Lambda^{ij} u_k + \Lambda^{ik} u_j + \Lambda^{jk} u_i)$.

上で定義されたものは微積分と関係ないようにみえるかもしれないが、実は、微積分の代数的性質を代表しているものである。私はこれを拡張された微積分の代数と考えている。

このように、計算公式にしたがって計算してしまえば、代数の元はすべて多項式として表示されてしまうから積公式を与えるということは生成元を固定している限り、代数の元の (普通の多項式としての) 表示を一意的に与えることになる。これを局所座標表示のように思えば、 K をとりかえるということは元の表示を変更していることになるから局所座標変換に対応している。

$n=2m$ で $J = \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$ の場合 $(\mathbb{C}[u], *_{\Lambda})$ は Weyl 代数と呼ばれ、その同形類は W_{2m} で表わされる。、 J が非退化なら、 $(\mathbb{C}[u], *_{\Lambda})$ は Weyl 代数と同形である。 Λ の歪対称部分 J が固定されているときにはしばしば $*_{K+J}$ の代わりに $*_K$ という記号で積を表す。

K -表示と K' -表示の間の intertwiner (座標変換にあたる) は具体的に次式で与えられる：

命題 1 任意の $K, K' \in \mathfrak{S}_{\mathbb{C}}(n)$ に対して intertwiner

$$I_K^{K'}(f) = \exp \left(\frac{i\hbar}{4} \sum_{i,j} (K'^{ij} - K^{ij}) \partial_{u_i} \partial_{u_j} \right) f (= I_0^{K'} (I_0^K)^{-1}(f)), \quad (2)$$

は代数の同型 $I_K^{K'} : (\mathbb{C}[u]; *_{K+J}) \rightarrow (\mathbb{C}[u]; *_{K'+J})$ を与える。つまり、次のような等式が成立する $f, g \in \mathbb{C}[u]$:

$$I_K^{K'}(f *_{K+J} g) = I_K^{K'}(f) *_{K'+J} I_K^{K'}(g), \quad (3)$$

Intertwiners は $*$ 積の代数構造は変えないが、可換積による表示を変える。多様体上の関数を考えるときと同じで、基本的考え方は「表示に依存しないものが本質だ」と考えるのであるが、多様体上の関数の場合には underlying topological space X が考えられ表示に依存しないものとして X から $\mathbb{C}$ への写像が考えられるのに対し、この場合、特に代数が非可換の場合には X にあたるもの

が何であるかを言うことはできない。(多分 point set, topological space としてはとらえられない。この意味で pointless manifolds 等と呼んでいたこともある。)

しかし、いろんな表示と intertwiners の集まりを考えてしまえば X にあたるものがなくても微分幾何学は考えられる。これは大域的位相など考えず、局所座標変換だけでテンソル解析をやっていた古い時代の微分幾何学の考え方に近い。

これらのものは全体として、何かこれまでとは違う世界を形成しているように見える。あっち、こっち歩きまわって少しずつ理解の地平を広げているが、広すぎて何があるのか、見渡しきれていない。

以下はその記録の一つである。

2.1 2次の*-指数関数と Intertwiners

記号の約束として、 $u=(u_1, \dots, u_n)$, ${}^t u$ はその転置(縦ベクトル)とする。 A は対称行列とする。*-積を使う齊次2次式を $\langle uA, u \rangle_* = \sum_{ij} A^{ij} u_i {}^t u_j$ と定義しておく。

2次の*-指数関数 $e_*^{i\hbar \langle uA, u \rangle}$ は微分方程式 $\frac{d}{dt} f_t = \langle uA, u \rangle_* f_t$ の、初期条件 $f_0=1$ の解として定義するのだが、これは様々な K -表示で計算しなければならない。

これは実際には、解きやすい表示のところで解いて、それを intertwine するという方法で実行するので、まず intertwiner を2次の指数関数に使えるまでに拡張しておかねばならない。

普通の齊次2次式を $uA {}^t u$ と書き、普通の指数関数 $e^{\frac{i}{\hbar} uA {}^t u}$ を考え、これを intertwine するとどうなるかを考える。具体的には $I_K^{K'}(e^{\frac{i}{\hbar} uA {}^t u})$ を計算する。

$I_K^{K'} = I_0^{K'} I_K^0$, $I_K^0 = (I_0^K)^{-1}$ だから、 $I_0^K(e^{\frac{i}{\hbar} uA {}^t u})$ が分かればよいが、これは、 $I_0^K = e^{\frac{i}{\hbar} K^{ij} \partial_i \partial_j}$ だから、上の指数関数のときと同じように、微分方程式 $\frac{d}{dt} f_t = \frac{1}{4} K^{ij} \partial_i \partial_j f_t$ を初期条件 $f_0 = e^{\frac{i}{\hbar} uA {}^t u}$ で解き $t=i\hbar$ において定義する (cf. [14])。結果は

$$I_0^K(e^{\frac{i}{\hbar} uA {}^t u}) = \frac{1}{\sqrt{\det(I-AK)}} \exp\left(\frac{1}{i\hbar} u \frac{1}{I-AK} A {}^t u\right) \quad (4)$$

となる。 $\frac{1}{\sqrt{\det(I-AK)}}$ の項があるので、 $\det(I-AK)=0$ は表示のパラメータ K に依存する分岐特異点である。上の式を $(\frac{1}{\sqrt{\det(I-AK)}}, \frac{1}{I-AK} A)$ のように略記する。

$\mathfrak{S}(2m)$ を $2m \times 2m$ の複素対称行列の全体とし $\mathcal{D}_K = \{ \frac{1}{I-AK} A \in \mathfrak{S}(2m); \det(I-AK) \neq 0 \}$ とする。すると任意の K に対して、

$$\tilde{\mathcal{D}}_K = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\det(I-AK)}}; \frac{1}{I-AK} A \right); A \in \mathcal{D}_K \right\}$$

は $\mathcal{D}_K$ の連結2重被覆空間である。自然な射影を $\pi: \tilde{\mathcal{D}}_K \rightarrow \mathcal{D}_K$ とする。

Intertwiner $I_K^{K'}$ は自然に次のような写像を引き起こす:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\mathcal{D}}_K & \supset & \pi^{-1}(\mathcal{D}_K \cap \mathcal{D}_{K'}) & \xrightarrow{I_K^{K'}} & \pi^{-1}(\mathcal{D}_{K'} \cap \mathcal{D}_K) & \subset & \tilde{\mathcal{D}}_{K'} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{D}_K & \supset & \mathcal{D}_K \cap \mathcal{D}_{K'} & = & \mathcal{D}_{K'} \cap \mathcal{D}_K & \subset & \mathcal{D}_{K'} \end{array}$$

2.1.1 $I_K^{K'}$ は 2-2 写像である.

上のダイアグラムの下に行の $=$ は恒等号である. 従って, 上の段にある $I_K^{K'}$ は単なる被覆写像のように見えるかもしれないが, 実は違っていて

命題 2 上の *intertwiner* $I_K^{K'}$ は 2-to-2 の写像としてしか定義されない.

その理由は, 左側では $\det(I-AK')$ となるところも除かれているが, この場所は左側では空間としての特異点ではなく $I_K^{K'}$ が定義できない点だから除かれているだけである. 従って, $A_0 \in \mathcal{D}_K \cap \mathcal{D}_{K'}$ を出発する曲線 A_t が $\det(I-AK')=0$ の集合のまわりを回って A_0 に戻ってきても, (その曲線が $\det(I-AK)=0$ の集合のまわりを回っていないければ) $\pi^{-1}(A_t)$ は二つの閉曲線ができているだけである. ところがこれを $I_K^{K'}$ で写すと, 右側では空間の特異点の集合 $\det(I-AK')=0$ をまわっている, こちら側では $\pi^{-1}(A_t)$ は一つの閉曲線 (閉曲線の連結 2 重被覆) ができる. つまり, 左側の 2 点 $\pi^{-1}(A_0)$ のどれが, 右側のどの 2 点 $\pi^{-1}(A_0)$ に対応するのかは (局所的には定義できるが) $A_0 \in \mathcal{D}_K \cap \mathcal{D}_{K'}$ 全体では言うことはできない.

$$I_K^{K'} \left(\frac{g}{\sqrt{\det(I-AK)}}; \frac{1}{I-AK} A \right) = \left(\frac{g}{\sqrt{\det(I-AK')}}; \frac{1}{I-AK'} A \right)$$

の平方根 $\sqrt{\det(I-AK)}$ は, 特異点が動いてしまうので covering map で処理することはできないのである.

荒っぽく次のようにいうこともできる.

$\det(I-AK)=0$ となる A の所に (K に依存する) 分岐特異点が出るが, これをリーマン面を作って処理しようとする $(g; A)$ の入っている source space の方にスリットを入れて考えることになるが, $I_K^{K'}$ は変換として考えたいものであるから, source space の方にスリットを入れて 2 重被覆を考えたら target space も 2 重被覆を作らないと逆変換が作れないことになる.

一般の *intertwiner* $I_K^{K'}$ は多項式レベルでは $I_K^{K'} = I_0^{K'} (I_K^0)^{-1}$ のように作られるべきだから, 逆変換まで許すような考え方をすると, $I_K^{K'}$ は 2 対 2 の写像として扱う以外手段がないのである.

局所座標表示と同じことだから, ordering free のものが本質だと述べたが, ある種の元は表示によっては発散している. これは, 関数の局所座標による表示でも起こることだから不思議はないが, 表示を, その特異点のまわりで一周させると符号が変わるという 2 価性が現れる. ここにきて表示の問題を多様体上の関数の局所座標表示と同じようには扱えない現象にぶつかるのである. (このようなことがおこるのは 2 次式の指数関数のところからで, それ以下の増大度の関数ではこのようなことは起きないことがわかっている. しかも, もっと増大度の大きい関数の指数関数を扱うと $\log$ のような無限多価性を持ったものも現れる.) つまり, ordering free なものが論理関係としては本質的なものだと考える限り, 上のようなものは 2 価の元として扱うべき対象だということになるのである.

3 両側不変なローレンツ計量を持った 4 次元リー群

普通のミンコフスキー空間は両側不変なローレンツ計量を持った 4 次元可換リー群であるが, 非可換 4 次元リー群で両側不変なローレンツ計量を持ったものを $*$ -積の指数関数を用いて作ること

ができる。

さらに、これが $*$ -積の指数関数で作られていることから、いろいろな $\infty \times \infty$ の行列表現を持つ。

この場合、表現行列には $N \times N$ 型と $Z \times Z$ 型のものが現れるが、それが、代数の表示のしかたで変わるもので、この現象に興味をもっている。

群 G に半順序 $\leq$ が定義され、それが $x \leq y$ のとき任意の z に対して $xz \leq yz$, $zx \leq zy$ が成立する場合順序群であると呼ぶ。 G が Lie group の場合には adjoint invariant な Lorentz 計量があれば、 G は chronological partial order に関して順序群となる。 G が連結ならばこのような Lorentz 計量をもった Lie 群は有向順序群 i.e. $C_+ C_- = G$, ただし $C_+ = \{x \in G; e \leq x\}$ である。

4次元 Lie 群でこのような Lorentz 計量をもったものとしては $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ 以外では次のようなものがある。(これしかないらしい。)

E^2 を 2次元 Euclid 空間とし内積を $\langle X, Y \rangle$ とする。 E^2 の, 2-cocycle $\omega(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \langle \xi A, \eta \rangle$, による中心拡大を $E^2 \times_{\omega} \mathbb{R}$ とする。ただし A は歪対称行列である。

群構造は次で与えられる：

$$(\xi, s) * (\eta, t) = (\xi + \eta, s + t + \frac{1}{2} \langle \xi A, \eta \rangle), \quad \omega(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \langle \xi A, \eta \rangle.$$

ここで、one parameter の自己同形群 $\rho_A(\sigma) : E^2 \times_{\omega} \mathbb{R} \rightarrow E^2 \times_{\omega} \mathbb{R}$, $\rho_A(\sigma)(X, s) = (Xe^{-\sigma A}, s)$ を考え、これによる半直積群 $\tilde{G}_e = (E^2 \times_{\omega} \mathbb{R}) \rtimes_{\rho_A} \mathbb{R}$ を作る。この群構造は次で与えられる：

$$((\xi, s), \sigma) * ((\eta, t), \tau) = ((\xi, s) * (\eta e^{-\sigma A}, t), \sigma + \tau), \quad ((\xi, s), \sigma)^{-1} = ((-\xi e^{\sigma A}, -s), -\sigma).$$

さらに、随伴表現は次で与えられる：

$$\begin{aligned} & ((\xi, s), \sigma) * ((\eta, t), \tau) ((\xi, s), \sigma)^{-1} = ((\xi, s) * (\eta e^{-\sigma A}, t), \sigma + \tau) * ((-\xi e^{\sigma A}, -s), -\sigma) \\ & = (\xi - \xi e^{-\tau A} + \eta e^{-\sigma A}, t + \frac{1}{2} \langle \xi A, \eta e^{-\sigma A} \rangle - \frac{1}{2} \langle \eta e^{-\sigma A} A, \xi e^{\sigma A} \rangle - \frac{1}{2} \langle \xi A, \xi e^{\sigma A} \rangle, \tau). \end{aligned}$$

$\tilde{G}_e$ の Lie 環 $\tilde{\mathfrak{g}}_e$ は単位元の接空間を $\tilde{\mathfrak{g}}_e = T_e \tilde{G}_e$ として次で与えられる：

$$[(\dot{\xi}, \dot{s}, \dot{\sigma}), (\dot{\eta}, \dot{t}, \dot{\tau})] = (\tau \dot{\xi} J - \dot{\sigma} \dot{\eta} J, \langle \dot{\xi} J, \dot{\eta} \rangle, 0). \quad (5)$$

$\tilde{\mathfrak{g}}_e = E^2 \oplus \mathbb{R}^2$ 上の Lorentz 計量は

$$\langle (\dot{\xi}, \dot{a}, \dot{\sigma}), (\dot{\eta}, \dot{b}, \dot{\tau}) \rangle = \dot{a} \dot{\tau} + \dot{\sigma} \dot{b} - \langle \dot{\xi}, \dot{\eta} \rangle \quad (6)$$

のように与える。ただし、 $\langle \dot{\xi}, \dot{\eta} \rangle$ は E^2 上の正定値内積である。因果構造は自然に正錐

$$V_+ = \{(\dot{X}, \dot{a}, \dot{\tau}), (\dot{X}, \dot{a}, \dot{\tau})\} = 2\dot{a}\dot{\tau} - \langle \dot{X}, \dot{X} \rangle \geq 0, \quad \tau \geq 0$$

から与える。これが adjoint invariant であることを見るには、次のことを見れば十分である：

$$\langle [((\xi, a, \sigma), (\eta, b, \tau)), (\zeta, c, \tau')], (\xi, a, \sigma), (\zeta, c, \tau') \rangle + \langle ((\eta, b, \tau), [(\xi, a, \sigma), (\zeta, c, \tau')]) \rangle = 0.$$

これより次がわかる：

定理 1 群 $\tilde{G}_e$ は adjoint invariant な Lorentz 計量 (6) を持つ。

3.1 $\tilde{G}_e$ を $\ast$ -積で作る

ミンコフスキー空間に相当するものを、非可換な代数を用いて作ると、それを物理では非可換時空と呼ぶようなので、ここでも $\tilde{G}_e$ を $\ast$ -積で作って、 $\tilde{G}_e$ を非可換時空と呼ぶことにする。可換代数で作った場合にはその代数は時空多様体上の関数空間と解釈されるだろうが、「非可換代数を用いて時空多様体に相当するものを作る」ということの意味は確定していない。

この方面は、量子群で作るのが試みられているが、ここではそれとは少し違って $\tilde{G}_e$ を $\ast$ -積で作ろうとしているのである。

そのために前に述べた $\ast$ -積の一般的性質からはじめなければならない。 $Hol(\mathbb{C}^n)$ を複素 n -空間上の整関数 $f(u)$ の全体に広義一様位相をいれた Fréchet 空間とする。

次の補題は積公式 (1) から容易に示せる：

補題 1 多項式 $p(u)$ を左から掛ける $p(u) \ast$ (resp. 右から掛ける $\ast p(u)$) のは $Hol(\mathbb{C}^n)$ から自身への連続線形写像である。

多項式近似定理により、次がわかる：

命題 3 任意の多項式 p , 任意の整関数 $f \in Hol(\mathbb{C}^n)$ について、積 $p \ast f$ 及び $f \ast p$ は $Hol(\mathbb{C}^n)$ の元として定義される。結合律 $(f \ast g) \ast h = f \ast (g \ast h)$ は f, g, h のどれか二つが多項式ならば成立する。

この命題は 1 次式の指数関数に拡張される：

Taylor 展開と積公式を組み合わせると、次がわかる：

$$e^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi, u \rangle} \ast_K f(u) = e^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi, u \rangle} f(u + \xi(K+J)), \quad f(u) \ast_K e^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi, u \rangle} = e^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi, u \rangle} f(u - \xi(K+J)). \quad (7)$$

これより指数関数増大度の二つの関数と整関数との積について結合律が成立していることがわかる。

一般には g が多項式であっても、結合律 $(f \ast g) \ast h = f \ast (g \ast h)$ が成立するとは限らない (cf. [6]).

しかし、積を $\hbar$ に関する formal power series として計算する限り $\ast$ -積はいつでも定義でき、結合律も成立しているので、計算が $\hbar$ に関して $\hbar=0$ を含んで実解析的になっている場合には結合律が成立する。この素朴な判定法は案外強力である (cf. [10]).

3.1.1 非可換時空

E^3 を 3-次元 Euclidean 空間とし、内積を $\langle X, Y \rangle$ とする。 x_1, x_2, x_3 を正規直交座標関数とする。 x_1, x_2, x_3 の複素係数の多項式 $f, g \in \mathbb{C}(E^3)$ に対し、積を次の Moyal 積公式で与える $f \ast_\Theta g = f e^{\frac{i\hbar}{2} (\sum \overrightarrow{\partial_{x_i}} \Theta^{ij} \overrightarrow{\partial_{x_j}})} g$. Θ は 0 でない 歪対称行列であるが、 $\dim E^3=3$ なので Θ のランクは 2 であり、直交変換を選べば次のような標準形となる

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

このようにして作った代数を、 $\ast$ -指数関数が定義できるところまで超越的に拡張し、 $\{e^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi, u \rangle}, \xi \in \mathbb{R}^2\}$ 及び $e^{\frac{\sigma}{\hbar} \langle u, u \rangle} \ast$ で生成される群 G_Θ を考える。

$\{e_{**}^{\frac{1}{\hbar}\langle\xi,x\rangle}, \xi \in \mathbb{R}^3\}$ が加法群 $\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}$ を中心とする中心拡大になっていることはすぐにわかる。また one parameter 群 $e_{**}^{\sigma \frac{1}{\hbar}\langle x,x\rangle}$ による随伴表現が自己同型群として作用していることもわかる。従って、

$$G_\Theta = \{e_{**}^{\frac{1}{\hbar}\langle\xi,x\rangle} *_{\Theta} e_{**}^{\sigma \frac{1}{\hbar}\langle x,x\rangle}, \xi \in \mathbb{R}^3, \sigma \in \mathbb{R}\}.$$

は前に与えた群 $\tilde{G}_\Theta$ と同型である。しかし、同形類は変えないがこれを具体的に x_1, x_2, x_3 を使って表示する段になると表示はパラメーター Θ に依存している。

正確には、うまく座標変換すれば、 x_3 が center の元となり、 G_Θ は群

$$\{e^{\frac{\xi_3}{\hbar}x_3 + \sigma \frac{1}{\hbar}x_3^2} *_{\Theta} e^{\frac{\xi_1}{\hbar}x_1 + \frac{\xi_2}{\hbar}x_2} e_{**}^{\sigma \frac{1}{\hbar}(x_1^2 + x_2^2)}\}$$

として表示される。

これは adjoint invariant な Lorentz 計量 $(\sigma x_3 + \xi_3)^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2 + x_3^2)$ をもった群である。

3.1.2 Lorentz 群は $\coprod_{\Theta} G_\Theta$ に作用する

この状況を考えると、我々が得ているのは一つの群というよりは互いに同型な群の族である。

個々の群 G_Θ の自己同型群は $e_{**}^{\frac{\xi_3}{\hbar}x_3}$ が center であることを考えればあまり大きくないことがわかるのだが、“時空”の対称性を記述しているとされる Lorentz 群も含んではない。そこで直和集合考え、これを $\coprod_{\Theta} G_\Theta$ のように表す。すると Lorentz 群の普遍被覆群 $SL(2, \mathbb{C})$ が生成元変換の群として自然に $\coprod_{\Theta} G_\Theta$ 作用していることが次のようにしてわかる：

まず、前節の最後に述べた標準形で (x_1, x_2) を (u_1, u_2) と置き、これを生成元と思い直し、さらに $\frac{\xi_3}{\hbar}x_3$ を (center となる生成元と思って) $\frac{\xi_3}{\hbar}x_3$ と置く。生成元と思えば、これが実座標関数であったとか、複素変数であったとかのいきさつから解放され、次がわかる：

定理 2 任意の $g \in SL(2, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して集合

$$G_g = \{e_{**}^{\frac{1}{\hbar}\langle\xi^t g^{-1}, u g\rangle} *_{\Theta} e_{**}^{\sigma(\frac{1}{\hbar}\langle u g, u g\rangle + \lambda)}, s, \xi, \eta, \sigma \in \mathbb{R}\}$$

はある K -順序表示 ($K \in D$) に関して、adjoint invariant Lorentz 計量をもった群になる。この群は $\mathbb{R}^3 \times S^1$ に可微分同相で、結果として、非可換有向順序群となる。

表示のパラメーター K が入るべき領域 D は上の定理についてだけならばほとんど任意の対称行列でよいが、あとで様々条件がつく (次節参照)。

G_g の自己同型群は小さいのだが、Lorentz 群 $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ は空間 $\coprod_{g \in SL(2, \mathbb{C})/SO(2, \mathbb{C})} \tilde{G}_g$ に自然に生成元変換の群として作用する。

非可換な時空を考えると、その非可換性の為に対称性は極端に小さくなるが、そのことが逆に D -brane のような考え方を許すことになるのである。

さらに、この群が $*$ -積を用いて作られていることを使って次がわかるのである：

定理 3 群 $\tilde{G}_g$ の自然な真空表現が原点でのテイラー級数展開、とかフーリエ級数展開をとおして得られる。

この定理を示すのが目的であるが、これの面白いところは表現空間を設定する以前に行列表現が作られてしまうということである。ことわっておくが、これは Lorentz 群の表現ではなく、非可換時空の行列表現である。

群, 群の族, さらにその行列表現などまで出てきて、一体どれが我々の素朴な時空なのかといふかるむきもあろうかと思うが、そんな大変な問題にはどうも答えられない。

4 *-指数関数

まづ, *-指数関数をきちんと定義する。対称行列 $A \in \mathfrak{S}(n)$ に対し, $\langle uA, u \rangle_*$ を K -順序表示の族

$$:\langle uA, u \rangle_*:_K = \langle uA, u \rangle + \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} A, \quad K \in \mathfrak{S}(n)$$

とする。同じ文脈で $\langle \xi, u \rangle_*$ というものも考えられるが、この場合は単一の関数 $\langle \xi, u \rangle$ を与えるだけである。

-指数関数 e_^{tH} を, K -表示毎に考えた発展方程式

$$\frac{d}{dt} f_t(K) = H_* :_K *_K f_t(K), \quad f_0(K) = 1. \quad (8)$$

の実解析解の族 $\{f_t(K)\}$ として定義する。

$e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi, u \rangle}$ は族 $\{e^{\frac{1}{2\hbar} \langle \xi K, \xi \rangle} e^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi, u \rangle}\}$, として定義されるが, $e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle uA, u \rangle}$ は K -順序表示の K がある稠密な領域に属する場合にしか定義されない (cf. §4), しかもこの場合は $t \in \mathbb{C}$ に関して特異点を持ち、一般に 2 価の元となる (cf. [12]). しかし, sector をうまくとるとそこでは複素半群となる。

計算公式としては次の公式を使う: $\alpha \in sp(m, \mathbb{C})$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$ とすると,

$$\begin{aligned} e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi, u \rangle} *_K e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle \eta, u \rangle} &= e^{\frac{1}{2\hbar} \langle \xi J, \eta \rangle} e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi + \eta, u \rangle} \\ e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle u(\alpha J), u \rangle} *_K e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle \xi, u \rangle} &= e^{\frac{1}{2\hbar} \langle \xi e^{t\alpha}, u \rangle} e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle u(\alpha J), u \rangle}. \end{aligned}$$

普通の指数関数との間の指数法則は自然に成立している:

$$e^{\frac{1}{\hbar} z} *_K e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle \eta, u \rangle} = e_*^{\frac{1}{\hbar} (z + \langle \xi, u \rangle)}, \quad e^{\frac{1}{\hbar} z} *_K e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle u(\alpha J), u \rangle} = e_*^{\frac{1}{\hbar} z + \frac{1}{\hbar} \langle u(\alpha J), u \rangle}.$$

しかし次の指数法則 $e_*^{\frac{s}{\hbar} \langle u(\alpha J), u \rangle} *_K e_*^{\frac{t}{\hbar} \langle u(\alpha J), u \rangle} = e_*^{\frac{(s+t)}{\hbar} \langle u(\alpha J), u \rangle}$ は一般には 2 価の元としてのみ成立する。(詳細は (11) 参照.)

任意の $\alpha \in sp(m, \mathbb{C})$ に対して, *-指数関数は K -順序表示では次のようになる: (この公式は [11], [12], [13], [14] で部分的に求められていたものをまとめたものである.)

$$:e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle u(\alpha J), u \rangle}:_K = \frac{2^m}{\sqrt{\det(I - \kappa + e^{-2t\alpha}(I + \kappa))}} e^{\frac{1}{\hbar} \langle u \frac{1}{I - \kappa + e^{-2t\alpha}(I + \kappa)} (I - e^{-2t\alpha}) J, u \rangle} \quad (9)$$

ただし $\kappa = JK$. これが (8) の実解析的な解であることは容易に確かめられる。

任意の $\alpha \in sp(m, \mathbb{C})$ に対して $\det e^{t\alpha} I = 1$ であることより, (9) は次のように書き換えてよい:

$$:e_*^{\frac{1}{\hbar} \langle u(\alpha J), u \rangle}:_K = \frac{2^m}{\sqrt{\det((I - \kappa)e^{t\alpha} + e^{-t\alpha}(I + \kappa))}} e^{\frac{1}{\hbar} \langle u \frac{1}{(I - \kappa)e^{t\alpha} + e^{-t\alpha}(I + \kappa)} (e^{t\alpha} - e^{-t\alpha}) J, u \rangle} \quad (10)$$

$\sqrt{\cdot}$ の符号には不定性が伴うが, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ のように計算すると, 指数法則

$$:e_*^{\frac{s}{i\hbar}\langle u(\alpha J), u \rangle}_*:_{K*} :e_*^{\frac{t}{i\hbar}\langle u(\alpha J), u \rangle}_*:_{K*} = :e_*^{\frac{(s+t)}{i\hbar}\langle u(\alpha J), u \rangle}_*:_{K*} \quad (11)$$

が成立する. これは符号を無視して計算しているのとは違うことに注意してもらいたい.

任意の $g \in Sp(m, \mathbb{C})$ に対して, $\tilde{J} = gJg^{-1}$ は $\tilde{J}^2 = -I$, $e^{t\tilde{J}} = (\cos t)I + (\sin t)\tilde{J}$ を満たす. これを使って $\alpha = \tilde{J}$ と置けば, $\tilde{J}J = -g^t g$ がわかる. これを (9) に代入し,

$$(I - e^{-2t\tilde{J}})J = (1 - \cos 2t)J - (\sin 2t)g^t g = 2 \sin t((\sin t)J - (\cos t)g^t g),$$

$\kappa' = g^{-1}\kappa g$ と置いて

$$(I - \kappa) + e^{-2t\alpha}(I + \kappa) = -2g((\sin t)I + (\cos t)J)((\cos t)J + (\sin t)\kappa')g^{-1}$$

などに注意してやると $\det((\sin t)I + (\cos t)J) = 1$, $\kappa = JK$ だから

$$:e_*^{-\frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle}_*:_{K*} = \frac{1}{\sqrt{\det((\cos t)I - (\sin t)J\kappa')}} \exp \frac{-1}{i\hbar} \langle ug \left(\frac{\sin t}{(\cos t)I - (\sin t)J\kappa'} \right), ug \rangle \quad (12)$$

が得られる. とくに, $:e_*^{\pm \frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle}_*:_{K*} = \sqrt{(-1)^{2m}}$, であるが $\pm$ の符号は表示の parameter K に依存する.

さらに次のような奇妙な元 (cf. [12])

$$:e_*^{\pm \frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle}_*:_{K*} = \frac{1}{\sqrt{\det(-K)}} e^{-\frac{t}{i\hbar}\langle uK^{-1}, u \rangle}. \quad (13)$$

も得られる. これが奇妙な訳は, 右辺が左辺の $g \in Sp(m, \mathbb{C})$ とか符号に依存しなくなっているからである.

次のようなこともわかる: $:e_*^{\frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle}_*:_{K*}$ は虚軸に沿って負の指数関数 $e^{-|t|}$ と同じ速さで減少する. 従って任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\int_{-\infty}^0 :e_*^{ta + \frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle}_*:_{K*} dt, \quad (\operatorname{Re} a > -1), \quad -\int_0^{\infty} :e_*^{ta + \frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle}_*:_{K*} dt, \quad (\operatorname{Re} a < 1). \quad (14)$$

は収束する.

もし $|\operatorname{Re} a| < 1$ なら, 2 次形式 $a + \frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle_*:_{K*}$ は二つの異なる逆元をもち, その差が

$$\int_{-\infty}^{\infty} :e_*^{it(-ia + \frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle)_*}:_{K*} dt$$

であたえられることになる. (δ -関数のフーリエ変換の公式を思い出してほしい.)

この場合積分路は実軸に沿っている必要はないから実際には無限に沢山の $(-ia + \frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle)_* :_{K*}$ の逆元を得てしまう.

任意の $h(u) \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C}^n)$ と任意の $g \in Sp(m, \mathbb{C})$ に対して, $(g^*h)(u) = h(ug)$ と定義する. すると, (12) で述べたように symplectic な座標変換は表示の変更でカバーされる:

$$g^*:e_*^{-\frac{t}{i\hbar}\langle u, u \rangle}_*:_{K*} = :e_*^{-\frac{t}{i\hbar}\langle ug, ug \rangle}_*:_{gKg^{-1}}. \quad (15)$$

このように、表示を変更すると指数関数の性質は変化してしまうので、ordering に無関係なものだけが幾何学的/物理的な意味があるとする考え方 (independence of ordering principle) は意味を失うように見えるかもしれないが、私は Gullemin, Sternberg [2] が言っている、general covariance principle と同様に、この原理も深い意味で成立しているべきだと考えている。なを、このように表示によって性質が変わって見える現象は Gerstenhaber, Giaquinto [1] でも言及されている。

4.1 2変数の *-指数関数

以下では主に u, v で $\mathbb{C}$ 上生成された 2 変数の Weyl 代数 W_2 を扱う。基本交換関係は $[u, v] = -i\hbar$, ただし $[u, v] = uv - vu$, の代数を扱うのだが、以下では前の記号の使い方に合わせて次のような記号も使う:

$$u = (u, v), \quad \xi = (\xi, \eta), \quad u \circ v = \frac{1}{2}(u * v + v * u), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\frac{1}{2i\hbar}[u_*^2 + v_*^2, \langle \xi, u \rangle] = -\langle \xi J, u \rangle$ だから,

$$\text{Ad}(e_*^{\sigma \frac{1}{2i\hbar}(u_*^2 + v_*^2)})(\langle \xi, u \rangle) = e_*^{\sigma \frac{1}{2i\hbar}(u_*^2 + v_*^2)} * e_*^{\langle \xi, u \rangle} * e_*^{-\sigma \frac{1}{2i\hbar}(u_*^2 + v_*^2)} = e_*^{\langle \xi e^{-\sigma J}, u \rangle}$$

である。元の 2 価性は ($\pm$ だけなので) この“群”の随伴表現に影響しないで、1 価性のある作用として定義される。この随伴表現で $e_*^{\sigma \frac{1}{2i\hbar}(u_*^2 + v_*^2)}$ は自己同形群として群 $H_{\mathbb{C}}(\omega)$ に作用するから、これで半直積群 $H_{\mathbb{C}}(\omega) \ltimes_{\text{Ad}} e_*^{H \pm \frac{1}{2i\hbar}(u_*^2 + v_*^2)}$ が作られる。

明らかに、群 $e^{\frac{i}{\hbar} \langle \xi, u \rangle}$ は E^2 の cocycle $\omega(u, u') = \langle u J, u' \rangle$ による中心拡大である。この群を $H_{\mathbb{C}}(\omega)$ と書く。

そこで、上の指数関数だが、生成元の変更まで考慮し任意の $g \in SL(2, \mathbb{C})$ で変換し、

$$J_{K'} = -{}^t g K g = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

のように置くと、

$$:e_*^{\frac{i}{\hbar} \langle u g, u g \rangle}:_K = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{(J_{K'})}(t)}} \exp \frac{1}{i\hbar} \frac{\sin t}{\Delta_{(J_{K'})}(t)} \langle u g \begin{bmatrix} \cos t - b \sin t & c \sin t \\ c \sin t & \cos t - a \sin t \end{bmatrix}, u g \rangle. \quad (16)$$

である。 $\Delta_{(J_{K'})}(t)$ や exp-記号の中にある変量は皆 π -周期であるが、平方根 $\sqrt{\Delta_{(J_{K'})}(t)}$ の符号は表示のパラメーター K に依存していて、これがややこしい問題を引き起こす。

$$\Delta_{(J_{K'})}(t) = \det((\cos t)I - (\sin t)J_{K'}) = \cos^2 t - (a+b) \sin t \cos t + (ab - c^2) \sin^2 t \quad (17)$$

である。 $a+b$ とか $ab - c^2$ は任意の複素数値を取れる。

$\sqrt{\quad}$ の符号の不定性など大した問題でないように思うかもしれないが、複素平面全体にわたってきめてしまうことができないものである。従ってこれら *-指数は一般に、 $t \in \mathbb{C}$ では 2 価であるとしなければならない。

しかし, $(a-b)^2+4c^2=0$ だと, $\Delta_{(J\kappa')}(t)=\frac{1}{4}(2\cos t+(a+b)\sin t)^2$ だから, 初期条件を $t=0$ で $e_*^{0\frac{1}{i\hbar}H_*}=1$ としてやることにより, $\sqrt{\quad}$ の符号の不定性を複素平面全体にわたって消すことができる.

この場合, 特異点は $\pi(\text{not } 2\pi)$ -周期的に実軸に沿って現れる. しかし, このような性質は一般に intertwiner が 2 価 (cf.[11]) であったことを考えると不安定でちょっと表示を変えると性質が変わってしまう.

$c=0$ とすると次のようになるから, a, b を $\mathbb{C}$ 内で動かしてみるだけで大体の様子がわかる:

$$:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(u,u)}:_K = \frac{1}{\sqrt{(\cos t - a \sin t)(\cos t - b \sin t)}} \exp \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{\sin t}{\cos t - b \sin t} u^2 + \frac{\sin t}{\cos t - a \sin t} v^2 \right).$$

これらの観察より, $*$ -指数関数の特異点は一般には実軸に平行に π -周期的に 2 列現れ, しかも 虚軸に沿っては $e^{-|t|}$ -減衰となる.

$:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(u(g^t), u)}:_K$ の特異点や増大度の性質は大まかに以下のように分類される:

(1) 表示パラメーター K が領域 D_+ (resp. D_-) 内にあるとき, 特異点は実軸に平行に開下 (resp. 上) 半平面にあり, $*$ -指数関数は実軸を含む 上 (resp. 下) 半平面上で定義された複素半群となる. この場合は $t=0$ で 1 としているので元についての 2 価性はない. (しかし特異点のまわりをまわると 価は変化する.)

おまけに, $:e_*^{\pm t\frac{1}{i\hbar}(ug, ug)}:_K = -1$ だから, 指数法則よりこれは π -交代周期の元であることがわかる.

これより $e^{\frac{it}{2\pi}} :e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(ug, ug)}:_K$ は 2π -周期的な one parameter 群である.

(2) 表示パラメーター K が領域 D_0 内にあるとき, この場合特異点は実軸を挟んで上下に 2 列実軸に平行に現れる. この場合には多価性の処理のためにシートを 2 枚用意し特異点の対毎にスリットをいれて考える. 実軸上に特異点がないので $*$ -指数関数は π -周期的な 2 価性のない実 one parameter 群である. これより $:e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(ug, ug)}:_K$ は 2π -周期的 one parameter 群である.

“群” $e_*^{c\frac{1}{i\hbar}(u^2+v^2)}$ を考える. これの元は一般には 複素パラメーターでは 2 価の元としなければならないが, 表示パラメーターが D_+/D_- に応じて, 上/下半平面 H_+/H_- 上で定義された可換複素半群として扱うことができる.

表示パラメーターが D_0 の元るときには, 複素半群としては扱えないので $\mathbb{R}$ 上の周期的 one parameter 群としてフーリエ変換で扱わねばならない.

4.2 真空, 行列要素

K が $D_{\pm}$ や D_0 に属する K -順序表示ではほとんどすべての場合, 虚軸上に特異点はないので, 以下その場合のみ考える.

公式 (16) より容易に次のことがわかる: $K \in D_+, D_-$ および D_0 のとき

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} :e^{-t} e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(ug, ug)}:_K = \frac{2}{\sqrt{1+c^2-ab+i(a+b)}} \exp \frac{1}{i\hbar} \langle ug(I+iJ\kappa')^{-1}, ug \rangle. \quad (18)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} :e^t e_*^{t\frac{1}{i\hbar}(ug, ug)}:_K = \frac{2}{\sqrt{1+c^2-ab-i(a+b)}} \exp \frac{1}{i\hbar} \langle ug(I-iJ\kappa')^{-1}, ug \rangle. \quad (19)$$

つぎのように置き, これらを真空と呼ぶ:

$$\varpi_*(g^t g) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} e_*^{\frac{t}{\hbar} \langle u g, u g \rangle}, \quad \overline{\varpi}_*(g^t g) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t e_*^{\frac{t}{\hbar} \langle u g, u g \rangle}. \quad (20)$$

指数法則より $\varpi_*(g^t g) * \varpi_*(g^t g) = \varpi_*(g^t g)$, and $\overline{\varpi}_*(g^t g) * \overline{\varpi}_*(g^t g) = \overline{\varpi}_*(g^t g)$. 話を簡単にするために以下では $g=e$ とする (cf. (15)).

計算上は u, v の代わりに次のように座標変換をして考えたほうがわかりやすい:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + iv), \quad \hat{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(iu + v).$$

$[\zeta, \hat{\zeta}]_* = -i\hbar$ だから, $\zeta \circ \hat{\zeta} = \frac{1}{2}(\zeta * \hat{\zeta} + \hat{\zeta} * \zeta)$ とおいてやれば, $2i\zeta \circ \hat{\zeta} = u_*^2 + v_*^2$ となり, $u \circ v$ でわかっている公式が使える. $\zeta * \hat{\zeta} = \zeta \circ \hat{\zeta} - \frac{1}{2}i\hbar$, $\hat{\zeta} * \zeta = \zeta \circ \hat{\zeta} + \frac{1}{2}i\hbar$ だから, 公式 (18), (19) より

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} e_*^{\frac{t}{\hbar} 2\zeta * \hat{\zeta}} &= \varpi_*(ee), & \lim_{t \rightarrow \infty} e_*^{\frac{t}{\hbar} 2\zeta * \hat{\zeta}} &= \overline{\varpi}_*(ee), \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} e_*^{\frac{t}{\hbar} 2\hat{\zeta} * \zeta} &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} e_*^{\frac{t}{\hbar} 2\hat{\zeta} * \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

極限の存在 (18) より $\zeta \circ \hat{\zeta} * \varpi_*(ee) = 0 = \varpi_*(ee) * \zeta \circ \hat{\zeta}$ であるが, 玉突公式 $v * f(u * v) = f(v * u) * v$ と公式 (21) を使うとつぎがわかる:

$$\hat{\zeta} * \varpi_*(ee) = 0 = \varpi_*(ee) * \zeta. \quad (22)$$

つまり, 真空は共役複素変数を消してしまう働きをするのである.

前に述べた, 結合律に関する注意 (cf. [14]) を, 少々神経質に使って次がわかる:

命題 4 $\frac{1}{\sqrt{p!q!(i\hbar)^{p+q}}} \zeta^p * \varpi_*(ee) * \hat{\zeta}^q$ と $\frac{1}{\sqrt{p!q!(i\hbar)^{p+q}}} \hat{\zeta}^p * \overline{\varpi}_*(ee) * \zeta^q$ はそれぞれ (p, q) -行列要素である. これらを $E_{p,q}, \overline{E}_{p,q}$ のようにあらわしておく.

4.3 Taylor 展開

まず次の一般的事実に注目する (cf. [7]):

補題 2 If $f(z)$ が半径 R で中心が 0 の複素開円盤 $D(R)$ から 複素数 $\mathbb{C}$ 上の Fréchet 空間への holomorphic mapping ならば, $f(z)$ の $z=0$ における Taylor 展開は半径 r , $0 < r < R$ の閉円盤上で一様収束する.

任意の $K \in D_+$ に対し, $:e_*^{-t\frac{1}{\hbar} \langle u g, u g \rangle} :_K$ は閉上半平面で定義された交代 π -周期な複素半群で, これより, $:e_*^{\frac{t}{\hbar} \langle u g, u g \rangle} :_K$ は同じ所で定義された 2π -周期の複素半群となっていることを思い出そう.

これより, $w = e^{it}$ とおけば $e_*^{(\log w) \frac{1}{\hbar} \langle u, u \rangle} :_K = :e_*^{(\log w) \frac{1}{\hbar} \zeta * \hat{\zeta}} :_K$ は w に関して単位閉円盤上の Fréchet space valued の正則関数となる. 簡単のため $g=e$ とし, 次のように置く:

$$f_K(w) =: \frac{1}{\sqrt{w}} e_*^{(\log w) \frac{1}{\hbar} \langle u, u \rangle} :_K =: e_*^{(\log w) \frac{1}{\hbar} \zeta * \hat{\zeta}} :_K, \quad g_K(\hat{w}) = f_K(\hat{w}^{-1}). \quad (23)$$

e^{it} を w に置き換え $\sqrt{\Delta_{(J_K)}(t)}$ 式を w の関数として書く. すると

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_{(J_K)}(t)}} = \frac{2w}{\sqrt{(1+c^2-ab+i(a+b))w^4+2(1-c^2+ab)w^2+(1+c^2-ab-i(a+b))}}. \quad (24)$$

のようになる. $w=0$ でも定義されていることが味噌である.

定理 4 $K \in D_+$ (resp. D_-) なら Taylor 級数

$$f_K(w) = \sum \frac{1}{n!} f_K^{(n)}(0) w^n, \quad (\text{resp. } g_K(\hat{w}) = \sum \frac{1}{n!} g_K^{(n)}(0) \hat{w}^n, \quad \hat{w} = w^{-1})$$

の収束半径は 1 以上である.

変数 $w=e^{it}$ に関して $w=0=\lim_{t \rightarrow i\infty} e^{it}$ での Taylor 級数の係数を計算しよう. 真空の定義より, 次がわかる:

$$f_K(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e_K^{t(\frac{1}{i\hbar}\zeta^*\hat{\zeta})} =: \varpi(ee):_K, \quad g_K(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e_K^{t(\frac{1}{i\hbar}\hat{\zeta}^*\zeta)} =: \overline{\varpi}(ee):_K.$$

$f_K^{(1)}(0)$ は玉突公式を使って次のように計算される:

$$\partial_w|_0 e_*^{(\log w)\frac{1}{i\hbar}\zeta^*\hat{\zeta}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} \partial_t e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\zeta^*\hat{\zeta}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{i\hbar} \zeta^*\hat{\zeta} e_*^{t(\frac{1}{i\hbar}\zeta^*\hat{\zeta}-1)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{i\hbar} \zeta^* e_*^{t(\frac{1}{i\hbar}\zeta^*\hat{\zeta})} * \hat{\zeta}.$$

この手続きを繰り返すことにより, 次のような注目すべき公式を得る:

$$\frac{1}{n!} f_K^{(n)}(0) = \frac{1}{n!(i\hbar)^n} \zeta^n * \varpi(ee) * \hat{\zeta}^n :_K, \quad \frac{1}{n!} g_K^{(n)}(0) = \frac{1}{n!(i\hbar)^n} \hat{\zeta}^n * \overline{\varpi}(ee) * \zeta^n :_K. \quad (25)$$

Taylor 級数の収束から $f_K(w) = \sum \frac{w^n}{n!} f_K^{(n)}(0)$ である. これより

命題 5 $K \in D_-$ の場合の K -順序表示で

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,n}, \quad e_*^{t(\frac{1}{2i\hbar}(u_*^2+v_*^2)+\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{it(n+\frac{1}{2})+\lambda t} E_{n,n}.$$

これらは広義一様収束する.

表現空間を用意したわけでもないのに, 行列表示が得られてしまうところが面白いところである. 1 が表現できたので, これより色々な元の行列表現が得られる, e.g.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(i\hbar)^{p+q}}} \zeta_*^p * \hat{\zeta}_*^q &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(n+p)!}{n!} \frac{(n+q)!}{n!}} \frac{1}{\sqrt{(n+p)!(n+q)!(i\hbar)^{2n+p+q}}} \zeta_*^{n+p} * \varpi_*(ee) * \hat{\zeta}_*^{n+q}. \\ e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\zeta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \sqrt{\frac{(n+p)!}{n!}} \frac{1}{\sqrt{(n+p)!n!(i\hbar)^{2n+p}}} \zeta_*^{n+p} * \varpi_*(ee) * \hat{\zeta}_*^n, \quad \text{etc.} \\ e_*^{t\frac{1}{i\hbar}\hat{\zeta}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!} \sqrt{\frac{(n+q)!}{n!}} \frac{1}{\sqrt{n!(n+q)!(i\hbar)^{2n+q}}} \zeta_*^n * \varpi_*(ee) * \hat{\zeta}_*^{n+q}. \end{aligned}$$

次もわかる:

$$\int_{-\infty}^0 e_*^{t(z+\frac{1}{i\hbar}\zeta^*\hat{\zeta})} dt = \sum_n \frac{1}{z+\frac{1}{2}+n} \frac{1}{n!(i\hbar)^n} \zeta^n * \varpi_*(ee) * \hat{\zeta}^n.$$

4.3.1 $G_e(\mathbb{C})^\pm$ の真空表現.

表示のパラメーター K が $D_\pm$ の元の場合には, 群 $\tilde{G}_e$ が複素半群 $G_e(\mathbb{C})^\pm$ の中に埋め込まれていることは容易にわかるからこのことを用いて複素半群 $G_e(\mathbb{C})^\pm$ の元の Taylor 展開を計算することもでき, 行列表現も得ることができる. (計算公式は面倒である.) これは表現空間の方から作る別の方法で Koufany, Orsted [4] がすでに行っていることでもあるが, 上のやりかたでは群 G_g や複素半群について, 表現空間を与える以前に表現行列が得られてしまうという特徴がある.

しかし, 特異点列が一般には半平面のどちらかに現れるので, 複素半群の表現までしか得られない.

4.4 フーリエ展開と擬真空

$K \in D_0$ の場合には, $w=0$ における Taylor 展開のかわりに Fourier 級数展開を使わねばならない.

$:e_*^{\frac{it}{\hbar}\langle u_g, u_g \rangle}_K$ は実軸に沿って実解析的であり 2π -周期的なので, フーリエ展開することができる:

$$:e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(K) e^{ikt}, \quad a_k(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} :e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K dt. \quad (26)$$

この収束性は, 普通 S^1 上の L_2 -位相で考えるものだが, Fréchet space valued functions にまで拡張された Sobolev lemma を使うと, 上の Fourier 級数は circle S^1 上の C^∞ -位相による収束でもあることがわかる.

Fourier 係数の計算では, $:e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K$ が交代 2π -周期であることに注意し, この 4π -周期性を使う. すると次がわかる:

$$:e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k(K) e^{ikt/2}, \quad b_k(K) = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-ikt/2} :e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K dt. \quad (27)$$

交代周期性を使うと b_{2k} は全部消えることがわかり,

$$b_{2k-1}(K) = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-i(2k-1)t/2} :e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(k-\frac{1}{2})} :e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K dt$$

となる. これより特に

$$:e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K = e^{-\frac{it}{\hbar}} :e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{2k-1}(K) e^{i(k-\frac{1}{2})t}, \quad a_k(K) = b_{2k-1}(K) \quad (28)$$

もわかる. ここで, (26) の積分 $\frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-ikt/2} :e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K dt$ は部分積分と 玉突公式で次のように書き換えられることに注意する:

$$\begin{aligned} \frac{2}{ik} \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-ikt/2} \frac{1}{\hbar} \zeta_* \hat{\zeta}_* :e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K dt &= \frac{2}{ik} \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-ikt/2} \frac{1}{\hbar} \zeta_* :e_*^{\frac{it}{\hbar}(\zeta \circ \hat{\zeta} + 1)}_K dt * \hat{\zeta} \\ &= \frac{2}{ik\hbar} \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-i(k-2)t/2} \zeta_* :e_*^{\frac{it}{\hbar}\zeta \circ \hat{\zeta}}_K dt * \hat{\zeta}. \end{aligned}$$

$k=2n+1$ についてこの操作を繰り返して,

$$b_{2n+1}(K) = \frac{2^n}{(2n+1)!!(i\hbar)^n} \zeta^n * \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} :e_*^{it\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}}:_K dt * \hat{\zeta}^n, \quad n \geq 0. \quad (29)$$

が得られる. $k=-(2n-1)$ の場合には, $e^{-ikt/2} :e_*^{\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}}:_K = e^{-i(k-2)t/2} :e_*^{\frac{1}{\hbar}\hat{\zeta}\circ\zeta}_K$ に注意すると, 同じような手続きで

$$b_{-(2n-1)}(K) = \frac{2^{n-1}}{(2n-1)!!(i\hbar)^{n-1}} \hat{\zeta}^n * \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} :e_*^{it\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}}:_K dt * \zeta^n, \quad n \geq 1. \quad (30)$$

が得られる.

$\varpi_*(\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_*^{it\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}} dt$ と置き, これを **擬真空** と呼んでおく.

$K \in D_0$ のときには, $e_*^{it\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}}$ が 2π -周期的であることより

$$(\zeta\circ\hat{\zeta}) * \varpi_*(\pi) = 0 = \varpi_*(\pi) * (\zeta\circ\hat{\zeta}) \quad (31)$$

である. 玉突公式より

$$\zeta^n * e_*^{it(\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}+k)} = e_*^{it(\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}+k-n)} * \zeta^n, \quad \hat{\zeta}^n * e_*^{it(\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}+k)} = e_*^{it(\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}+k+n)} * \hat{\zeta}^n$$

となることに注意する. これより $k+l \neq 0$ だと, 指数法則と変数変換により

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e_*^{it(\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}+k)} * \int_{-\pi}^{\pi} e_*^{it(\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}+l)} &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k+l)} dt * \int_{-\pi}^{\pi} e_*^{is\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}} ds = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_*^{it(\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}+k)} dt * \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_*^{is(\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}+k)} ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_*^{it(\frac{1}{\hbar}\zeta\circ\hat{\zeta}+k)} dt \end{aligned}$$

を得る.

これらを総合して次が得られる:

命題 6 任意の $p, q \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\frac{\sqrt{2p+q}}{\sqrt{(2p+1)!!(2q+1)!!(i\hbar)^{p+q}}} \zeta^p * \varpi_*(\pi) * \hat{\zeta}^q, \quad \frac{\sqrt{2p+q}}{\sqrt{(2p+1)!!(2q+1)!!(i\hbar)^{p+q}}} \hat{\zeta}^p * \varpi_*(\pi) * \zeta^q$$

は (p, q) 行列要素である. これらをそれぞれ $D_{p,q}, \bar{D}_{p,q}$ のように略記する.

特に, $D_{p,q} * \bar{D}_{r,s} = 0$ ($D_{0,0} = \bar{D}_{0,0}$ は除く) であり,

$$:e_*^{t(\frac{1}{2\hbar}(u^2+v^2)+\lambda)}:_K = \sum_{n=0}^{\infty} e^{int+\lambda t} D_{n,n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int+\lambda t} \bar{D}_{n,n}$$

である.

4.4.1 Taylor 展開を使う場合

$K \in D_0$ の場合には, 特異点列が実軸を挟むが, 虚数部分が十分 $-i\infty$ に近いところでは $w=0$ における Taylor 展開を考えることができる. しかし, w に関する Taylor 級数の収束半径はかなり小さくなる. この方法は同時に $\hat{w}=w^{-1}$ にも使えるが, 要するにフーリエ級数を w に関するローラン級数と見て, 正冪の部分と負冪の部分とに分けて計算していることになる. 特異点を超えて解析接続で表現行列を作る公式は複雑であろうとおもわれる.

総合すると, 特異点列が下半平面だけに現れ, w に関する Taylor 級数の収束半径が 1 以上というのが最も都合が良い. 従って, こうなるように表示パラメーターを選んで (これはいつでも可能) 話をすればよいのだが, このようにすることで失われるものが全くないのかどうかはわからない.

参考文献

- [1] M. Gerstenhaber, A. Giaquinto, *Deformations associated to rigid algebras*. preprint, 2005.
- [2] V. Guillemin, S. Sternberg, GEOMETRIC ASYMPTOTICS. A.M.S. Mathematical surveys, 14, 1977.
- [3] N. Hitchin, *Lectures on special Lagrangian submanifolds*, arXiv:math.DG/9907034v1 6Jul, 1999.
- [4] K. Koufany, B. Orsted, Hardy spaces on two-sheeted covering semigroups, J.Lie Theory, vol 7, (1997) 245-267.
- [5] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, *Deformation quantization of Fréchet-Poisson algebras, -Convergence of the Moyal product-*, in Conférence Moshé Flato 1999, Quantizations, Deformations, and Symmetries, Vol II, Math. Phys. Studies 22, Kluwer Academic Press, 2000, 233-246.
- [6] H. Omori, *One must break symmetry in order to keep associativity*, Banach center publ. vol.55, 2002, 153-163.
- [7] H. Omori, INFINITE DIMENSIONAL LIE GROUPS, A.M.S translation mono. 158, 1997.
- [8] H. Omori, PHYSICS IN MATHEMATICS, (in Japanese) Tokyo Univ. Publications, 2004.
- [9] H. Omori, *Toward geometric quantum theory*, in From Geometry to Quantum Mechanics, Progress in Mathematics, 252, Birkhäuser, 2006, 213-251.
- [10] H. Omori, Y. Maeda, QUANTUM THEORETIC CALCULUS, (in Japanese) Springer Tokyo, 2004.
- [11] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki and A. Yoshioka : *Strange phenomena related to ordering problems in quantizations*, Jour. Lie Theory vol. 13, no 2, 481-510, 2003..

- [12] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Star exponentials as two-valued elements*, in The breadth of symplectic and Poisson geometry, Progress in Math. 232, Birkhäuser, 2004, 483-492.
- [13] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Geometric objects in an approach to quantum geometry*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 2006.
- [14] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Expressions of algebra elements and transcendental noncommutative calculus*, World Scientific, to appear