

区分的最良近似について

富士通(株) 山下真一郎

1. 与えられた 1 変数関数の与えられた近似区間を，与えられた個数に分割して，各区間を適当な多項式又は有理式で最良近似し，全体でも最良近似となる様に，各最良近似式及び分割点を定める問題を考へる． 例へば，分割個数が 3 の場合，区間 $[X_L, X_R]$ 内に分割点 $X_L \equiv \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 \equiv X_R$ を取って，この各区間を最良近似し，かつ全体も最良近似となる様に， β_1, β_2 を定める．

2. いま，分割数を N ，第 i 分割点を β_i とする． 基本戦略は，誤差曲線の山が高ければ，区間を狭め，山が低ければ，区間を広める． 狭めたり，広めたりする割合は，各山の平均の高さが $\frac{1}{N}$ のずれに比例させる． 問題は，平均値をどのようにするか，比例定数をどのようにするかである．

3. 被近似関数 $f(x)$ が区間内の任意の点 c のまわりに Taylor 展開できれば， $(m-1)$ 次まで取った時の Lagrange の剰余項 R_m

は, $R_m = (x-c)^m f^{(m)}(c)/m!$ と表わせる. それ故, 区間 $[p_{i-1}, p_i]$ の (m_i-1) 次の最大偏差 p_i は

$$p_i = k_i S_i^{m_i}, \quad S_i = p_i - p_{i-1}$$

と仮定できよう. k_i は比例定数である.

4. この仮定の下に, 次の様な最良近似接近法が考えられる. 第 i 区間の最大偏差値を p_i , その変動量を Δp_i , 第 i 区間の区隔を S_i , その変動量を ΔS_i と置く. また, この変動に対して, 比例定数 k_i が変わらず, 変動量も小さいと仮定する.

この様に仮定すれば

$$\begin{aligned} p_i + \Delta p_i &= k_i (S_i + \Delta S_i)^{m_i} = k_i S_i^{m_i} (1 + \Delta S_i/S_i)^{m_i} \\ &= p_i (1 + \Delta S_i/S_i)^{m_i} \doteq p_i (1 + m_i \cdot \Delta S_i/S_i) \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta p_i = p_i m_i \Delta S_i / S_i, \quad \Delta S_i = S_i / m_i \cdot \Delta p_i / p_i$$

となる. 全区間の区隔変動量の総和は不変で 0 であるから,

$$0 = \sum_{i=1}^N \Delta S_i = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{m_i} \cdot \frac{\Delta p_i}{p_i}$$

また, 目標は, 全ての p_i が最終的に等しくなることであるから, その様な値を H とすれば, $p_i + \Delta p_i = H$ 即ち $\Delta p_i = H - p_i$.

これを前式に代入して

$$0 = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{S_i}{m_i} \cdot (H - p_i) / p_i \right\} = H \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{m_i p_i} - \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{m_i}$$

$$\therefore H = \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{m_i} \right) \right\} / \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{m_i p_i} \right) \right\}$$

こうして、初め p_i を定め、 S_i 及び p_i を計算すれば、 H が求まり、順次 Δp_i , ΔS_i が求まり、次の p_i が定められる。これを返復すれば、最良分割点 p_i が定まる。この方法は、各区分に対しても、誤差内数の 0 点を各分点と解釈して通用できる。その時の平均 H は $H = \sum S_i / (\sum S_i / p_i)$ となる。