

テータ-常数について

名大 理 森川 秀

1. *Canonical* という概念はそれだけ取出して、定義も説明も出来にくい根元的概念であるが、ある具体的な対象が *Canonical* であるかどうかは判定出来その証拠をあげることも容易であるのが普通である。ここにお話するテータ-常数の問題は、「アーベル多様体を座標射影空間に *Canonical* に埋込んだ時、その加法公式を特徴づけよ」ということであるといつてよい。「原点の像の座標 (テータ-常数) を特徴づけよ」といっても同じである。

Canonical な埋込みの説明 (古典的な場合)

τ : $n \times n$ 対象行列で虚部分が正定付号なもの

$z = (z_1, \dots, z_n)$: 変数-Vector,

$a = (a_1, \dots, a_n)$: 整数-Vector,

l : 1 以上の整数

このときテータ-級数 $\theta_a(\tau|z)$ を

$$\theta_a(\tau|z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi \sqrt{-1} l \{ (m + \frac{a}{l}) \tau^t (m + \frac{a}{l}) + 2 (m + \frac{a}{l})^t z \}}$$

で定義する。 $\theta_a(\tau|z)$ は a の $\text{mod } l \mathbb{Z}^n$ の class のみ

に關係し. 次のような性質をもつ: $a, \hat{a}, h, \hat{h}, \theta$ を整-Vector とするとき

$$(1) \quad \mathcal{J}_a(\tau | z + h\tau + \hat{h}) = e^{-\pi\sqrt{-1}l\{h\tau^t h + 2h^t z\}} \mathcal{J}_a(\tau | z)$$

$$(2) \quad \mathcal{J}_a(\tau | z + \frac{\hat{a}}{l}) = \langle a, \hat{a} \rangle \mathcal{J}_a(\tau | z)$$

$$\therefore \langle a, \hat{a} \rangle = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}a^t a}{l}}$$

$$(3) \quad \mathcal{J}_a(\tau | z + \frac{\theta}{l}\tau) = e^{-\pi\sqrt{-1}\{\frac{1}{l}\theta\tau^t \theta + 2\theta^t z\}} \mathcal{J}_{a+\theta}(\tau | z).$$

$\text{mod } l \mathbb{Z}^2$ の class に適当な順序を入れておけば (1) より, 対応 $\theta: z \longrightarrow (\dots, \mathcal{J}_a(\tau | z), \dots)$ は complex torus $A = \mathbb{C}^2 / \{h\tau + \hat{h} \mid h, \hat{h} \in \mathbb{Z}^2\}$ から (l^2-1) -次元座標射影空間 P_{l^2-1} の中への写像を与える. 非有次座標

$$\varphi_a(z) = \frac{\mathcal{J}_a(\tau | z)}{\mathcal{J}_0(\tau | z)} \quad (a \in \mathbb{Z}^2 / l \mathbb{Z}^2)$$

にうつれば A の l 分点 $\frac{1}{l}h\tau + \frac{1}{l}\hat{h}\tau$ ($h, \hat{h} \in \mathbb{Z}^2 \text{ mod } l \mathbb{Z}^2$) に対して, 次のような性質をもつ: φ_a の 極-divisor は $\mathcal{J}_0(\tau | z)$ の divisor, かつ

$$(4) \quad \varphi_a(-z) = \varphi_{-a}(z), \quad \varphi_0(z) \equiv 1,$$

$$(5) \quad \varphi_{a+b}(z) = \varphi_a(z + \frac{1}{l}\theta\tau) \varphi_b(z),$$

$$(6) \quad \varphi_a(z + \frac{1}{l}\hat{\theta}) = \langle a, \hat{\theta} \rangle \varphi_a(z).$$

この θ を *Canonical* な level l の テータ-写像という。
 $l \geq 3$ のときには埋込みになる。 θ はアーベル函数系
 $\{\varphi_a(z)\}$ で決定される。

Canonical な埋込みの説明 (抽象的な場合)

G : 位数 $|G|$ が奇の加法群,

K : *Universal domain* その標数が $|G|$ と素

P_G : 次のように座標の入った $(|G|-1)$ -次元の
射影空間,

$$P_G = \{(x_a)_{a \in G} \mid x_a \in K, (x_a)_{a \in G} \neq 0\} / \sim$$

ただし $(x_a)_{a \in G} \sim (y_a)_{a \in G}$ はある零でない
 λ があって $\lambda x_a = y_a \ (a \in G)$.

アーベル多様体 A が与えられた時, A 上の G -theta
structure という概念を導入しよう。 A の divisor X に
 対して A の部分群 $\mathfrak{g}_X = \{t \in A \mid X_t \sim X\}$ が対応する
 が, これが有限群のとき, X は *non-degenerate* であるとい
 う。 divisor X に対しては *unique* な $\mathfrak{g}_X$ の *skew-*
symmetric な *bicharacter* $e_X(,)$ が定まる。 すなわ
 ち写像 $e_X : \mathfrak{g}_X \times \mathfrak{g}_X \longrightarrow \{K \text{ の } 1 \text{ の中根の群}\}$ で
 次の性質をもつ

$$(i) \quad e_X(s+s', t) = e_X(s, t) e_X(s', t),$$

$$e_X(s, t+t') = e_X(s, t) e_X(s, t')$$

$$(ii) \quad e_x(s, t) e_x(t, s) = 1.$$

前にあげた古典的例の場合には、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_x &= \left\{ \frac{1}{\ell} (h\tau + \hat{h}) \mid h, \hat{h} \in \mathbb{Z}^2 \bmod \ell \mathbb{Z}^2 \right\} \\ e_x\left(\frac{1}{\ell}(\tau + \hat{\tau}), \frac{1}{\ell}(\sigma\tau + \hat{\sigma})\right) &= e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\ell}(a^t\hat{\sigma} - \sigma^t\hat{a})} \end{aligned}$$

$\hat{G}$ で G の双対加法群, $a \times \hat{a} \rightarrow \langle a, \hat{a} \rangle$ でその pairing:
 $G \times \hat{G} \rightarrow \{K \text{ の } 1 \text{ の } n \text{ 乗根の群}\}$ をあらわすものとする。また
 $\tau = -\delta_A$ で $u \rightarrow -u$ なる A の automorphism,
 $\ell(X) = \dim \{f \mid (f) + X > 0\}$ とする。

定義 A 上の G -theta structure とは A 上の positive divisor X と $G \oplus \hat{G}$ から $\mathfrak{g}_X$ の上への isomorphism ρ との組 (X, ρ) で次の性質をもつものとする。

- (i) $(-\delta_A)^{-1}(X) = X$, (ii) $\ell(X)$ は標数と素,
- (iii) $e_x(a\rho, \hat{a}\rho) = \langle a, \hat{a} \rangle \quad (a \in G, \hat{a} \in \hat{G})$,
- (iv) $e_x(G\rho, G\rho) = e_x(\hat{G}\rho, \hat{G}\rho) = \{1\}$

定理 アーベル多様体 A 上の G -theta structure (X, ρ)
 $(|G| \text{ は奇, 標数 } \neq 2)$ に対して, unique $\iota = A$ 上の
 函数系 $\{\varphi_a(u) \mid a \in G\}$ が存在して次のような性質をみたす。

$$(i) \quad \varphi_{-a}(u) = \varphi_a(-u), \quad \varphi_0(u) \equiv 1$$

$$(ii) \quad \varphi_{a+b}(u) = \varphi_a(u + b\rho) \varphi_b(u) \quad (a, b \in G)$$

$$(iii) \quad \varphi_a(u + \hat{a}\rho) = \langle a, \hat{a} \rangle \varphi_a(u) \quad (a \in G, \hat{a} \in \hat{G})$$

$$(iv) \quad (\varphi_a) + X > 0.$$

この函数系を用いて A から P_G の中へ *rational map* φ :

$$u \longrightarrow (\varphi_a(u))_{a \in G}$$

が定義される。これを G -theta structure (X, ρ) に付する *Canonical map* と呼んでよいであろう。原点で φ が定義可能なら $\varphi(0)$ の座標を τ - φ -常数とみなしてかまわないだろう。よって問題は $\varphi(0)$ を特徴づけること。

2. *Commutative composition*. P_G の点 $x = (x_a)_{a \in G}$ に対して x^{-1} で a -成分が x_{-a} となる P_G の点をあらわすとし、また $(x_{-a+b} \varphi_{a+b})_{a \in G, b \in G}$ で (a, b) -成分が $x_{-a+b} \varphi_{a+b}$ の $|G| \times |G|$ -行列をあらわすことになる。

今 P_G の一点 e で次の性質

$$(7) \quad e_{-a} = e_a \quad (a \in G)$$

をみたすもの一つ定め、固定する。 e を *origin* となづける。

定義 P_G の2点 $x = (x_a)_{a \in G}$, $y = (y_a)_{a \in G}$ が e に関して結合可能とは、零でない $|G|$ -vector $(u_a)_{a \in G}$,

$(v_a)_{a \in G}$ があって次の性質をもつことである.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} (e_{-a+b} \ e_{a+b})_{a \in G, b \in G} & (y_{-a+b} \ y_{a+b})_{a \in G, b \in G} \\ {}^t(x_{-a+b} \ x_{a+b})_{a \in G, b \in G} & (u_{-a+b} \ v_{a+b})_{a \in G, b \in G} \end{pmatrix} \\ = \text{rank} (e_{-a+b} \ e_{a+b})_{a \in G, b \in G}$$

もしかかる $(u_a)_{a \in G}, (v_a)_{a \in G}$ があれば $u = (u_a)_{a \in G}, v = (v_a)_{a \in G}$ は P_G の点として unique に x, y によって決まる ($|G|$ が奇数だから). v を $x \circ y$ とあらわすとき, x を x^{-1} でかえること1によって $u = x^{-1} \circ y$ であることとする. かくて $x \circ y$ が特別な x, y に対して定義出来た

性質: $x \circ y$ が定義可能ならば, $x^{-1} \circ y, e \circ x, x \circ e, y \circ x, x^{-1} \circ y^{-1}$ も定義可能であって

$$(i) \quad x \circ e = e \circ x = x,$$

$$(ii) \quad x \circ y = y \circ x$$

$$(iii) \quad (x \circ y)^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}$$

次に2分点の概念を入れる.

定義 e の2分点 (単に2分点ともいう) とは P_G の点 $e(f) = (e_a(f))_{a \in G}$ であって次の性質をもつもの

$$(8) \quad e(f)^{-1} \circ e(f) = e(f) \circ e(f) = e$$

この定義から $e(f)^{-1} = e(f)$ であることを知ることが出来る。
次の二つの場合がおこる。

$$(i) \quad e_{-a}(f) = e_a(f) \quad (a \in G)$$

$$(ii) \quad e_{-a}(f) = -e_a(f) \quad (a \in G)$$

2分葉を用いて P_G の closed subspace A_e を次のように定義する。

$$A_e = \{x \in P_G \mid x \circ e(f) \text{ が全ての2分葉 } e(f) \text{ に対して定義可能}\}$$

大問題 いかなる条件のもとで, A_e は n -次元のアーベル多様体となるか?

定理 $\varphi: u \longrightarrow (\varphi_a(u))_{a \in G}$ をアーベル多様体 A から P_G の中への埋込みで, ある G -theta structure (X, ρ) に対応するものとする ($|G|: \text{odd}$). そのときも(次の仮定

「仮定: 自然写像 $\{f \mid f(X) > 0\} \otimes \{f \mid f(X) > 0\} \longrightarrow \{g \mid g + 2X > 0\}$ が surjective」

がみたされるならば

$$(9) \quad \varphi(u+v) = \varphi(u) \circ \varphi(v)$$

ここに 0 は $e = \varphi(0)$ に関する加法 $u+v$ は A 上の加法。

この定理の (9) はいわゆる加法公式にはかならない。

問題 上の仮定はいつなりたつか。

X が *Very ample* であって、成り立たない例があれば、極めておもしろい。なぜならば上の加法公式と異なった加法公式が得られる。

問題 アーベル多様体 A の次元を n , 適当な d をとって G を位数 d の巡回群としたとき, $A \xrightarrow{\varphi} P_G$ なる *Canonical rational map* で次のような場合がありうるか:

- (i) $\varphi: A \rightarrow P_G$ は埋込
- (ii) $\varphi: A \rightarrow P_G$ は埋込みで上の定理の仮定を満たす。
- (iii) $\varphi: A \rightarrow P_G$ は *everywhere define*

また $\varphi(A)$ の *singularity* は?

3. 2乗と Heisenberg group. 今 $n = \text{rank}(e_{-a+b} e_{a+b})_{a \in G, b \in G}$ とおくと, $(e_{-a+b} e_{a+b})_{a \in G, b \in G}$ は *symmetric* であるから $|G| \times n$ -行列 S があって

$$(10) \quad (e_{-a+b} e_{a+b})_{a \in G, b \in G} = S^t S$$

とかける。ここに S は *orthogonal* n -行列 M をかけること

$$S \longrightarrow SM$$

だけの任意性をもつ。もし P_G の表 $x = (x_a)_{a \in G}$ に対して

$e \circ x$ が定義可能なときには

$$\begin{aligned} \text{rank} ((e_{-a+b} e_{a+b})_{a \in G, b \in G} (x_{-a+b} x_{a+b})_{a \in G, b \in G}) \\ = \text{rank} (e_{-a+b} e_{a+b})_{a \in G, b \in G} \end{aligned}$$

より $|G| \times m$ -行列 T_x が unique にあって

$$(II) \quad (x_{-a+b} x_{a+b})_{a \in G, b \in G} = S^t T_x$$

とかけることがわかる。また $x \circ y$ が定義可能なときには
適当な零でない λ があって

$$((x' \circ y)_{-a+b} (x \circ y)_{a+b}) = \lambda T_x^t T_y$$

とかける。これは定義

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} (e_{-a+b} e_{a+b}) (y_{-a+b} y_{a+b}) \\ {}^t (x_{-a+b} x_{a+b}) \lambda^{-1} ((x' \circ y)_{-a+b} (x \circ y)_{a+b}) \end{pmatrix} \\ = \text{rank} (e_{-a+b} e_{a+b}) \end{aligned}$$

$$(e_{-a+b} e_{a+b}) = S^t S$$

より容易に T は決められる。 λ は 有次座標 $(x_a)_{a \in G}, (y_a)_{a \in G}$

$((x' \circ y)_a)_{a \in G}, ((x \circ y)_a)_{a \in G}$ に関する。

上の結果を又分表 $e(f)$ に適用してみよう。

$e(f)^{-1} \circ e(f) = e(f) \circ e(f) = e$, $e(f)^{-1} = e(f)$ であるから, 直ちに

$$S^t S = (e_{-a+b} e_{a+b})_{a \in G, b \in G} = \lambda T e(f)^t T e(f).$$

従って S を導入したときの注意より *orthogonal* n -行列 $M e(f)$ があって

$$T e(f) = \sqrt{\lambda} S M e(f)$$

となる。ここに $e(f) \longrightarrow \{M e(f), M_{-e(f)}\}$ なる対応が得られ, 付号をのぞいて $M e(f)$ は一意的である。

$M e(f)$ の性質:

$$(i) \quad e_{-a}(f) = \varepsilon_{e(f)} e_a(f) \quad (a \in G) \text{ とすれば}$$

$${}^t M e(f) = \varepsilon_{e(f)} M e(f), \text{ すなわち } M e(f)^2 = \varepsilon_{e(f)} I,$$

(ii) $e(f), e(g)$ Σ 分桌で $e(f) \circ e(g)$ が定数可能でまた Σ 分桌とする。そのとき, 付号 $M e(f), e(g)$ があって

$$M e(f) M e(g) = M e(f, e(g)) M e(f \circ e(g)),$$

$$M e(f) M e(g) = \varepsilon_{e(f)} \varepsilon_{e(g)} \varepsilon_{e(f) \circ e(g)} M e(g) M e(f).$$

従って Σ 分桌の集合 $\{e(f_\alpha)\}$ が加法 $\circ$ で囲んでいるならば行列の集合 $\{\pm M e(f_\alpha)\}$ は *matrix* の群をつくる。

Δ_n で $(2, \overbrace{\dots}^n, 2)$ -型の加法群 $\hat{\Delta}_n$ でその dual, $\langle g, \hat{g} \rangle$ を pairing $\Delta_n \times \hat{\Delta}_n \rightarrow \{K \text{ の } 1 \text{ の中根の群} \}$ (標数 $\neq 2$).

定理 (標数 $\neq 2$) origin e が 次の仮定をみたすものとする.

(i) $\text{rank}(e_{-a+b} e_{a+b}) = 2^n$

(ii) $\Delta_n \oplus \hat{\Delta}_n$ と同型な 2 分体の群 (0 1 に関する)

$\{e \in (f + \hat{f}) \mid f \in \Delta_n, \hat{f} \in \hat{\Delta}_n\}$ があって行列群 $\{\pm M_{e(f+\hat{f})} \mid f \in \Delta_n, \hat{f} \in \hat{\Delta}_n\}$ の center が ± 1 であると仮定すると S は適当にとつて $\{\pm M_{e(f+\hat{f})}\}$ を次のような Heisenberg group の unitary 表現 $\{U_{f+\hat{f}}\}$ にする: とが出来る.

$$U_{f+\hat{f}} = (u_{g, h}(f+\hat{f}))_{g \in \Delta_n, h \in \Delta_n}$$

$$u_{g, h}(f+\hat{f}) = \langle \hat{f}, g \rangle \delta_{g, h+f}.$$

$$S = (\delta_{a, g})_{a \in G, g \in \Delta_n}, \quad T_x = (t_{a, g}^x)_{a \in G, g \in \Delta_n}$$

$$e_{-a+b} e_{a+b} = \sum_{g \in \Delta_n} \delta_{a, g} \delta_{a, g}$$

$$e_{-a+b}(f+\hat{f}) e_{a+b}(f+\hat{f}) = \sum_{g \in \Delta_n} \langle \hat{f}, g \rangle \delta_{a, g} \delta_{a, g+f}$$

$$\chi_{-a+b} \chi_{a+b} = \sum_{g \in \Delta_n} \langle \hat{f}, g \rangle \delta_{a, g} t_{a, g+f}^x$$

となる。従って 2 分体の群 $\{e(f+\hat{f}) \mid f \in \Delta_n, \hat{f} \in \hat{\Delta}_n\}$ の存在
 $+ \text{rank}(e_{-a+b} e_{a+b}) = 2^n$ と次のような $|G| \times 2^n$ -行列
 S の存在とが同値になる。

$$(i) \quad \text{rank } S = \text{rank } S^+ S = 2^n,$$

$$(ii) \quad \sum_{g, g'} \langle \hat{f}, g+g' \rangle \delta_{-a+b, g} \delta_{a+b, g+f} \delta_{-c+d, g'} \delta_{c+d, g'+f} \\
= \sum_{g, g'} \langle \hat{f}, g+g' \rangle \delta_{-a+d, g} \delta_{a+d, g+f} \delta_{-c+b, g'} \delta_{c+b, g'+f} \\
(a, b, c, d \in G)$$

(i)(ii) をみたす $|G| \times 2^n$ -行列 S よりつくる 2 分体の群を
 $\{e(f+\hat{f}) \mid f \in \Delta_n, \hat{f} \in \hat{\Delta}_n\}$ とする。

$$V_e = \{x \in P_G \mid x \circ e(f+\hat{f}) \ (f \in \Delta_n, \hat{f} \in \hat{\Delta}_n) \text{ は定義可能}\}$$

で定義した *closed subvariety* V_e については

予想 V_e は n -次元のアーベル多様体であって、その加法
 は e に関する結合である。

次のことは証明出来る。

定理 V_e は 0 に関して閉じている。すなわち $(x, y) \\
\longrightarrow x \circ y$ は $V_e \times V_e \longrightarrow V_e$ なる各点で定義可能な有理
 写像である。

これより V_e は group variety であることはわかるが,
 V_e は既約であるかどうか, 次元が n より大でないかどうか
 はわからない.

文 献

- [1] H. Morikawa : On some results on theta
 constants, Nagoya Math. Jour.
 Vol. 37 (to appear)
- [2] D. Mumford : On the equations defining abelian
 varieties I, II, III Invent. Math.
 1. 287-354 (1966), 3, 75-135
 (1967) 3, 215-244 (1967)
- [3] D. Mumford : Lecture note on abelian
 varieties (Tata).