

Eigenfunction expansions associated with
second-order differential equations for
Hilbert space-valued functions.

京大 数研 斎藤義実

§ 0. Introduction.

微分作用素

$$(1) \quad -\frac{d^2}{dr^2} + A(r) \quad (r \geq 0)$$

を考えよう。ここに $A(r)$ は Hilbert space H 上で定義された有界
自己共役作用素とし, (1) は H -valued function $F(r)$ に作用す
るものと考える。 $r=0$ における境界条件として

$$(2) \quad BF'(0) - CF(0)$$

を考える。 B, C も H 上の有界自己共役作用素とする。作用
素 (1)-(2) は $\mathcal{H} = L_2(0, \infty; H)$ の作用素と考えることができる。

H Weyl - M. H. Stone - E. C. Titchmarsh - K. Kodaira の一次元にお
ける一般展開定理の理論を抽象化することによって、作用素

(1) - (2) の固有関数展開を次のような形に行なうことができる:

$r \in [0, \infty)$ に対して "eigenoperator" $\phi(r, \lambda)$ が存在して

$$\begin{cases} -\phi''(r, \lambda) + A(r)\phi(r, \lambda) = \lambda\phi(r, \lambda) \\ C\phi(0, \lambda) - B\phi'(0, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

をみたす. $\phi(r, \lambda)$ は (r, λ) をとめるごとに H 上の有界作用素である. L_0 を微分作用素 (1) - (2) の一つの自己共役拡大としよう. このとき "the generalized Fourier space of L_0 " である $\mathcal{H}_\rho$ なる Hilbert space が存在して,

(A) "generalized Fourier transform" $\mathcal{F}$ を

$$(\mathcal{F}F)(\mu) = \int_0^\infty \phi^*(r, \mu) F(r) dr$$

で定義すると, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_\rho$ への unitary 変換となる.

$$(B) \begin{cases} E(\Delta) = \mathcal{F}^* C_\Delta \mathcal{F} & (C_\Delta \text{ は } \Delta \text{ の特性関数}) \\ L_0 = \mathcal{F}^* \mu \mathcal{F} \end{cases}$$

が成立する.

F. S. Rofe-Beketov [5] は同様の作用素に対して $\mathcal{F}$ が (必ずしも unitary operator でなく) isometric operator となるような $\mathcal{H}_\rho$ の存在を証明している. また Willi Jäger [2] は, non-negative definit self-adjoint の $B(r)$ とある意味で $C(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) をみたす $C(r)$ に対して $-\frac{1}{4} + B(r) + C(r)$ の固有関数展開を (本論の方法とは違う方法で行っている).

§ 7. 方程式 $(\frac{d^2}{dr^2} + A(r) - \lambda)F(r) = 0$

H を可分な Hilbert 空間とする. $(0, \infty)$ 上の H -valued L_2 関数のなす Hilbert 空間 $L_2(0, \infty; H)$ を $\mathcal{H}$ と書くことにする. これらの Hilbert 空間のノルム, 内積は, 必要があれば, $\|\cdot\|_H$, $(\cdot, \cdot)_H$ のごとく添数をつけるが, 混同の恐れがない限り, 単に $\|\cdot\|$, $(\cdot, \cdot)$ で表わすことにする.

B を H における有界線型作用素の全体とする. そして $A(r)$ を $[0, \infty)$ 上の B -valued function とし, 次の仮定が満たされているものとする:

Assumption 1.1. (1) $r \in [0, \infty)$ に対し, $A(r)$ は H 上の有界な自己共役作用素である.

(2) 任意の $r \in [0, \infty)$ について

$$\int_0^r \|A(s)\|^2 ds < \infty, \quad (\|A(s)\| \text{ は } A(s) \text{ の operator norm}).$$

つまり $\|A(s)\|^2$ は $[0, \infty)$ で局所可積分である.

(3) 任意の $r \in [0, \infty)$ に対して正数 C_r が定まり

$$\int_0^r (A(s)F(s), F(s))_H ds \geq -C_r \int_0^r \|F(s)\|_H^2 ds$$

がすべての $F \in \mathcal{H}$ に対して成立する.

以下方程式

$$(1.1) \quad \left(-\frac{d^2}{dr^2} + A(r) - \lambda\right) F(r) = 0$$

の初期値問題を考えるわけであるが、そのために次の定義を行おう：

Definition 1.1. $u_0, v_0 \in H$ とした $\lambda \in \mathbb{C}$ としよう. $[0, \infty)$ 上の H -valued function $F(r)$ が次の条件 (1)~(5) をみたすとき, $F(r)$ を (initial) data $\{u_0, v_0\}$ に対する (1.1) の解であるという：

(1) weak derivative $F'(r)$ が各実 r で存在して, $\|F'(r)\|_H$ は $[0, \infty)$ 上局所可積分である.

(2) $[0, \infty)$ に含まれる任意の閉区間 $[\alpha, \beta]$ で $F'(r)$ は weakly absolutely continuous.

(3) $F'(r)$ は $[0, \infty)$ 上ほとんどいたるところ weak derivative $F''(r)$ をもち, $\|F''(r)\|_H$ は $[0, \infty)$ 上局所可積分.

(4) ほとんどいたるところ

$$-F''(r) + A(r)F(r) = \lambda F(r)$$

が成立し, しかも

$$(5) \quad \begin{cases} F(0) = u_0, \\ F'(0) = v_0. \end{cases}$$

が成立する.

Proposition 1.1. data $\{u, v\}$ に対する (1.1) の解は unique に存在する.

証明は問題を積分方程式に変換して逐次近似法を用いればよい.

さて次に $r=0$ において境界条件を考えるために,

Definition 1.2. (1) 初期値として

$$\begin{cases} F_1(0) = u \\ F_1'(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F_2(0) = 0 \\ F_2'(0) = v \end{cases}$$

をとった場合の解 F_1, F_2 によって作用素 $\phi_0(r, \lambda), \theta_0(r, \lambda)$ を導入する:

$$\phi_0(r, \lambda)u = F_1(r), \quad \theta_0(r, \lambda)v = F_2(r).$$

$\phi_0(r, \lambda), \phi_0'(r, \lambda), \theta_0(r, \lambda), \theta_0'(r, \lambda)$ などすべて $[0, \infty)$ 上の B -valued function とし、 ϕ_0, θ_0 は operator-valued functions として (1.1) を満足する.

(2) H が二つの閉部分空間 H_1, H_2 によって直和に分解しているとする. $H = H_1 \oplus H_2$. そして B_2 と C_2 を H_2 上で定義され、 H_2 内に値をとる有界自己共役作用素とする. しかも

$$B_2 C_2 = C_2 B_2,$$

が成立し、逆作用素 B_2^{-1} が存在するとする。このとき、

$$B = \begin{cases} 0 & \text{on } H_1 \\ B_2 & \text{on } H_2 \end{cases}, \quad C = \begin{cases} \text{identity} & \text{on } H_1 \\ C_2 & \text{on } H_2 \end{cases}$$

とあって、 B -valued function $\Phi(r, \lambda)$ を

$$(1.2) \quad \Phi(r, \lambda) = \phi_0(r, \lambda) B + \theta_0(r, \lambda) C$$

で定義する。

Definition 1.2 から $\Phi(r, \lambda)$ は $r=0$ で境界条件

$$(1.3) \quad B\Phi'(0, \lambda) - C\Phi(0, \lambda) = 0$$

をみたすことがわかる。

§ 2. 作用素 $-\frac{d^2}{dr^2} + A(r)$

最初に $\mathcal{H}$ の作用素として $-\frac{d^2}{dr^2} + A(r)$ を定義するために必要の H -valued function に関する Green の公式を導入しよう。

Definition 2.1. $[\alpha, \beta]$ を $[0, \infty)$ に含まれる有界閉区間として $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ を次の (1) ~ (3) をみたす H -valued function の全体とする：

- (1) $F(r)$ は $[\alpha, \beta]$ 上 weakly differentiable で、 $\|F(r)\|_H \in L_1[\alpha, \beta]$.

- (2) $F'(r)$ is weakly absolutely continuous on $[a, b]$.
 (3) $F'(r)$ has a weak derivative $F''(r)$ such that $\|F''(r)\|_H \in L_1[a, b]$.

Proposition 2.1. $F_1, F_2 \in \mathcal{D}[a, b]$ とすると,

$$\int_a^b \{ (\mathcal{L}F_1(r), F_2(r))_H - (F_1(r), \mathcal{L}F_2(r))_H \} dr \\ = [F_1, F_2](b) - [F_1, F_2](a).$$

ここで,

$$\begin{cases} \mathcal{L}F_i(r) = -F_i''(r) + A(r)F_i(r) & (i=1, 2), \\ [F_1, F_2](r) = (F_1(r), F_2'(r))_H - (F_1'(r), F_2(r))_H. \end{cases}$$

Corollary 2.1. $F_1 \in \mathcal{D}[a, b]$ とし, F_2 は Definition 2.1 の (1)(2) を満たしているとする. このとき,

$$\int_a^b (\mathcal{L}F_1(r), F_2(r))_H dr = \int_a^b \{ (F_1'(r), F_2'(r))_H + (A(r)F_1(r), F_2(r))_H \} dr \\ - (F_1'(r), F_2(r))_H \Big|_a^b.$$

これは Green の公式は $\mathbb{R}^1$ の場合と同様に証明される. (すなわち $F_i(r)$ が実関数で, $A(r)$ も同じく実関数の場合).

次に differential operator $-\frac{d^2}{dr^2} + A(r)$ を $\mathcal{L}$ の operator として定

義しよう.

Definition 2.2. H -valued function $F(r) \in \mathcal{D}$ とは,

(i) 任意の $[0, \infty)$ に含まれる有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ について, $F \in \mathcal{D}[\alpha, \beta]$ が成立する.

(ii) B, C は Definition 1.2 で定義されたものとする. $F(r)$ は境界条件 $CF(0) - BF'(0) = 0$ を満たす.

(iii) $F(r) \in \mathcal{H}$. また $-F''(r) + A(r)F(r) \in \mathcal{H}$.

このとき operator L を

$$\begin{cases} \mathcal{D}(L) = \mathcal{D} \\ LF(r) = -F''(r) + A(r)F(r) \end{cases}$$

で定義する. ($\mathcal{D}(L)$ は L の定義域を意味するものとする).

このとき,

Theorem 2.1. L は closed operator である.

この Theorem 2.1 より L は、境界条件が与えられたとき、《maximal Sturm-Liouville operator》と考えることができる. 次節では L の ($\mathcal{H}$ における) 自己共役制限を考察し, その固有関数展開を行なう.

§ 3. 固有関数展開.

§ 2 で定義した L の中における自己共役制限の一つを L_0 としよう (このような自己共役制限は一般には無数にある) として $E(\mu)$ を L_0 の単位の分解とする.

まずこの節で用いられるある種の vector-valued integral の定義を写える.

Definition 3.1. $[\mu_1, \mu_2]$ を $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ の有限区間であるとする. $Q(\mu), \alpha(\mu)$ は $[\mu_1, \mu_2]$ 上で定義された B -valued functions とし, $U(\mu)$ を $[\mu_1, \mu_2]$ 上で定義された H -valued function とする. 今 Δ を $[\mu_1, \mu_2]$ の有限個の分割とする, すなわち

$$\Delta = \Delta(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n),$$

ここに

$$\mu_1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n = \mu_2.$$

そして

$$\delta(\Delta) = \max_{i=0, \dots, n-1} (\eta_{i+1} - \eta_i)$$

とおく.

もし $\eta_i \leq \eta'_i \leq \eta_{i+1}$ として

$$\lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(\eta'_i) (\alpha(\eta_{i+1}) - \alpha(\eta_i)) U(\eta_i) \quad \text{又は} \quad \lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(\eta_i) (U(\eta_{i+1}) - U(\eta_i))$$

が η'_i のとりかたや分割のしかたに無関係に H の弱位相の意味で収束するならば, その limit を

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} Q(\mu) \alpha(d\mu) U(\mu) \quad \text{又は} \quad \int_{\mu_1}^{\mu_2} Q(\mu) \bar{U}(d\mu)$$

と書くことにする.

単位の分解 $E(\mu)$ と §1 で定義された $\Phi(r, \lambda)$ とは次のように関係付けられる.

Proposition 3.1. $F \in \mathcal{H}$, $I = [\mu_1, \mu_2]$ とする. このとき

$$(3.1) \quad F(r, I) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \Phi(r, \mu) (P_1 F'(0, d\mu) + B_2^{-1} P_2 F(0, d\mu)).$$

ここで

$$F(r, I) = E(I)F(r) = (E(\mu_2) - E(\mu_1))F(r),$$

$$F(0, \mu) = E(\mu)F(0), \quad F'(0, \mu) = (E(\mu)F)'(0).$$

また P_1, P_2 は Definition 1.2 の H_1, H_2 の射影作用素であり, B_2^{-1} も Definition 1.2 で定義された通りである.

証明は, (3.1) の両辺が微分積分方程式

$$L U(r, \lambda) = \int_0^\lambda \mu d U(r, \mu)$$

を満たし, $r=0$ における初期値も一致することを用いる.

Definition 3.2. $I = [\mu_1, \mu_2]$ とする. このとき H の中に値をもつ $\mathcal{H}$ 上で定義された線型作用素 $\mathcal{E}(I)$ を

$$\xi(I)F = P_1 F'(0, I) + B_2^{-1} P_2 F(0, I)$$

で定義する.

単位の分解 $E(\mu)$ の性質と *closed graph theorem* を用いて、次のような $\xi(I)$ の性質が成立する.

Proposition 3.2. $\xi(I)$ は $\mathcal{H}$ 上で定義された有界作用素であり、したがって $\xi^*(I)$ は H 上で定義された $\mathcal{H}$ 内に値をもつ有界作用素である。そして $I_1 = (\mu_1, \mu_2]$, $I_2 = (\chi_1, \chi_2]$ とするとき,

$$(3.2) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \xi(I_1 \cup I_2) = \xi(I_1) + \xi(I_2) \\ & \xi^*(I_1 \cup I_2) = \xi^*(I_1) + \xi^*(I_2) \end{cases} \quad (I_1 \cap I_2 = \emptyset \text{ として})$$

$$(3.3) \quad \begin{cases} \text{(ii)} & E(I_1) \xi^*(I_2) = \xi^*(I_1 \cap I_2) \\ & \xi(I_2) E(I_1) = \xi(I_1 \cap I_2) \end{cases}$$

$$(iii) \quad \xi(I_1) \xi^*(I_2) = \xi(I_1 \cap I_2) \xi^*(I_1 \cap I_2)$$

(iv) $I = (\lambda_1, \lambda_2]$ に対して B -valued function $\rho(I)$ を

$$\rho(I) = \xi(I) \xi^*(I)$$

と定義すれば, $\rho(I)$ は *symmetric, non-negative definite, additive interval function* である.

Proposition 3.1 と *3.2* を組合せることによって, $\xi(I)$, $\xi^*(I)$, $\rho(I)$, $\Phi(r, \lambda)$ の間の関係がわかる.

Proposition 3.3. $I = (\mu_1, \mu_2]$ とする. また

$$\xi(\mu) = \begin{cases} \xi((0, \mu]) & \text{if } \mu \geq 0, \\ -\xi((\mu, 0]) & \text{if } \mu \leq 0, \end{cases}$$

$$\rho(\mu) = \xi(\mu) \xi^*(\mu)$$

と置く. このとき $u \in H$ に対して

$$(3.4) \quad [\xi^*(I)u](r) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \phi(r, \mu) \rho(d\mu) u$$

が成立する. また carrier compact で十分円めろかな $F \in \mathcal{F}$ に対して

$$(3.5) \quad (\xi(I)F)(r) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \rho(d\mu) \left[\int_0^\infty \phi^*(r, \mu) F(r) dr \right]$$

が成立する.

(3.1)において $F = \xi^*(I)u$ とおけば, (3.3) を考慮して (3.4) が得られる. また $F(r) = 0$ for $r \geq r_0$ として

$$\begin{aligned} (\xi(I)F, u)_H &= (F, \xi^*(I)u)_{\mathcal{F}} = \int_0^{r_0} (F(r), \int_{\mu_1}^{\mu_2} \phi(r, \mu) \rho(d\mu))_H dr \\ &= \int_0^{r_0} \int_{\mu_1}^{\mu_2} (\rho(d\mu) \phi^*(r, \mu) F(r), \mu)_H dr \\ &= \int_{\mu_1}^{\mu_2} (\rho(d\mu) \int_0^{r_0} \phi^*(r, \mu) F(r) dr, u)_H \\ &= \left(\int_{\mu_1}^{\mu_2} \rho(d\mu) \left[\int_0^\infty \phi^*(r, \mu) F(r) dr \right], u \right)_H \end{aligned}$$

より (3.5) がわかる。(もちろんこれらの積分が存在すること, また積分順序の交換の可能性などは証明することが必要であるが)。

《the generalized Fourier space》を定義するの一段階として次の定義を与える。

Definition 3.3. $f(\mu), g(\mu)$ を $[\mu_1, \mu_2]$ で定義された H -valued functions とする。Definition 3.1 と同様に分割 Δ を定めて,

$$\lim_{\delta(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} ((p(\eta_{i+1}) - p(\eta_i)) f(\eta_i), g(\eta_i))_H$$

が存在するとき, これを

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} (p(d\mu) f(\mu), g(\mu))_H.$$

でしめすことにする。

$f(\mu), g(\mu)$ が適当にらめうかならこの積分が存在することが示される。

Proposition 3.4 $F \in \mathcal{F}$ が compact carrier をもち, 十分なめらかであるとする。 $I = [\mu_1, \mu_2]$ として

$$(\mathcal{F}_0 F)(\mu) = \int_0^\infty \phi^*(r, \mu) F(r) dr$$

とおけば,

$$(i) \quad (E(I)F)(r) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \phi(r, \mu) \rho(d\mu) (\mathcal{F}_0 F)(\mu)$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \|E(I)F\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} (\rho(d\mu) (\mathcal{F}_0 F)(\mu), (\mathcal{F}_0 F)(\mu))_{\mathcal{H}}, \\ \|F\|_{\mathcal{H}}^2 = \lim_{\substack{\mu_1 \rightarrow -\infty \\ \mu_2 \rightarrow \infty}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} (\rho(d\mu) (\mathcal{F}_0 F)(\mu), (\mathcal{F}_0 F)(\mu))_{\mathcal{H}} \end{cases}$$

$$(iii) \quad L_0 E(I)F(r) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu \phi(r, \lambda) \rho(d\mu) (\mathcal{F}_0 F)(\mu).$$

(i) は (3.1) と (3.5) から得られる. (i) を用いて (ii) と (iii) が得られる.

さて, $\mathbb{R}$ 上で定義された $\mathcal{H}$ -valued function $U(\mu)$ で十分力め
るかで carrier が compact なものの全体を $\mathcal{U}$ とする. $\mathcal{U} \ni U(\mu)$
に対して

$$\|U\|_{\rho}^2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} (\rho(d\mu) U(\mu), U(\mu))_{\mathcal{H}}$$

で U の norm $\|U\|_{\rho}$ を定義する. ただし $\text{car } U \subset [\mu_1, \mu_2]$. このノ
ルムを用いて $U, V \in \mathcal{U}$ に対して内積 $(U, V)_{\rho}$ を

$$(U, V)_{\rho} = \frac{1}{4} \{ (\|U+V\|_{\rho}^2 - \|U-V\|_{\rho}^2) + i(\|U+iV\|_{\rho}^2 - \|U-iV\|_{\rho}^2) \}$$

で定義する. このとき $\mathcal{U}$ は pre-Hilbert space と考えることが
できる. この pre-Hilbert space $\mathcal{U}$ を用いて generalized Fourier
space $\mathcal{H}_{\rho}$ と generalized Fourier transform $\mathcal{F}$ を次のように定

義する

Definition 3.4. pre-Hilbert space $\mathcal{U}$ を完備化して得られる Hilbert space を L_0 の generalized Fourier space ということにして, $\mathcal{H}_p$ であらわす. Proposition 3.4 より $\mathcal{F}$ は $\mathcal{H}_p$ に値をもつ有界作用素であるから, これを $\mathcal{H}$ 上に拡張した作用素を $\mathcal{F}$ であらわし, L_0 の generalized Fourier transform ということにする. $\mathcal{F}$ は $\mathcal{H}$ 上で定義され $\mathcal{H}_p$ の中に値をもつ isometric operator である.

$\mathcal{F}^*$ に関しては次のような表現が可能である.

Proposition 3.5. $U \in \mathcal{U}$ なら

$$(3.6) \quad \mathcal{F}^*U(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\nu, \mu) \rho(d\mu) U(\mu).$$

L_0 の固有関数展開は次の形をとる.

Theorem 3.1. $\mathcal{H}_p$ と $\mathcal{F}$ を Definition 3.4 の通りとする. このとき,

- (i) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_p$ の上への unitary operator である.
- (ii) I を $\mathbb{R}$ 上の interval とし $G_I(\mu)$ を I の特性関数とすると,

$$E(I) = \mathcal{F}^* G_I \mathcal{F}.$$

(ii) $F \in \mathcal{M}(L_0) \iff \mu \cdot \tilde{F}(F)(\mu) \in \mathcal{H}_p$ そしてこのとき,

$$L_0 F = \tilde{F}^* \mu \cdot \tilde{F} F$$

が成立する.

(i) の証明に関して言えば, $U \in \mathcal{H}_p$ に対して

$$\|\tilde{F}^* U\|_{\mathcal{H}} = \|U\|_p$$

を示せばよい. そのためには U が step function の場合を考えればよい.

$$U(\mu) = \begin{cases} u_k & \mu \in [\eta_k, \eta_{k+1}] \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

として (3.4) と (3.6) より $\Delta_k = (\eta_k, \eta_{k+1}]$ として

$$\begin{aligned} \tilde{F}^* U(r) &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \phi(r, \mu) \rho(d\mu) u_k \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \xi^*(\Delta_k) u_k(r) \end{aligned}$$

であるから, Proposition 3.2 を用いて

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}^* U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \xi^*(\Delta_k) u_k(\cdot), \sum_{k=0}^{N-1} \xi^*(\Delta_k) u_k(\cdot) \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (\xi(\Delta_k) \xi^*(\Delta_k) u_k, u_k)_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (\rho(\Delta_k) u_k, u_k) = \|U\|_p^2 \end{aligned}$$

となる.

Bibliography

- [1] V. I. Gorbacük and M. L. Gorbacük, Expansion in Eigenfunctions of a second-order differential Equation with operator coefficient, Dokl. Akad. Nauk SSSR Tom 184 (1969), No. 4. (Soviet Math. Vol 10 (1969), No. 1).
- [2] Willi Jäger, Ein gewöhnlicher Differentialoperator zweiter Ordnung für Funktionen mit Werten in einem Hilbertraum, Math. Z. 113, 68-98.
- [3] K. Kodaira, On singular solutions of second-order differential operators, Sugaku I (1948), 177-191; II (1949), 113-139 (Japanese).
- [4] K. Kodaira, The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrix, Amer. J. Math. 71 (1949) 921-945.
- [5] F. S. Roze-Beketov, Eigenfunction expansions for infinite system of differential equation in non-selfadjoint and self-adjoint cases, Mat. Sb. 51(93) (1960), 293-342 (Russian).