

母物質より大なる伝導率をもつ球が格子状配列をなす場合の有効伝導率について

甲都 宣大 教養部 増田 秀行

問題 「伝導率が  $k$  の一様な媒質中に伝導率が  $\nu k$  ( $\nu \gg 1$ ) の半径  $a$  の球が単純-, 体心-, 面心-立方格子をなすよう配列され、球の半径が大きく、2球面間の最短距離を  $h$  としたとき、 $h/a \ll 1$  である場合の平均的な伝導率、いわゆる有効伝導率  $k^*$  を求めること」

### § 1. 序 論

全媒質中で球のしめる比体積  $f$  が小なるとき、球の配列は無関係に

$$k^*/k = \{(2+\nu)/(1-\nu) - 2f\} / \{(2+\nu)/(1-\nu) + f\} \quad (1.1)$$

が成立することと導いたのは J. C. Maxwell<sup>1)</sup> である。分子と一様な誘電率の小球と見做したとき、(1.1) は感度率に関する Debye-Hückel の式と導くことに注目し、球の相互作用を取入れたため配列と<sup>単純</sup>立方格子に制限し、Lord Rayleigh<sup>2)</sup> は一般論を展開した。結果は無限次元の連立一次方程式を解くことに帰着するが、

はじめの数の係数を決定し (1.1) の次の order の近似式として

$$k^*/k = 1 + 3f / [(2\tau^2)/(2-1) - f - p(2-1)f^{10/3} / (2+0.75)] \quad (1.2)$$

を得た。ここで  $p$  は定数であるが Rayleigh<sup>2)</sup> 原論文では 1.65 となっている。しかしこれは誤計算で方程式の係数を Rayleigh のままとすれば、I. Runge<sup>3)</sup> の指摘する通り

$$p = \frac{32}{5} \times (3.11)^2 \times \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{10/3} = 0.523 \quad (1.3)$$

となり、この結果は最近まで正しいとされてきた。<sup>4) 5)</sup> しかし原論文<sup>2)</sup> (60) 式で  $x^3 - \frac{3}{5}x\tau^2$ , ( $\tau^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ), より  $x^3$  の項と抽出するとき係数は  $2/5$  とすべきなのと誤って 1 とあっていることに注意すると、(1.3) の  $\frac{32}{5}$  は 16 となり

$$p = 1.31 \quad (1.4)$$

となる。

筆者は体心、面心立方格子の場合を含めて Rayleigh の方程式の係数の一般式を求めるに成功し、電子計算機の利用の範囲で高次の近似の結果を得た。(§ 6 以降, 特には Fig. 3)

他方 R.E. Meredith - C.W. Tobias<sup>4)</sup> <sup>(球が完全導体で  $\omega = \infty$  の場合と)</sup> は電気伝導率の問題として精密な工作による単純立方格子単位胞の模型を用い、電極の分極効果と除去するため高周波交流による測定を行った。結果はグラフで発表されているにすぎないが注意して読み取った結果は第 I 表の通りである。このうちはじめの 3 個は、(1.4) を用いた (1.2) 式ではば表現し得るが  $k/a = 0.01$  のものは再現できない。

第 I 表

|         |       |       |       |        |
|---------|-------|-------|-------|--------|
| $f$     | 0.255 | 0.375 | 0.440 | 0.516  |
| $h/a$   | 0.542 | 0.235 | 0.119 | 0.0099 |
| $R^*/R$ | 2.15  | 3.00  | 3.90  | 7.60   |

また  $h/a = 0$  のとまた  $f = \pi/6 = 0.527$ , $R^*/R = \infty$  となる

はす"厚"の"太"から不一致は式の形から見ても当然である。

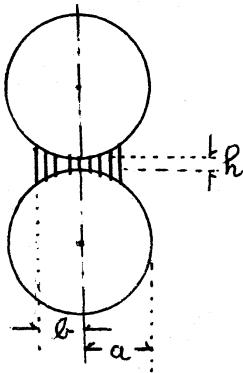


Fig. 1

§ 2. J.B. Keller の近似<sup>(1)</sup> と G.K. Batchelor-  
-R.W. O'Brien の近似<sup>(2)</sup>

$h/a \ll 1$ ,  $\nu = \infty$  の場合の近似

解を求めるため Keller<sup>(1)</sup> は次の仮定から  
出発した。単純立方格子の場合有効

伝導率の等方性は重畳の原理から

保証され、 $R^*$ を求めるには電位(もし

くは温度)の勾配が球の中心軸と平行に与える場合と近似すれば  
すむ。

$\nu = \infty$  であるから伝導は主として中心軸附近で行われ、

流れの方向<sup>向</sup>は中心軸と平行に近。2球の電位差(温度差)を1

としたとき中心軸まわり半径  $l$  の円筒を通る流量  $I(l)$  は

$$\begin{aligned}
 I(l) &= k \int_0^l 2\pi r dr / \{h + 2[a - \sqrt{a^2 - r^2}]\} \\
 &\approx k \int_0^l 2\pi r dr / [h + (r^2/a)] = \pi k a \log(1 + l^2/ah) \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

となる。よって Keller は

$$R^*/R = -(\pi/2) \log[\pi/6 - f] + \text{const} \quad (2.2)$$

と導き Meredith-Tobias の  $h/a = 0.01$  の場合と比較して  $\text{const} = 0$

と評価した。

(2.1) 式 2 行目の近似を承認すれば  $I(l)$  は平面  $z=0$  で分けた半無限完全導体の中には伝導率が単位面積あたり  $k/[(k/z) + (x^2+y^2)/(2a)]$  の薄層をばさんだ場合の計算と一致する。この場合境界面の曲率は一部分無視されたことになる。  
 上下方向(z軸方向)の電位(温度)勾配<sup>153</sup> 反対称性は保持される。  
 3" (Batcheller - O'Brien) は  $v \gg 1$ ,  $0 \leq h/a \ll 1$  のときにもこの仮定が成立するものとし、一般の場合の  $I(l)$  は境界値問題。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad z > 0 \\ u|_{z \rightarrow +\infty} = 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = (u-1) \Big|_{z=0} / [(k/z) + (x^2+y^2)/(2a)] \end{array} \right. \quad (2.3)$$

の解  $u$  を用い

$$I(l) = \iint_{x^2+y^2 \leq l^2} \frac{1}{2} v k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} dx dy \quad (2.4)$$

で決定されるものと考えた。後等では(2.3)と  $u|_{z=0} = f(x,y)$  に関する積分方程式<sup>の問題</sup>とし、90 元の連立一次方程式で近似して数値解をもとめ、積分方程式の形からの洞察と、数値解の結果から  $h/a = 0$  のとき、漸近式として

$$I(a) = \pi k a (\log v^2 - 3.4) \quad (2.5)$$

をもとめてゐる。後等では球が圧迫され弾性論で知られた Hertz の解に見られる "flat spot" のある場合も計算してゐるが以下では  $a/h \geq 0$  の場合しか取扱われない。

## § 3. Batchelor-O'Brien 近似の厳密解

境界値問題 (2.3) の厳密解は次のようにして求まる。まず,  
 $u$  を  $x, y$  座標に關して Fourier 変換したものを  $u(\xi, \eta, z)$  とし,

$$u(x, y, z) = \iint u(\xi, \eta, z) \exp[i\xi x + i\eta y] d\xi d\eta \quad (3.1)$$

とすると, (2.3) の第 1, 2 式より

$$u(\xi, \eta, z) = A(\xi, \eta) \exp[-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}] \quad (3.2)$$

を得る。(2.3) の第 3 式を

$$\nu \left[ \frac{h}{2} + (x^2 + y^2)/(2a) \right] \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = u - 1 \quad (3.3)$$

と書き直し, 左辺の  $x^2 + y^2$  は  $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} z^2$ , 右辺の 1 は Dirac の  $\delta$  関数を用い  $\delta(\xi) \delta(\eta)$  と表わせば (3.3) は

$$\begin{aligned} & \iint \sqrt{\xi^2 + \eta^2} A(\xi, \eta) \left[ \nu h/2 + \nu/(2a) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \right] \exp(i\xi x + i\eta y) d\xi d\eta \\ &= \iint \{ A(\xi, \eta) - \delta(\xi) \delta(\eta) \} \exp(i\xi x + i\eta y) d\xi d\eta \quad (3.4) \end{aligned}$$

となる。こゝで  $\xi, \eta$  平面に極座標  $\xi = \rho \cos \varphi$ ,  $\eta = \rho \sin \varphi$  を導入し,

$$\rho A \sim O(\rho^{-1-\varepsilon}), \quad (\rho \rightarrow \infty) \quad (3.5)$$

を仮定し 2 次元 Green の定理を用いると (3.4) 左辺の  $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$  は  $\rho A$  に關する operator に変換できる。 $\oint u(x, y, z)$  は  $z$  軸に關する回転に對して不変, したがってその Fourier 変換である  $A$  も  $\rho$  のみの関数となる。したがって

$$1 = \iint \delta(\xi) \delta(\eta) d\xi d\eta = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\varphi \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} = \iint \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} d\xi d\eta \quad (3.6)$$

であることは注意すると (3.4) の両辺の比較から

$$\left( \frac{\nu}{2a} \right) \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \rho A - \frac{\nu h}{2} \rho A = A - \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \quad (3.7)$$

を得る。ここから

$$B(p) = 2\pi p A(p) \quad (3.8)$$

とすれば、 $B$  に関する微分方程式

$$p \frac{dB}{dp} - (ahp + 2a/\nu) B = -(2a/\nu) \varepsilon(p) \quad (3.9)$$

を得る。右辺の  $\varepsilon(p)$  のため  $B(p)$  は  $p=0$  を特異点とするこゝに反するがその特異性は両辺を  $p \sim 0$  のとき積分して

$$B(p) \cong -(2a/\nu) \log p + \text{const} \quad (3.10)$$

と定まる。(3.5), (3.9), (3.10) とすると

$$\begin{cases} \frac{d^2 B}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{dB}{dp} - (ah + [2a/\nu]/p) B = 0, & p > 0 \\ B \cong -(2a/\nu) \log p, & p \rightarrow 0 \\ B \rightarrow 0, & p \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.11)$$

を得る。この第1式は  $p=0$  を確定特異点、 $p=\infty$  を不確定特異点とする微分方程式<sup>2)</sup> 第2, 第3式により  $B(p)$  は一意に確定する。

#### §.4 $h/a=0$ のときの Batcheller-CBrien 近似の厳密解

このとき (3.11) の微分方程式は  $\sqrt{(8\alpha p)/\nu}$  と独立変数とする変形 Bessel 方程式となる。(3.11) の  $p \rightarrow 0$ , および  $p \rightarrow \infty$  の条件により  $B(p)$  は変形 Bessel 関数  $K_0(z)$  を用い

$$B(p) = 2\pi p A(p) = (4a/\nu) K_0(\sqrt{(8\alpha p)/\nu}) \quad (4.1)$$

と表わせる。あとは Fourier 逆変換を実行するだけである。 $x, y$  平面にも極座標  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  を導入し (3.1), (3.2), (3.3) を用いて

$$\begin{aligned}
u &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A(\rho) \rho e^{-\rho^2} e^{i(\rho r \cos \theta - \rho z)} d\rho d\theta \\
&= (4\alpha/\nu) \int_0^{\infty} K_0(\sqrt{8\alpha\rho}/\nu) J_0(\rho r) e^{-\rho^2} d\rho \\
&= \int_0^{\infty} K_0(\sigma) J_0(\nu r \sigma^2/(8\alpha)) \exp[-\nu z \sigma^2/(8\alpha)] \sigma d\sigma \quad (4.2)
\end{aligned}$$

を得る。この無限積分は  $K_0$  の積分表現

$$K_0(\sigma) = (1/2) \int_0^{\infty} t^{-1} \exp[-t - \sigma^2/(4t)] dt \quad (4.3)$$

(文献 8, p. 335) および  $J_0$  の Laplace 変換公式 (文献 8, p. 336) を用いて  
 和等積分に変形でき

$$u(r, z) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\nu \sqrt{r^2 + z^2}} \exp\left[\frac{2\alpha z}{\nu(r^2 + z^2)}\right] \int_{z/r}^{\infty} (1+t^2)^{-1/2} \exp[-2\alpha r t / \nu(r^2 + z^2)] dt, & (r \neq 0) \\ [2\alpha/(\nu z)] \exp[2\alpha/(\nu z)] \int_{2\alpha/z}^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt, & r=0, z>0. \end{cases} \quad (4.4)$$

となる。この式から  $u|_{z \rightarrow \infty} = 0$  の満たされてゐることは明らか。  
 同様な計算により  $\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0}$ , および  $u|_{z=0}$  の表現と、 $z=0$  における境界条件の成立を確認できる。 $I(l)$  に関する計算も同様である。

$$\begin{aligned}
I(l) &= \pi \int_0^l -\nu k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr = 4\pi k \alpha l \int_0^{\infty} K_0(\sqrt{8\alpha\rho}/\nu) J_1(\rho l) d\rho \\
&= \pi \nu k l \int_0^{\infty} K_0(\sigma) J_1(\nu l \sigma^2/(8\alpha)) \sigma d\sigma \\
&= 2\pi k \alpha \int_0^{\infty} t^{-1} (1 - 1/\sqrt{1+t^2}) \exp[-2\alpha t/(\nu l)] dt \quad (4.5)
\end{aligned}$$

となる。これは公式 (文献 8, p. 331 (4))

$$(\pi/2) \{ H_0(t) - Y_0(t) \} = \int_0^\infty e^{-t^2} (1+t^2)^{-1/2} dt \quad (4.6)$$

を 0 から  $\infty$  まで積分したものと, Euler の定数  $\gamma$  に関する表現  $\int_0^\infty e^{-\sigma} \log \sigma d\sigma = \int_0^1 \frac{e^{-\sigma}-1}{\sigma} d\sigma + \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma}}{\sigma} d\sigma = -\gamma$  (文献 9, p. 246 参照) を用いて,

$$\begin{aligned} I(b) &= \pi k a \left\{ \log v^2 + \log (b^2/a^2) - 2(\gamma + \log 4) \right. \\ &\quad \left. + \pi \int_0^{(2a/vb)} (H_0(t) - Y_0(t)) dt \right\} \\ &= \pi k a \left\{ \log v^2 + \log (b^2/a^2) - 2(\gamma + \log 4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4a}{\nu b} \left[ \gamma - 1 - \log(\nu b/a) - (\gamma - 3/4 - \log \nu b/a)(1/3)(a/\nu b)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. + 4 \left( \frac{a}{\nu b} \right)^2 - \frac{8}{9} \left( \frac{a}{\nu b} \right)^4 + \dots \right\} \quad (4.7) \end{aligned}$$

と 3.  $2(\gamma + \log 4) = 3.92702 \dots$  であり, Batchelor - O'Brien の数値解 (2.5) とよく一致している。

§ 5.  $qk \neq 0$  のときの Batchelor - O'Brien 近似の厳密解

この場合微分方程式 (3.11) は文献 8, p. 97 所載の Lommel の変換の「すべ」を用いても Bessel の微分方程式に帰着できる。

$$\zeta = 2\sqrt{a}h\eta, \quad B = v e^{-\zeta/2} \quad (5.1)$$

とすれば  $v$  に関する Kummer の微分方程式

$$\zeta v'' + (1-\zeta)v' - \{1/2 + \kappa\}v = 0 \quad (5.2)$$

を得, 合流型超幾何関数を用いて

$$B = e^{-\zeta/2} {}_1F_1(1/2 + \kappa, 1; \zeta) \quad (5.3)$$

が (3.11) の解と存在することがわかるが、この形式は  $p \rightarrow \infty$ 、従って  $z \rightarrow \infty$  のときの振舞いの見通しができるので Whittaker の微分方程式に変形する (以下文献 9, 第 XVI 章参照)。そのため

$$B = z^{-1/2} w \quad (5.4)$$

と置く。  $w$  は微分方程式

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\kappa}{z} + \frac{1}{4z^2}\right) w = 0 \quad (5.5)$$

を満足し、一般の Whittaker の微分方程式

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2}\right) w = 0 \quad (5.6)$$

と比較して、 $k = -\kappa < 0$ 、 $m = 0$  の場合であることがわかる。

ただし  $2m$  が整数の場合であるから (5.6) の解として  $M_{k,m}(z)$  は有効でない。Whittaker の関数  $W_{k,m}(z)$  を用いる。よって (5.4) (5.5) により任意定数  $c_1, c_2$  を用いて

$$B = z^{-1/2} \{ c_1 W_{-\kappa,0}(z) + c_2 W_{\kappa,0}(-z) \} \quad (5.7)$$

を得る。と置くで  $|z| \rightarrow \infty$  のとき

$$\begin{cases} W_{-\kappa,0}(z) = e^{-z/2} z^{-\kappa} (1 + O(1/z)), & |\arg z| < \pi \\ W_{\kappa,0}(-z) = e^{z/2} z^{\kappa} (1 + O(1/z)), & |\arg(-z)| < \pi \end{cases} \quad (5.8)$$

であるから、 $c_2 \neq 0$  とすれば  $p \rightarrow \infty$  のとき  $B$  は有界でなくなり条件 (3.11) に反し、 $c_2 = 0$  ならば  $p \rightarrow \infty$  のとき  $B \rightarrow 0$  となり (3.11) を満足するから  $c_2 = 0$  と結論される。

つぎに  $p > 0$  のときの特異性であるが、 $2m = \text{整数}$  の場合の  $W_{k,m}(z)$  の  $z \rightarrow 0$  の表現は成書に見当らない。そこで文献 9,

§16.14 の処方に従い  $W_{k,m}$  の Mellin-Barnes 型の積分表示の位置の極に注意と併し右から留数計算を行ふと

$$W_{k,0}(\zeta) = -\frac{e^{-\zeta/2} \zeta^{1/2}}{\Gamma(-k+1/2)} \left[ \left\{ \log \zeta + \psi(-k+1/2) - 2\psi(1) \right\} {}_1F_1(-k-1, 1; \zeta) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-k+1/2)_n}{(n!)^2} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\nu-k+1/2} - \frac{2}{\nu+1} \right) \right\} \right] \quad (5.9)$$

を得る。  $E \in L$   $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ ,  $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$  である。

よ、  $z \rightarrow c$  のとき

$$B(f) = c_1 \zeta^{-1/2} W_{-k,c}(\zeta) \cong -c_1 \frac{1}{\Gamma(k+1/2)} \log f + \text{const}$$

となり、(3.11) から  $B(f)$  は

$$B(f) = (2a/\nu) \Gamma(k+1) \zeta^{-1/2} W_{-k,c}(\zeta) \quad (5.10)$$

と決定される。

Fourier 逆変換の手続きは  $a/h = 0$  の場合と同様である。すなわち

$$u(x, y, z) = \int_0^{\infty} B(f) e^{-fz} J_0(fr) dr \quad (5.11)$$

を得るが、これは  $z$  公式

$$W_{k,m}(\zeta) = \frac{e^{-\zeta/2} \zeta^k}{\Gamma(1/2 - k + m)} \int_0^{\infty} t^{-k+m-1/2} (1+t/\zeta)^{k+m-1/2} e^{-t} dt \quad (5.12)$$

を用い、積分順序の変更を行ふと

$$u(r, z) = \frac{2a}{\nu} \int_0^{\infty} t^{k-1/2} (1+t)^{-k-1/2} \left\{ r^2 + [\sqrt{ah}(2t+1) + z]^2 \right\}^{-1/2} dt \quad (5.13)$$

を得る。この式から容易に

$$I(l) = \int_0^l -\pi \nu k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr \\ = 2\pi k a \int_0^{\infty} t^{k-1/2} (1+t)^{-k-1/2} \left[ 1 - (2t+1) \left\{ (l^2/ah) + (2t+1)^2 \right\}^{-1/2} \right] dt \quad (5.14)$$

を得る。  $h/a \rightarrow 0$  のときの極限值は変数変換  $\tau = \sqrt{ah}/l^2 (2\tau+1)$

を用い、周知の公式  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x/2)^x = e^x$  を用い、更に  $\tau = \tau_t$  と変換

すれば (4.5) と一致することが確かめられる。また (5.15) で  $\tau = (1-j)/(2j)$

と変数  $\sigma$  に変換すれば (5.15) は有限積分となり

$$I(l) = 2\pi k a \int_0^1 [(1-\sigma)/(1+\sigma)]^x \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{l^2 \sigma^2}{ah} \right]^{-1/2} \right\} \frac{d\sigma}{2\sqrt{1-\sigma^2}} \quad (5.16)$$

を得る。この式で  $h/a > 0$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ , 従って  $\kappa \rightarrow 0$  の極限をとると

れば積分は容易に遂行でき

$$I(l) = \pi k a \log [1 + l^2/(ah)] \quad (5.17)$$

となり、(2.1) と完全に一致する。

第II表は (2.1), (4.7) によるものと (5.16) の数値積分による  $I(l)/\pi k a$

の値である。parameter として  $\kappa = \sqrt{a/(2h)}$ ,  $l^2/(ah)$  のかわりに  $g/(2h)$ ,

$ah/l^2$  を用いたが、それは (2.1), (4.7) 式に対応する便利さと、

数値として Batcheller の  $I(l)/\pi k a \approx \log 2 - 3.9 - 0.1/\kappa^2$  (文献7, (4.13))

が認められなかったことによる。表がわかるように  $\nu$  が大き

第II表  $I(l)/(\pi k a)$

| $ah/l^2$<br>$a/(2h)$ | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-4}$ | 0        |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| $10^{-1}$            | 1.34      | 1.72      | 1.80      | 1.80      | 1.80     |
| $10^{-2}$            | 2.23      | 3.94      | 5.03      | 5.41      | 5.48     |
| $10^{-3}$            | 2.39      | 4.54      | 6.64      | 8.39      | 9.92     |
| $10^{-4}$            | 2.40      | 4.61      | 6.88      | 9.12      | 14.50    |
| 0                    | 2.40      | 4.62      | 6.91      | 9.21      | $\infty$ |

いとき  $I(l)$  は  $h/a$  に極めて敏感である。

### § 6. Rayleigh の連立方程式

「問題」の解答と与える電位(もしくは温度) $u$ は、各球面 $\sigma$ の外向き法線をもととすると、全域にわたって連続で、

$$\left. \begin{array}{l} \text{球面以外では Laplace の方程式 } \Delta u = 0 \text{ を満たし,} \\ \text{球面上では } \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=a+\epsilon} = - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=a-\epsilon} \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

でなければならぬ。 $r=a+\epsilon$ ,  $a-\epsilon$  はそれぞれ球面の外、内を表す。外部から加えられた巨視的には一様な電場  $E$  は

$$E = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \iiint_V (-\text{grad } u) \, dx \, dy \, dz \quad (6.2)$$

で与えられるものと考えられる。「問題」の格子の単位胞を立方体にとり、一つの頂点からでる三辺を基ベクトル  $e_1, e_2, e_3$  とし長さは 1 とする。(6.1), (6.2) の  $u$  に関する線形性から  $E = e_1, e_2, e_3$  の場合の解の一次結合で一般の場合が表われ、また  $E \neq e_i$  なる伝導は  $e_i$  方向を主としその有効伝導率<sup>\*</sup>  $k^*$  によりめと考えられる。したがって巨視的には伝導率  $k^*$  をもつ等方的な媒体とみなせる。 $e_1, e_2, e_3$  と座標軸  $x, y, z$  と合わせ以下  $E = E e_3$  とする場合の計算と実行する。ある一つの球  $P$  の中心を原点とし他の球はこれと区別して  $Q$ , または  $Q_1, Q_2, \dots$  と名付ける。

球  $P$  の中心の電位(温度)を 0 とし、球  $P$  の内部の  $u$  の標準的な球面極座標と球面数による展開を

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} C_{n,m} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad 0 \leq r < a \quad (6.3)$$

とする。負の  $m$  と  $e^{im\varphi}$  を用いたのは後の便宜のためである。



球  $P$  の近傍で  $P$  の外部での  $u$  を求める。  $r=a$  で (6.1) の条件が成立するから容易に

$$u = V_1 + V_2(P)$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 \\ V_2(P) \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq n/2} \left. \begin{array}{l} A_{2n+1, 4m} r^{2n+1} \\ B_{2n+1, 4m} r^{-2n-2} \end{array} \right\} P_{2n+1}^{4m}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (6.10)$$

$$A_{n,m} = \frac{1+\nu+\sqrt{n}}{1-\nu} a^{-(2n+1)} B_{n,m}, \quad B_{n,m} = \frac{(1-\nu)n}{2n+1} C_{n,m} a^{2n+1} \quad (6.11)$$

となることからわかる。(6.11), (6.8), (6.9) により  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$  は全部実数で (6.8) に相当する関係が成立している。

係数  $A_{n,m}$  に由来する  $V_1$  は  $r < a$  で Laplace の方程式を満たし,  $V_2(P)$  は  $P$  の中心にある多重極の  $P$  の外部に及ぼす効果と与えている。従って  $r < a$  における  $V_1$  は  $P$  以外の球  $Q_i$  による多重極効果  $V_2(Q_i)$  の和と, 外部から加えた無限遠点源の効果  $-Ez$  の和で

$$V_1 = -Ez + \sum_Q V_2(Q) + \text{const} \quad (6.12)$$

が成立すべきで, 係数  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$  は (6.12) と (6.11) で決定されるべきだ。以上が Rayleigh<sup>2)</sup> の考察の基本方針である。ここで  $\sum_Q$  は  $P$  以外のあらゆる球  $Q_i$  について総和することと意味する。

表現を短縮するためには関数  $G_{n,m}$ ,  $H_{n,m}$  を

$$\left. \begin{array}{l} G_{n,m}(x,y,z) = r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ H_{n,m}(x,y,z) = r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

と定義する。(6.12) は

$$\sum_{n=c}^{\infty} \sum_{|m| \leq n/2} A_{2n+1, 4m} G_{2n+1, 4m}(x, y, z) + \text{const} \\ = -Ez + \sum_{n=c}^{\infty} \sum_{|m| \leq n/2} B_{2n+1, 4m} \sum_{\alpha} H_{2n+1, 4m}(x-z_{\alpha}, y-\eta_{\alpha}, z-z_{\alpha}) \quad (6.14)$$

となる。Rayleigh<sup>2)</sup>およびMenzel-Tobias<sup>4)</sup>は係数の決定に  $x=y=c$  とおき  $z$  のべき級数の係数を比較した。この方法だと  $m \neq c$  のとき  $G_{n,m}(0,0,z) \equiv 0$  となり  $A_{n,m}(m \neq c)$  に与える関係は得られない。実際の計算では (6.14) 式の意味で  $n, m$  を用いて, Rayleigh は  $(n,m) = (c,c), (1,c)$  で留め, Menzel-Tobias は  $(n,m) = (c,c), (1,c), (2,c)$  までの  $A_{2n+1, 4m}, B_{2n+1, 4m}$  と決定した。しかし後者の場合  $(n,m) = (2,1)$  の係数を落しているのは Zuzewsky-Brenner<sup>5)</sup> の指摘通り不完全の謬りをまぬかれぬ。

筆者は (6.14) を一回  $z$  で偏微分し  $z=0$  平面上での  $(x+iy)^p(x-iy)^q$  の係数を比較することにした。こうすればすべての係数に対する関係式が得られる。この計算には (6.3) の形式の應用が極めて有利である。基本となる  $G_{n,m}, H_{n,m}$  の偏微分に関する公式を F に示す。これ等は球関数の漸化式と用いて求められる。

$$\frac{\partial}{\partial z} G_{n,m} = (n+m) G_{n-1,m}, \quad \frac{\partial}{\partial z} H_{n,m} = -(n-m+1) H_{n+1,m}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) G_{n,m} = -G_{n-1,m+1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) H_{n,m} = -H_{n+1,m+1}, \quad (6.15) \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) G_{n,m} = (n-m)(n+m-1) G_{n-1,m-1}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) H_{n,m} = (n-m+1)(n-m+2) H_{n+1,m-1}.$$

(6.14) を  $z$  に関して偏微分すると, (6.15) を用いて

$$\begin{aligned}
 (A_{1,c} + E) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| < n/2} (2n+1+4m) A_{2n+1,4m} G_{2n,4m}(x,y,z) \\
 = - \sum_{n=c}^{\infty} \sum_{|m| < n/2} (2n+2-4m) B_{2n+1,4m} \sum_0 H_{2n+2,4m}(x-\xi_0, y-\eta_0, z-\zeta_0)
 \end{aligned} \quad (6.16)$$

と仮定し、 $z=0$  のとき

$$G_{2n,4m}(x,y,0) = r^{2n} P_{2n}^{4m}(0) e^{i4m\psi} = (-1)^n \frac{(2n+4m-1)!!}{(2n-4m)!!} (x+iy)^{n+2m} (x-iy)^{n-2m} \quad (6.17)$$

と仮定から、(6.16) の両辺に

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)^{N-2M} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)^{N+2M} \quad (6.18)$$

をほどこし、 $x=y=0$  とおけば左辺は  $(A_{2N+1,4M} + E\delta_{N,c})$  の定数倍と仮定し、右辺は  $H_{2N+2,4M}$  に等しいと公式(6.15)と反復すると

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)^{N-2M} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)^{N+2M} (2n+2-4m) H_{2n+2,4m}(x,y,z) \\
 = (-1)^N \frac{(2N+2n+4M-4m+2)!}{(2n-4m+1)!} H_{2N+2n+2,4m-4M}(x,y,z)
 \end{aligned} \quad (6.19)$$

とまとめることに注意し

$$H_{2n,4m}(-\xi_0, -\eta_0, -\zeta_0) = H_{2n,4m}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \quad (6.20)$$

を用い、Rayleigh<sup>2)</sup> 従つて格子和  $S_{2n,4m}$  を

$$S_{2n,4m} = \sum_0 H_{2n,4m}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \quad (6.21)$$

と定義すると

$$\begin{aligned}
 (2N+4M+1)! (A_{2N+1,4M} + E\delta_{N,c}) \\
 = - \sum_{n=c}^{\infty} \sum_{|m| < n/2} B_{2n+1,4m} \frac{(2N+2n-4m+4M+2)!}{(2n-4m+1)!} S_{2N+2n+2,4m-4M}
 \end{aligned} \quad (6.22)$$

を得る。

$B_{2n+1,4m}$  に對する(6.5)類似の關係式、および定義(6.13)、(6.21)が

$S_{2n, -4m} = \frac{(2n-4m)!}{(2n+4m)!} S_{2n, 4m}$  を用い (6.11) を整理すると  $B_{2n+1, 4m}$

$(n=0, 1, 2, \dots, m=0, 1, \dots, [n/2])$  に関する連立一次方程式

$$\begin{aligned} -E S_{N,0} &= \frac{1+\nu+1/(2N+1)}{1-\nu} a^{-(2N+3)} B_{2N+1, 4M} \\ &+ \left\{ (2N+4M+1)! \right\}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_{2n+1,0} \frac{(2N+2n-4M+2)!}{(2n+1)!} S_{2N+2n+2, 4M} \right. \\ &+ \sum_{m=1}^{[N/2]} B_{2n+1, 4m} \left[ \frac{(2N+2n-4(M-m)+2)!}{(2n-4m+1)!} S_{2N+2n+2, 4(M-m)} \right. \\ &\left. \left. + \frac{(2N+2n-4M-4m+2)!}{(2n-4m+1)!} S_{2N+2n+2, 4M+4m} \right] \right\}, \quad (6.23) \end{aligned}$$

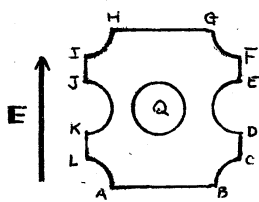
$(N=0, 1, 2, \dots, M=0, 1, \dots, [N/2])$

を得る。これを Rayleigh 方程式と名付けよう。この近似解は

11 号は後 § 9 で述べる。

§ 7.  $k^*$  と係数  $B_{1,0}$  の関係

Rayleigh<sup>2)</sup> が単純立方格子について行った考察をそのまま拡張する。単位胞から球をとりその上半部分を  $D$  としその境界を  $\partial D$  と



する。 $D$  と  $E$  の関係は模式的に Fig. 2 に示

した。  $u$  および  $v$  は  $D$  における Laplace の方程式と

満足するから Green の定理により

Fig. 2

$$\int_{\partial D} z \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\partial D} u \frac{\partial z}{\partial n} dS \quad (7.1)$$

が成立する。格子構造が  $\sigma_v$  不変と仮定する面上  $z$  は  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = 0$ ,

$\sigma_h$  を許す面上  $z$  は  $\frac{\partial z}{\partial n} = \pm 1$ , 球面上  $z$  は  $z = a \cos \theta + a \cos \phi$ ,  $\frac{\partial z}{\partial n} = -\cos \theta$

となり, 球面上の  $u$  は (6.10), (6.11) の  $z$  を  $u$  の定数は中心の  $z$

座標をとるとすれば  $-Es$  と仮定することを用いて (7.1) の両辺を計算す

ると,

$$\text{左辺} = \int_{FGHI} \frac{\partial u}{\partial n} dS - \frac{4\pi n_1}{3} (A_{1,c} a^3 - 2 B_{1,c}) \quad (7.2)$$

$$\text{右辺} = -E - \frac{4\pi n_2}{3} (A_{1,c} a^3 + B_{1,c}) \quad (7.3)$$

となる。ここに  $n_1$  は単位胞あたりの環の個数で第四表に示す値となる。 $-R \int_{FGHI} \frac{\partial u}{\partial n} dS$  が単位胞と通過する流量で  $R^*E$  に等しくなることを用いると, (7.2), (7.3) から

$$R^*/R = 1 + 4\pi n_2 B_{1,c} / E \quad (7.4)$$

を得る。従って有効伝導率は  $B_{1,c}$  を求めれば決定される。

第 四 表

| 格子         | 単純立方 | 体心立方 | 面心立方 |
|------------|------|------|------|
| 単位胞あたりの環の数 | 1    | 2    | 4    |

§ 8.  $S_{2n+2, 4m}$  特には  $S_{2,c}$  について

$S_{2n+2, 4m}$  は球の半径にはよらず格子構造のみにて決まる。その値は原則として数値的に求和して求める。このとき  $n \geq 1$  である。

$$|S_{2n+2, 4m}| \leq \sum_a \left| \frac{P_{2n+2}^{4m}(\omega a)}{r_a^{2n+3}} \right| \cong O(1) \times \int_1^\infty \frac{dr}{r^{2n+1}} \quad (8.1)$$

となり絶対収束するから問題は無い。またその実数性は  $2\pi$  面  $z$  の鏡影  $z_c$  に対し格子構造が不変で

$$S_{2n+2, 4m} = \sum_a \frac{P_{2n+2}^{4m}(\omega a)}{r_a^{2n+3}} e^{-4im\varphi} = \sum_a \frac{P_{2n+2}^{4m}(\omega a_c)}{r_a^{2n+3}} e^{-4im\varphi} = S_{2n+2, 4m}^* \quad (8.2)$$

と存在する。から明らかに求和の際  $e^{-4im\varphi}$  は  $\cos 4m\varphi$  とみなせる。 $n=0$ ,  $S_{2,c}$  の場合 (8.1) の右辺が対数発散をし、求和の順序が問題となる。

Rayleigh<sup>2)</sup> [p.21] の単純立方格子の考察を踏襲しよう。そもそも

(6.12) を導くのに無限遠での点源により正が生ずると考えた。  
点源と有限の位置における一様正で近似できる部分は正の  
方向に長く、それと垂直の方向には短い。そこで極限の場合  
 $\Sigma_0$  は  $z$  方向を先に求和して後に  $x, y$  方向に延長するのが適当  
と考えられる。 $S_{2,c}$  を具体的に書き上げると

$$S_{2,c} = \sum_a r_a^{-3} P_2(\cos \theta_a) = \sum_a (2z_a^2 - z_a^2 - r_a^2)/(2r_a^5) = -\sum_a \frac{1}{2} \frac{z_a^2}{r_a^5} \quad (8.3)$$

となる。大きな自然数  $v$  をとって、 $|z_a|, |y_a|, |x_a| \leq v$  となる立方体の  
範囲からの寄与を求めると、対称性から

$$\sum z_a^2/r_a^5 = \sum y_a^2/r_a^5 = \sum x_a^2/r_a^5 \quad (8.4)$$

となり寄与はゼロとなる。 $|z_a|, |y_a| \leq v, |x_a| > v$  からの寄与は

積分で近似し

$$\begin{aligned} \int_{-v}^v dz \int_{-v}^v dy \int_v^\infty -\frac{z}{2} \left( \frac{z}{r_a^3} \right) dz &= n_1 \int_{-v}^v dz \int_{-v}^v dy \frac{v}{\sqrt{z^2 + y^2 + v^2}} \\ &= n_1 \int_{-v}^v dz \frac{2v^2}{(z^2 + v^2) \sqrt{z^2 + 2v^2}} = \frac{4}{3} \pi n_1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

となる。この近似は  $v$  が大なるほど正確なものであるから

$$S_{2,c} = \frac{4}{3} \pi n_1 \quad (8.6)$$

を得る。 $n_1$  は単位胞あたりの球の数である。(第Ⅲ表)。

後の都合上 (8.3) と類似の関係式を用いて得られる結果と1

つなげられるしておく。

$$S_{6,4} = -2520 S_{6,c} \quad (8.7)$$

第Ⅳ表は6桁と目標1として求めた  $S_{2n+2,4m}$  の値である。

### § 9. Rayleigh の近似

第 IV 表

| 格子        | 単純立方    | 体心立方     | 面心立方     |
|-----------|---------|----------|----------|
| $S_{2,c}$ | 2.07440 | 4.18879  | 8.37758  |
| $S_{4,c}$ | 3.10925 | -3.10648 | -7.52567 |
| $S_{6,c}$ | 0.57333 | 5.44655  | -26.6349 |

$B_{2n+1,4m}$  に関する方程

式(6.23)は無限次元で、

のまゝ  $z''$  は  $B_{2n+1,4m}$  を具

体的に決定できな

何等かの方法で<sup>限</sup>有次元にし、 $z$  ぎ $z$  ぎに近似を高める方法を採用せねばならぬ。 $(n, m)$  を辞書式に配列し、ある  $(n_0, m_0)$  から後の  $B_{2n+1,4m}$  を 0 とおくことも考えられる。しかし  $S_{2n+2,4m}$  の評価に要する労力を考えると、むしろ  $S_{2n+2,4m}$  を打ちきって逐次近似をする方が有利である。(6.23) からわかるように、このとき  $N > n_0$  に対する  $B_{2N+1,4M}$  は 0 となり(6.23)は実質的には有限次元となり前者とほぼ同じである。実際基本的には Rayleigh<sup>2)</sup> も Meredith-Tobias<sup>4)</sup> も後者を採用した。これを  $\{n_0, m_0\}$  次の Rayleigh 近似と呼ぶ。例えば  $\{2, 1\}$  次近似の(6.23)を書き上げると

$$\left\{ \begin{aligned} -E &= \left( \frac{2+\nu}{1-\nu} \alpha^{-3} + \frac{2!}{2!} S_{2,0} \right) B_{1,0} + \frac{4!}{3!} S_{4,0} B_{3,0} + \frac{6!}{5!} S_{6,0} B_{5,0} + (2!+2!) S_{6,4} B_{5,4} \\ 0 &= \frac{4!}{3!} S_{4,0} B_{1,0} + \left( \frac{4/3+\nu}{1-\nu} \alpha^{-7} + \frac{6!}{3!3!} S_{6,0} \right) B_{3,0} \\ 0 &= \frac{6!}{5!} S_{6,0} B_{1,0} + \frac{6/5+\nu}{1-\nu} \alpha^{-11} B_{5,0} \\ 0 &= \frac{2!}{9!} S_{6,4} B_{1,0} + \frac{6/5+\nu}{1-\nu} \alpha^{-11} B_{5,4} \end{aligned} \right. \quad (9.1)$$

となる。これを解き(7.4), (8.6), (8.7)を用いると、 $f = \frac{4\pi\eta_1}{3} \alpha^3$  に注意して、

$$R^*/R = 1 - 3f / \left[ \frac{2+\nu}{1-\nu} + f - 16 \left( \frac{3f}{4\pi\eta_1} \right)^{10/3} S_{4,0}^2 / \left\{ \frac{4/3+\nu}{1-\nu} + 20 S_{6,0} \left( \frac{3f}{4\pi\eta_1} \right)^{7/3} \right\} + \frac{176(1-\nu)}{6/5+\nu} \left( \frac{3f}{4\pi\eta_1} \right)^{14/3} S_{6,0}^2 \right] \quad (9.2)$$

を得る。第 IV 表の値を用いれば(9.2)は Zuzovsky-Brenner<sup>5)</sup> [(75)式] と

最終項の係数 176 を 53.5 として 113 を除き完全に一致する。

計算法、がちがちうので不一致の理由を指摘できぬが、彼等の計算に誤りがあるかは分からない。(9.1) で  $S_{6,4}, S_{6,0}, S_{4,0}$  の順に 0 と

おいて消して行けば  $n=1$  の  $\{2,0\}, \{1,0\}, \{0,0\}$  次の方程式を得る。あるいは

(9.2) にほどきせば対応する次数の  $R^*/R$  の近似値を得る。Rayleigh<sup>2)</sup> の指摘通り  $\{0,0\}$  近似は Maxwell の式 (5.1, (1.1)) と一致

し単純立方格子のとき  $S_{4,0} = 3.10825$  を Rayleigh の求めた 3.11 で置換

之れは  $\{1,0\}$  近似は  $(1,2)$  に  $(1,4)$  を代入したものとなる。

高次の Rayleigh 近似を (9.2) のように式にまとめるのは困難である。Koller<sup>6)</sup> は Rayleigh 近似は  $a \ll 1$  のときのみ有効と考え 5.2 のベタ近似法を提唱した。しかし  $\nu, a$  を数値で与え電子計算機を用いればかなり高次の近似で  $R^*/R$  を求めることが可能で  $R/a$  が小なるときにも信頼しうる数値が得られるはずである。

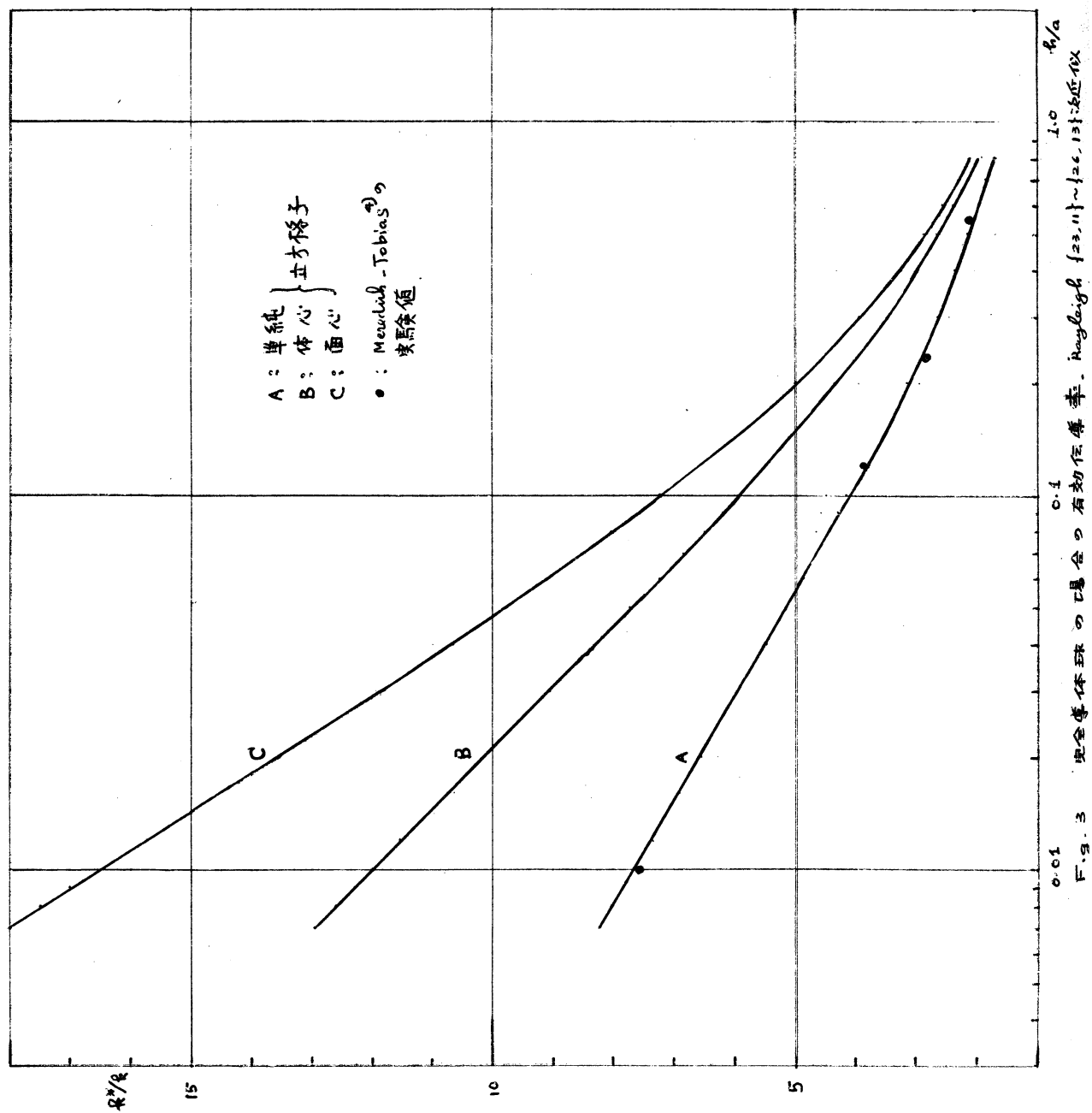
Fig. 3 は  $\nu = \infty$  の場合の数値計算結果である。横軸は対数目盛で  $R/a$  を縦軸は  $R^*/R$  の値そのままを目盛した。曲線 A, B, C はその順に単純、体心、面心立方格子の場合を表わす。精度は  $R/a \approx 0.01$  のとき  $10^{-3}$ ,

0.1 のとき  $10^{-6}$  の程度と考えられる。 $R/a$  と  $a$  の関係は第 V 表に示す。

近次は  $\{23, 11\}$  次, 156 元から  $\{26, 13\}$  次, 196 元の連立一次方程式によった。実際の Program では  $P_n^{(m)}(\omega\theta)$  が急速に大きくなるため

全面的に  $\sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^{(m)}(\omega\theta)$  で置き換えて得た式を用い、倍精度実

数を用い、7桁の精度を目標に Gauss-Seidel 法を用いた。



第 V 表.

| 格子       | 単純      | 体心                | 面心                  |
|----------|---------|-------------------|---------------------|
| 格子点間最短距離 | 1       | $1/\sqrt{2}$      | $\sqrt{3}/2$        |
| $a^{-1}$ | $2+h/a$ | $\sqrt{2}(2+h/a)$ | $2(2+h/a)/\sqrt{3}$ |

Fig. 3 の曲線 A の

近所にある  $\bullet$  は第

I 表に掲げた Marchal.

Tobias<sup>4)</sup> の実験値と一致は極めて良い。全般的な数値計算の結果から判断して、 $\{26, 13\}$  次 Rayleigh 近似は  $h/a \geq 0.01$  に対して  $10^{-3}$  程度の精度の  $k^*/k$  を与えるものと信ぜられる。

## § 10. Keller-Batchelor-O'Brien の近似と Rayleigh 近似の接続

§ 2, § 3 で得た結果は  $h/a \ll 1$ ,  $\nu \gg 1$  の場合に有効であり, § 9 の Rayleigh 近似は次数を  $\{26, 13\}$  までは高めれば  $h/a \geq 0.01$  で信頼しうる結果を与える。しかし計算結果では  $h/a \sim 0.001$  のときには更に近似を高める必要が認められた。しかし  $\{n_0, m_0\}$  近次の連立方程式の次元は  $\sum_{n=0}^{n_0} ([n/2]) \approx \frac{1}{4} n_0^2$  の程度に急速に増加し, 計算機の記憶容量, 折あち, 計算時間の点からあまり次数を高めることは實際上困難である。そこで基本的には Batchelor-O'Brien<sup>2)</sup> の考え方に従い両者の接続をはかろう。  
 $h/a \sim 0.05$  程度の Rayleigh 近似と利用して

まず (7.4) の  $B_{1,0}$  に次のような解析を行う。球  $P$  の表面附近  $r \geq a$  での  $u$  の球面調和関数展開 (6.10), (6.11) を用いて  $\frac{\partial u}{\partial r}$  を求め  $u$  に  $z = r \cos \theta$  を代入して球面  $r = a$  で積分すると球面調和関数の直交性と (6.11) により

$$\int \left( z \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} dS = \left( A_{1,0} - 2 \frac{B_{1,0}}{a^3} \right) a^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi a^3}{1-\nu} B_{1,0} \quad (10.1)$$

を得る。書き直せば

$$4\pi k B_{1,0} = (1 - 1/\nu) \int_S \left( -k z \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} dS \quad (10.2)$$

となる。(10.3)の右辺は Batchelor-O'Brien<sup>4)</sup>の  $S_z$  に等しい。) 右辺の積分は球  $P$  の全表面  $S$  について行うのだが、これを分割する。 $P$  に隣接する球を  $Q_j$  ( $j=1, 2, \dots, n_2$ )、その中心の座標を  $(z_j, y_j, z_j)$  とし、球  $P$  と球  $Q_j$  の中心を結ぶ線分の中点を  $M_j$  と名づけよう。 $Q_j$  からの距離が他の  $Q_i$  ( $i \neq j$ ) より小となる  $S$  の部分を  $S_j$  とする。 $S \cong S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{n_2}$  と互いに素な  $S_j$  に分割される。 $S_j$  の形はビーンボール上に作図すれば容易にわかるように第VI表に示す図形となる。(10.3)の積分  $\int_S = \sum_{j=1}^{n_2} \int_{S_j}$  に分けると  $S_j$  における流れ密度  $-k z \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a}$  は  $M_j$  の附近で大きくなるので積分記号内の  $z$  は  $M_j$  の  $z$  座標  $z_j/2$  で置き換える。

$$\int_{S_j} \left( -k z \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} dS \cong z_j \int_{S_j} \left( -k \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \quad (10.3)$$

$S_j$  は球面多角形であるがこれを  $M_j$  と中心とする等面積の小円(面積 =  $4\pi a^2/n_2$ ) で置きかえれば(10.3)右辺の積分は(2.4)の  $I(b)$  で表わせる。

この場合  $b$  は  $\sin^{-1} b/a$  がこの小円が球  $P$  の中心で張る円錐の半頂角に等しいとするのが合理的である。こう決定した  $b/a$  の値は第VI表に示した。流量を決定するには  $Q_j$  の電位を用いねばならぬが、電位は §6 で述べた通り  $-E z_j$  となる。よって

$$\int_{S_j} \left( -k \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} dS = I(b) E z_j \quad (10.4)$$

となる。また  $I(b)/\pi k a$  を Batchelor-O'Brien<sup>7)</sup>に従って  $\mathcal{H}$  とすれば  $\mathcal{H}$  は

第Ⅱ表に示した通り  $a/\nu b$ ,  $ah/b^2$  の関数と存するから

$$\mathcal{R} = I(b)/\pi k a = \mathcal{R}(b/a, \nu, h/a) \quad (10.5)$$

と表す。(10.2), (10.3), (10.4), (10.5) を用い  $4\pi k B_{1,c}$  を  $\mathcal{R}$  を用いて表わし  
(7.4) を用いれば

$$R^*/R \cong 1 + n, \pi a (1 - 1/\nu) \mathcal{R}(b/a, \nu, h/a) \sum_{j=1}^{n_2} \zeta_j^2/2 \quad (10.6)$$

簡単な計算で単純, 体心, 面心立方格子の場合  $\sum_{j=1}^{n_2} \zeta_j^2$  は第Ⅵ表に示した通りすべて2に等しい。よって

$$R^*/R = 1 + n, \pi a (1 - 1/\nu) \mathcal{R}(b/a, \nu, h/a) + K \quad (10.7)$$

を得る。Kは補正項で  $K \ll R^*/R$  が予想される。

これで希望する連続の準備はできた。あとはKがどうなるかを調べればよい。Fig.4の曲線A, B, Cはそれぞれ単純, 体心, 面心立方格子の  $\nu = \infty$ ,  $h/a = 0.1 \sim 0.01$  の Rayleigh 近似の  $R^*/R$  に対するKの値で, 曲線A', B', C'は対応する格子の  $h/a = 0.02$ ,  $\nu = 50 \sim 150$  に対するもので, どの場合も変化するparameterの初めに書いたものが曲線の左端に, 終りに書いたものが右端に対応する。図から明らかのように単純立方格子に対する近似(10.6)はきゅめてよく  $\nu \geq 50$ ,  $h/a \leq 0.1$  に対して  $K \cong 0.35$  と存することが期待できる。体心, 面心立方格子の場合はその他の計算資料から判断して  $\nu \geq 100$ ,  $h/a \leq 0.05$  に対しそれぞれ  $K = 0.7$ ,  $K = 0.3$  がかなりよく推定できるに留る。しかし  $|K| < 1$  はずれの場合も相当確実で, Kの目盛は  $R^*/R$  の目盛りの10倍

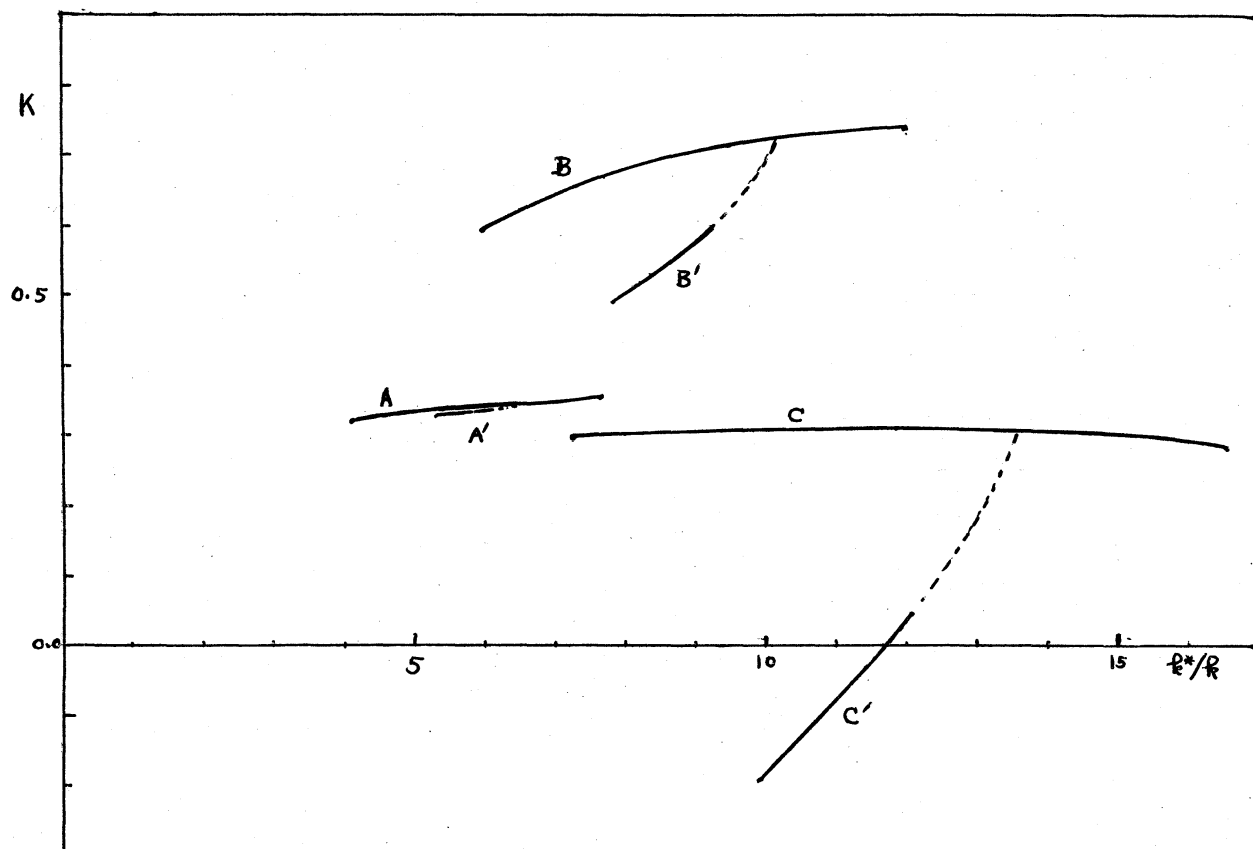


Fig. 4 (10.7) 式の  $K$ 。A, B, C は単純, 体心, 面心立方格子で  $\nu = \infty$ ,  $h/a = 0.1 \sim 0.01$  の場合。A', B', C' は対応する格子の  $h/a = 0.02$ ,  $\nu = 50 \sim 150$  の場合。破線の "とく" 延長すれば  $\nu = \infty$ ,  $h/a = 0.02$  と交はる。

に拡大してあることを考え、本節の諸近似のあらしを考えると  
 は (10.7) の近似は成功と言えよう。

第 VI 表

| 格 子                        | 単純立方                                | 体心立方                                 | 面心立方                                          |
|----------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $S_j$ の 形                  | 頂角 $\pi/2$ , 一辺 $\pi a/2$<br>の球面正方形 | 頂角 $\pi/2$ , 一辺 $\pi a/2$<br>の球面正三角形 | 頂角 $\pi/3$ , $2\pi/3$ , 一辺<br>$\pi a/3$ の球面菱形 |
| 隣接球の数 $n_2$                | 6                                   | 8                                    | 12                                            |
| $S_j$ の面積により決定<br>した $b/a$ | $\sqrt{5/9}$                        | $\sqrt{7/16}$                        | $\sqrt{11/36}$                                |
| $\sum_{j=1}^{n_2} z_j^2$   | $2 \times 1$                        | $2 \times \frac{1}{4} \times 4$      | $2 \times \frac{1}{4} \times 4$               |

なお  $b/a$  は上記の方法以外に  $S_j$  に内接する小円を基準とし  
 た場合,  $b/a = 1$  とした場合も試算したが  $K$  の変化が<sup>かなり</sup>はげしく  
 上記のものが最もよい結果を与えた。

単純立方格子の場合の近似はきわめてよいので上記  $K = 0.35$   
 および  $b/a = (4/\pi)((\pi/6) - f)$ ,  $b/a = \sqrt{5/9}$  を用い (10.7) の極限を  
 とめると, (2.2) の Keller の式の  $\text{const.} \approx 1.2$ .

$$\text{const.} = K - (\pi/2) \log(5\pi/36) = K - 0.30273 = 0.05 \quad (10.8)$$

を得る。Keller の如く  $\text{const.} = 0$  と想像することはやや困難であ  
 る。

## § 11. まとめ

1) 単純・体心・面心立方格子のとき高次の Rayleigh 近似に必要  
 な係数の決定をすることができた。これを用いると中型計算  
 機 (ユニカム<sup>ユニカム</sup> 記憶容量 128 Kb) と倍精度実数演算で  $b/a \geq 0.01$  に対し

て信頼するに足る  $k^*/k$  を決定できた。結果は Meredith-Tobias の実験値とよく一致している。

2) Batcheller-O'Brien の考え方に従うときの  $k/a \ll 1$ ,  $\nu \gg 1$  に対する  $k^*/k$  の近似解を求めるための基本解を解析的に求めることができた。これを用いた場合、α) 単純立方格子に対しては  $k/a \leq 0.1$ ,  $\nu \geq 50$  のとき補正項  $K$  は 0.35 と推定されるよい近似を得た。β) 面心、体心立方格子に対しては α) の場合ほどよい結果は得られなかった。しかし補正項  $K$  に関し  $|K| < 1$  が  $k/a \leq 0.1$ ,  $\nu \geq 50$  に対して期待できることがわかった。

3) 2α), 2β) の結果に差のあることは今後の検討を要する。93ページの厳密解が球のなす方向と外場正とを平行と仮定しているため、それがよく成立する単純立方格子の場合にはかなり良好な結果を与えているのかもしれない。体心・面心立方格子の場合はどうしても正と斜めの位置にある二球を問題としなければならぬ。

## 文 献

- 1) J.C.Maxwell, "A Treatise on Electricity and Magnetism", 2vols.,  
3rd ed., 1891, Chap. IX, p. 440.
- 2) Lord Rayleigh, Phil. Mag., xxxiv, pp. 481-502, 1892.
- 3) I. Runge, Zeits. f. techn. Phys., 6, pp. 61-68, 1925.
- 4) R.E. Meredith and C.W. Tobias, J. Appl. Phys., 31, pp. 1270-1273, 1960.
- 5) M. Zuzovsky and H. Brenner, ZAMP, 28, pp. 979-992, 1977.
- 6) J.B. Keller, J. Appl. Phys., 30, pp. 991-993, 1963.
- 7) G.K. Batchelor and R.W. O'Brien, Proc. Roy. Soc. A, 355, pp. 313-333,  
1977.
- 8) G.N. Watson, "A Treatise on the Bessel Functions", Camb. Univ. Press,  
1944 (Reprinted 1966).
- 9) E.T. Whittaker and G.N. Watson, "A Course of Modern Analysis", Camb.  
Univ. Press, 1927 (Reprinted 1935).
- 10) A. Sommerfeld, "Partielle Differentialgleichungen der Physik", Akad.  
Verlg., 1966.