

有限群の不変式と Simple Algebras

阪市大 理 宮田 武彦

最近, simple algebras と rational fields とは Bloch の定理 [] を介して, 関係があることが知られてきた. この動きを, 小さな動きではあるが, 報告したい. §1 ~ §3 は Rosset [28], Formanek [12], [13], Snider [30] の独断的要約である. Endo and Miyata [11] を §4 で抄出し, これを利用して §5 で Snider [30] の計算が成功した理由を推測する. [30] の simple algebras の splitting fields についての結果は少し拡張できるので, 合せて述べる.

§1. ROSSET

k は可換体とする. 有理関数体 $k(t_1, t_2, \dots, t_r)$ の k を含む部分体を k 上 unirational な体 と言う. unirational で有理関数体 (すなわち, rational) ではない拡大体が問題になる. k が閉体でない, 例えば, Galois 群が $C_p \times C_p$ (C_p は位数 p の巡回群) に同

型は拡大体を持つ場合は、簡単に unirational で rational でないものが作れる [6], [31]. k が閉体のときは代数幾何的方法で同様な例の存在は示された [9]. Rosset は [28] で閉体上でも、近年 Amitsur 達が発展させている simple algebras の理論と、 K_2 の性質を利用して、純代数的に non-rational unirational fields が構成できると主張した。

k は以下常に無限体とする。

$X_1, \dots, X_m$ ($m \geq 2$) は $n \times n$ generic matrices, すなわち, $X_s = (x_{ij}^s)$, x_{ij}^s は sn^2 個の k 上にかいに commute する不定元とする。 $X_1, \dots, X_m$ は多項式環 $k[x_{ij}^s]$ 上の $n \times n$ matrices の作る行列環 $M_n(k[x_{ij}^s])$ の元と視る。 $X_1, \dots, X_m$ で生成された部分環を ring of generic matrices と言い, $k[X_1, \dots, X_m]$ と書くことにする。この環は零因子をもたず, 中心元の逆元を附加すると, division ring になる。これを generic division ring と言い, $k(X_1, \dots, X_m)$ または $UD(k, n, m)$ と書く。 $k(X_1, \dots, X_m)$ は中心 F 上次元 n^2 の division ring であり, Brauer 群 $Br(F)$ での位数は n^2 である。また, F は k 上 unirational であることは知られている (generic division rings の一般的性質は Jacobson [16], Procesi [23], Rowen [34] 等の教科書を見てくたさい)。

Rosset は, k は閉体, $\text{char } k \neq n$ であり, $q^3 | n$ とする素数 q が存在するとき, F は k 上 rational でないことを主張した。彼の議論は

次のようである。Bloch [5] によれば,

定理1. (Bloch). 体 k は, $\text{char } k \nmid n$, かつ 1 の原始 n 乗根を含めば, the n th norm residue map

$$R_{n,k} : K_2(k) / {}_n K_2(k) \longrightarrow Br_n(k) = \{ u \in Br(k) \mid u^n = 1 \}$$

が定義できる (Milnor [19]). $t_1, \dots, t_r$ は k 上の t_i が互いに commute する不定元とし,

$$R_{n,k(t_1, \dots, t_r)} : K_2(k(t_1, \dots, t_r)) / {}_n K_2(k(t_1, \dots, t_r)) \longrightarrow Br_n(k(t_1, \dots, t_r))$$

を考える。すると,

$$\ker(R_{n,k}) \cong \ker(R_{n,k(t_1, \dots, t_r)})$$

$$\text{coker}(R_{n,k}) \cong \text{coker}(R_{n,k(t_1, \dots, t_r)}).$$

さて, k は定理1の条件を満たすに閉体とする. $k(X_1, \dots, X_m)$ の中心 F は k 上 rational であると仮定する. Amitsur [2] によれば $k(X_1, \dots, X_m)$ は crossed product ではなく, $R_{n,k}$ の作り方から, $R_{n,k}$ の像は cyclic algebras で生成されるから, " $R_{n,k}$ は surjection ではない." - 一方, $R_{n,k}$ は $Br(k) = \langle 1 \rangle$ から surjection となり Bloch の定理に反する. 従って F は k 上 rational ではない.

この議論には残念ながら gap がある. 一般に, 有限次の斜体 K は crossed product でなくとも, 常に crossed product algebra に similar, すなわち, $M_s(K)$ は crossed product となる整数 s が存在する. 従って, $k(X_1, \dots, X_m)$ は $Im(R_n, F)$ に入るまいとは結論できない.

generic division algebra の重要性の一つは, $k(X_1, \dots, X_m)$ が持つ性質は center 上次元 n^2 の simple algebra で center が k を含むものに遺伝することにある。例えば,

定理 2 (Amitsur). (1). $k(X_1, \dots, X_m)$ は crossed product with group $\Gamma \Rightarrow$ center 上次元 n^2 の simple algebra は center が k を含めば crossed product with group Γ .

(2). $k(X_1, \dots, X_m)$ は cyclic algebras の積に similar $\Rightarrow$ center 上次元 n^2 の simple algebra は center が k を含めば cyclic algebras の積に similar である。

Rosset の議論が成り立つためには, cyclic algebras の積に similar であり simple algebra (center には適当な制限を加えて) の存在を示さなければならぬ。これに関しては何も手掛りはないようである。

逆に, $k(X_1, \dots, X_m)$ の center が k 上 rational のときは, Bloch の定理を利用して, simple algebras につき種々の結果を引き出そうと考えることは自然である。

有理関数体の部分体 $k \subset F \subset k(t_1, \dots, t_r)$ が F 上の不定元 $u_1, \dots, u_p$ を選り $F(u_1, \dots, u_p) = k(t_1, \dots, t_r)$ と書けるとき F は k 上 stably-rational であると言う。

定理 3 (Snider). k は, 代数閉体, 代数体, 有限体上の一変数代数体のどれかで, $\text{char } k \nmid n$ であり, 1 の原始 n 乗根を含むとす

る. $k(X_1, \dots, X_m)$ の center は k 上 stably-rational とすると, center 上次元 n^2 の simple algebra は center が k を含めば, cyclic algebras の積に similar である.

Bloch の定理を二度使うと $k(X_1, \dots, X_m)$ は必要な性質を持つことがわかり, specialisation により定理は言える. k に關する条件は, $R_{n,k}: K_2(k)/nK_2(k) \longrightarrow Br_n(k)$ が surjection であることを保証している.

k が定理 3 の条件を満たしているとき, $k(X_1, \dots, X_m)$ の center が常に k 上 stably-rational ならば, simple algebras は, 中心が k を含めさえすれば, abelian splitting field を持つことになる. これは信じ難い.

§2. FORMANEK

$D = UD(k, n, m) = k(X_1, \dots, X_m)$ は generic division ring, D の center を F とする. $D_2 = k(X_1, X_2) \subset D$ とする. D_2 の center F_2 は F の部分体であり, Procesi に依れば F は F_2 上に次元 $(m-2)n^2$ の有理関数体である[22]. F_2 が k 上 rational なら, F もそうである. しかし, F_2 が non-rational でも F が k 上 non-rational とは結論できない.

D_2, F_2 を考えよう. $D_2 = k(X_1, X_2) \subseteq M_n(k(x_{ij}^1, x_{ij}^2))$ である. K は $k(x_{ij}^1, x_{ij}^2)$ の代数閉包とする. $k(x_{ij}^1)$ の代数閉包 K_1 は K

の部分体とみなせる。 $M_n(K_1)$ の元 T を選んで TX_1T^{-1} を対角行列にできる。 TX_1T^{-1} の対角元と TX_2T^{-1} の entries は k 上に代数的独立である。この § では次の notations を使う。

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

ここで $x_1, \dots, x_n, y_{11}, \dots, y_{nn}$ は k 上 commute する不定元,

$$L = k(x_1, \dots, x_n, y_{11}, \dots, y_{nn})$$

$$R = k[X, Y]$$

$$D = k(X, Y)$$

$$F = \text{center of } D.$$

写像 $X_1 \rightarrow X, X_2 \rightarrow Y$ は、明らかに $R_2 = k[X_1, X_2], D_2 = k(X_1, X_2), F_2 = \text{center of } D_2$ から、それぞれ、 R, D, F の上への同型になっている。

さて、 $D^* = D - \{0\}$ の $x_1, \dots, x_n, y_{11}, \dots, y_{nn}$ で生成された multiplicative subgroup を

$$B = \langle x_1, \dots, x_n, y_{11}, \dots, y_{nn} \rangle$$

と置く。これは free abelian group である。 n 文字の対称群 S_n を

$$\sigma x_i = x_{\sigma(i)}, \quad \sigma(y_{ij}) = y_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

で作用させる。 rank n の free abelian group $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ は S_n を $\sigma u_i = u_{\sigma(i)}$ で作用させたものと、 S_n が trivial に作

用いる rank 1 の free abelian group $V = \langle v \rangle$ を用意する.

S_n -準同型 α, β を次のように定義する:

$$\alpha: B \longrightarrow U; \quad \alpha(x_i) = 1, \quad \alpha(y_{ij}) = u_i u_j^{-1},$$

$$\beta: U \longrightarrow V; \quad \beta(u_i) = v.$$

$A = \ker(\alpha)$ とおく.

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} U \xrightarrow{\beta} V \longrightarrow 1$$

は S_n -modules の完全列である. A は rank n^2+1 の free abelian group であり, A で生成された $\mathbb{Z}$ の部分体 $k(A)$ は, k 上次元 n^2+1 の有理体である. A は $x_1, \dots, x_n$ と,

$$y_{i_1 i_2} y_{i_2 i_3} \cdots y_{i_r i_1} \quad (r \geq 1)$$

なる形の元で生成されている. S_n は A に作用するから, $k(A)$ にも k -同型として作用する.

定理 1 (Formanek). $F (= \text{center of } D) = k(A)^{S_n}$. 但し, $n \leq 4$.

$n=2$ のときは Procesi が F は k 上 rational であることを示した [22]. $n=3, 4$ の場合は Formanek が計算により同様のことを示した [12], [13]. $n=3$ の時は, S_3 は dihedral group だから計算は簡単である (§5 も参照). $n=4$ の時は, 抽象代数が生れる以前の代数を思はせるような, 実に巧妙な計算で証明されている. S_4 が多くの normal subgroups を含む事実を full に利用しているので, とうてい S_5 ($n=5$) の場合には計算は拡張できない. 一般的意見では $n \geq 5$ の場合は, F は rational でない

であろうと予想されている。

以下で、これらの結果を $n \times n$ matrices の不変式の言葉に翻訳しよう。

関数 $\phi: [M_n(k)]^m \rightarrow k$ が、 k 上の $n \times n$ matrices m 組の組の polynomial invariant とは、

(1) $\phi(A_1, \dots, A_m)$ は $A_1, \dots, A_m$ の entries の多項式、

(2) 任意の $P \in GL(n, k)$ に対して、

$$\phi(PA_1P^{-1}, \dots, PA_mP^{-1}) = \phi(A_1, \dots, A_m)$$

を満たすことである。 ϕ が $A_1, \dots, A_m$ の entries の有理関数であれば、 ϕ は m 組の rational invariant と呼ばれる。 rational invariant は polynomial invariants の商に書ける。

ring of generic matrices $k[X_1, \dots, X_m]$ の central element は $a \cdot I$ (a は $X_1, \dots, X_m$ の entries の多項式、 I は単位行列) と書け、 a は m 組の polynomial invariant に書けている。 $a \cdot I$ は a と同一視することにする。 $\text{char } k = 0$ のときは m 組の rational invariants 全体は $k(X_1, \dots, X_m)$ の中心と一致することが知られている。この事実は最近 M. Artin により予想され、Procesi [24], Razmylov [27] で独立に証明された。

定理 3 (Formanek). $\text{char } k = 0$ とする。 $n \leq 4$ なら、 m 組の matrices の rational invariants の作る体は k 上有理関数体である。

§3. SNIDER

generic division ring は simple algebras の種々の性質の“視覚”に
 により得るが,このような division ring は,他の構成法もある.

G は有限群とし, G の free presentation

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

を考える. ここで, F は有限生成 free group である. R の
 commutator を R' とすると, $\bar{R} = R/R'$ は finite rank の free
 abelian group であり, $\bar{F} = F/R'$ は torsion group となり,

$$1 \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow \bar{F} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

は exact である. $\bar{R}$ は G の relation module と呼ばれ,
 Gruenberg 等により研究されている. これに関して我々に必
 要な事実は後に述べる命題4のみである.

k は体とする. torsion free group Γ の group ring $k[\Gamma]$
 は零因子を持たないと予想されているが, まだ一般には証明さ
 れていない. しかし, 上の $\bar{F}$ は abelian by finite だから,
 $k[\bar{F}]$ は零因子を持たないことが知られている[35]. $k[\bar{F}]$
 は中心上有限生成であり, 中心元の逆元を附加すると, division
 ring になる. これを $Qk[\bar{F}]$ と書くことにする.

$B = (K, G, f)$ は crossed product with group G で, B の中
 心は K を含むとする. すなわち, G は K に k -同型として作用
 (忠実とはかぎらない) しており, f は K^* に値をもつ G の

2-cocycle とする. $g \in G$ に対し, B の元 X_g が対応してあり,

$$B = \sum K X_g, \quad \{X_g\} \text{ は } K \text{ 上一次独立,}$$

$$X_g^{-1} t X_g = t^g, \quad t \in K,$$

$$X_g X_h = f(g, h) X_{gh}$$

となるものである. このとき K^* と $X_g (g \in G)$ で生成される

multiplicative subgroup を E とすると,

$$1 \longrightarrow K^* \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

は exact である ($E \longrightarrow G$ は $X_g \longrightarrow g$ で定義する). F は free group であるから,

$$1 \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow \bar{F} \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

$$\downarrow \phi \quad \parallel$$

$$1 \longrightarrow K^* \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

が可換図型となる準同型 $\phi: \bar{F} \longrightarrow E$ が存在する. 従って, ϕ は一意的に準同型 $\phi: k[\bar{F}] \longrightarrow B$ に拡張できる. このことは後に述べる定理 1 の証明に重要な働きをする.

$Qk[\bar{F}]$ は crossed product with group G になっているので, generic crossed product with group G と言う. G が cyclic であれば, G は $\bar{R}$ に忠実に作用する. 今後は, G は cyclic group ではないとする. このとき, $Qk[\bar{F}]$ は $Qk[\bar{R}]$ を極大可換体として含み, $Qk[\bar{R}]^G$ は $Qk[\bar{F}]$ の中心になる.

遺伝性に関しては, 次の定理がある.

定理1 (Snider). generic crossed product $\mathbb{Q}k[F]$ with group G が cyclic algebras の積に similar ならば, crossed product algebra with group G で中心が k を含むものは, cyclic algebras の積に similar である.

この定理と Bloch の定理を組み合わせると,

定理2 (Snider). k は代数閉体, 代数体, または有限体上の一次変数関数体とする. $n = |G|$ としたとき, $\text{char } k \nmid n$, かつ 1 の原始 n 乗根を含むとする. $\mathbb{Q}k[\bar{R}]^G$, すなわち, $\mathbb{Q}k[F]$ の中心が k 上 stably-rational ならば, crossed product algebra with group G は中心が k を含む cyclic algebras の積に similar である.

Snider は計算により, $\text{char } k \nmid n$ ($n = |G|$) の条件のもとに, $G = C_2 \times C_2$, D_m (m は odd) のとき, $\mathbb{Q}k[\bar{R}]^G$ は k 上 rational であることを示した.

Albert [1] によれば ([26] も参照), 中心上 16 次元の division algebra は Galois 群が $C_2 \times C_2$ となる maximal subfield を含むから,

定理3 (Snider). D は中心上 16 次元の division ring とする. D の標数は 2 でなく, 中心が $\sqrt[4]{1}$ を含めば, D は cyclic algebras の積に similar である.

この定理は Formanek の結果 (§2 の定理 1) から也得られる.

$\bar{R}$ の G -加群としての構造を知るには Schreier system を利用する方法があるが ([30] を参照), ここでは別の見方をする. $\mathbb{Z}G$ の augmentation ideal を I とする;

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

は exact. これに $I \otimes_{\mathbb{Z}} I$ を作用させると,

$$0 \rightarrow I \otimes_{\mathbb{Z}} I \rightarrow I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \rightarrow I \rightarrow 0$$

は exact であり, $I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G$ は $\mathbb{Z}G$ -free module である.

命題 4 [14]. 適当な整数 s, t が存在して,

$$\bar{R} \oplus \mathbb{Z}G^s \cong (I \otimes_{\mathbb{Z}} I) \oplus \mathbb{Z}G^t.$$

G の任意の部分群 H に対して, $H^1(H, I \otimes_{\mathbb{Z}} I) = 0$ には, 注意することにする.

§4. ENDO and MIYATA

§3, 4 によれば, 次の問題を考えねばならない:

G は有限群, M は $\mathbb{Z}G$ -lattice, すなわち, 有限生成かつ torsion free な $\mathbb{Z}G$ -module. k は可換体とすると, $\mathbb{Q}k[M]^G$ は k 上 rational か. 弱くして, k 上 stably-rational か.

§4 の結果によると, $M = I \otimes_{\mathbb{Z}} I$ (I は $\mathbb{Z}G$ の augmentation ideal) の場合が特に重要である. まず次の定理に注意する. finite G -set S を abel 化したもの, すなわち, S を基とする free abel 群に G の作用を linearity で拡張したものを $\mathbb{Z}S$ と書く. $\mathbb{Z}S$ に

同型は $\mathbb{Z}G$ -lattice を permutation ($\mathbb{Z}G$ -) module と呼ぶことにする.

定理 1 (Swan). G は有限群, M は $\mathbb{Z}G$ -lattice とする. G が体 L に忠実に作用しているとき, 次の同値である.

- (1) $\mathbb{Q}L[M]^G$ は L^G 上 stably rational,
- (2) $0 \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}T \rightarrow 0$ exact

とれる (finite) G -sets S, T が存在する.

証明は [31], [10], [32] 等を見よ.

Swan は定理 1 を使って, $G = C_{47}$ (位数 47 の cyclic group) のとき, $k = \mathbb{Q}$ なら $\mathbb{Q}k[M]^G$ は $\mathbb{Q}$ 上 non-rational であることを示している [31].

定理 1 の (2) $\Rightarrow$ (1) の証明は, 互に別々の状況にも有用な Hilbert の定理 90 の言い換えがある.

定理 2 (Hilbert). G, L は定理 1 と同じとする. L 上の有理函数体 $K = L(t_1, \dots, t_\ell)$ に G が,

$$g(t_i) = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}(g) t_j, \quad a_{ij}(g) \in L, \quad 0 < i \leq \ell,$$

で作用しているとする. すると, K^G は L^G 上 rational である.

Endo and Miyata [11] に従って $\mathbb{Z}G$ -lattices の分類論を少々述べる ([8], [33] も参照).

$\mathbb{Z}G$ -lattices の同型類に direct products で和を入れた

semi-group を $T'(G)$ とする. $T'(G)$ に同値関係 $M \equiv N$ を完全列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{Z}T \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (S, T \text{ は } G\text{-sets})$$

の存在で定義して,

$$T(G) = T'(G) / (\equiv)$$

と置く. $[M]$ が $T(G)$ の零元になる必要十分条件は完全列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow \mathbb{Z}T \longrightarrow 0 \quad (S, T \text{ は } G\text{-sets})$$

の存在である.

三が実際同値関係になることは定理1で保証されるが, 初等的に証明するには, 次の二つの命題が基本的である. また, これは分類論一般にも重要な働きをする.

命題3. M は任意の $\mathbb{Z}G$ -lattice とする. 次の完全列が存在する.

$$(1) \quad 0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$S \text{ は } G\text{-set, } H^1(H, L) = 0 \text{ for } \forall H \leq G.$$

$$(2) \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow L' \longrightarrow \mathbb{Z}T \longrightarrow 0$$

$$T \text{ は } G\text{-set. } H^1(H, L') = 0 \text{ for } \forall H \leq G.$$

命題4. M は $H^1(H, M) = 0$ for $\forall H \leq G$ を満たし, L は permutation module の直和因子とすると,

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(L, M) = 0.$$

命題3によれば, $T(G)$ の各元は $H^1(H, M) = 0$ for $\forall H \leq G$ を

満たす $\mathbb{Z}G$ -lattice M で代表されている.

$\mathbb{Z}G$ -lattice M に対し, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ には自然に $\mathbb{Z}G$ -lattice の構造が入る. これを M の dual と言い M^* と書く. $(\mathbb{Z}S)^* \cong \mathbb{Z}S$ である.

定理 5 (1). $T(G) : \text{group} \iff G$ の各 Sylow 群は巡回群

$$\iff [I^*] \text{ は } T(G) \text{ で逆元をもつ}$$

$$\iff [I \otimes_{\mathbb{Z}} I] \text{ は } T(G) \text{ で逆元をもつ.}$$

($T(G)$ が群になる場合は $[I \otimes_{\mathbb{Z}} I^*] = -[I^*]$ である).

(2) $T(G)$ は有限群 $\iff [I^*] = 0$, すなわち, 完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}T \rightarrow I \rightarrow 0 \quad (S, T \text{ は } G\text{-sets})$$

が存在する.

$$\iff [I \otimes_{\mathbb{Z}} I] = 0, \text{ すなわち,}$$

$$(I \otimes_{\mathbb{Z}} I) \oplus \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}T$$

となる G -sets S, T が存在する.

定理 5' $T(G)$ は有限群とする.

$$(1) \quad G = \langle s, t \mid s^m = t^{2^n} = 1, m \text{ odd}, t^{-1}st = s^r, r^2 \equiv 1 \pmod{m} \rangle$$

(2) $m \in \mathbb{Z}G$ の $\mathbb{Q}G$ での maximal order とすると,

$$\text{cl}(m) \cong T(G).$$

注意: G は任意の有限群とする. 自然同型 $\text{cl}(\mathbb{Z}G) \rightarrow T(G)$

は,

$$\begin{array}{ccc} \text{cl}(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & T(G) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \text{cl}(m) & \end{array} \quad \text{と分解している.}$$

22で, $cl(\mathbb{Z}G)$, $cl(\mathcal{M})$ はそれぞれ, $\mathbb{Z}G$, $\mathcal{M}$ の *locally free class group* である.

定理5'によれば, $T(S_3) = 0$ が得られる. 定理1と対称式の基本定理により, M を任意の $\mathbb{Z}S_3$ -lattice とすると, $\mathbb{Q}k[M]^{S_3}$ は任意の体 k 上で *stably rational* であることが判る.

定理6 (1) $H^1(H, M) = H^{-1}(H, M) = 0$ for $\forall H \leq G$ を満たす $\mathbb{Z}G$ -lattice M は permutation module の直和因子である.

(2) G の 2-Sylow 群は dihedral group ($C_2 \times C_2$ も含む) または巡回群. odd prime p に対しては, p -Sylow 群は巡回群.

(3) $[(I \otimes_{\mathbb{Z}} I)^*]$ は $T(G)$ で逆元をもつ.

以上の条件 (1), (2), (3) は同値である.

2, 3 の群につき $T(G)$ は計算されている.

(A) $G = C_2 \times C_2$: $T(G) = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. 生成元は $[I^*]$ である ($[7]$, $[17]$, $[]$ ではもっと一般の結果が示されているが, $T(G)$ の計算だけなら, もっと簡単は方法がある).

(B) $G = D_4$, 位数 8 の dihedral group : $T(G) \cong \mathbb{Z}_+^{11}$.

(C) G は位数 8 の quaternion group : $T(G) \cong \mathbb{Z}_+^6$.

(D). $G = C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_4$, $C_p \times C_p$ (p は odd prime) のときは $T(G)$ は有限生成ではない.

(B), (C), (D) については Cistov $[7]$ を参照. (D) から判るように, ほとんどの場合 $T(G)$ は有限生成ではない.

§5. 計算

$$(1) \quad G = \langle s, t \mid s^m = t^{2^n} = 1, m = \text{odd}, t^{-1}st = s^r, r^2 \equiv 1 \pmod{m} \rangle$$

$$M = I \otimes_{\mathbb{Z}} I$$

k は $\text{char } k \nmid |G|$ で, 1 の $|G|$ -乗根を含むとする.

$Qk[M]^G$ は k 上 stably rational であることを示そう.

§4の結果によれば完全列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}S \longrightarrow \mathbb{Z}T \longrightarrow 0 \quad (S, T: G\text{-sets})$$

が存在する. 実際, この sequence は split して $M \oplus \mathbb{Z}T \cong \mathbb{Z}S$ となっている. §4の定理1, 2に依れば, G の faithful は k 上の表現空間 V で $k(V)^G$ (V の symmetric tensor algebra を $k[V]$, $k[V]$ の商体を $k(V)$ とする) が k 上 stably rational となるものの存在を示せば, $Qk[M]^G$ は stably rational となる.

V の construction: $\langle s \rangle$ を k に $s \cdot 1 = s_m \cdot 1$ (s_m は 1 の原始 m 乗根) で作用させ, $V_0 = k[\frac{G}{\langle t^{2^n} \rangle}] \otimes_{k\langle s \rangle} k$ を kG -module とする. $\langle t \rangle$ を k に $t \cdot 1 = s_{2^n} \cdot 1$ で作用させて, $V_1 = k$ を $G \rightarrow \frac{G}{\langle s \rangle} = \langle t \rangle$ を通して G の表現とみる. $V = V_0 \oplus V_1$ とおく
と必要なる条件

を満足していることが判る.

$$(2) \quad G = C_2 \times C_2 = \langle \alpha \rangle \times \langle \beta \rangle.$$

$\pi(G) = \mathbb{Z}_2$ であり $[I^*]$ が生成元. $H^{-1}(G, I \otimes_{\mathbb{Z}} I) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を利用すると, $[I \otimes_{\mathbb{Z}} I] = [I^*]$. k は $\text{char } k \neq 2$ なる体とする. $\mathbb{Q}_k[I \otimes_{\mathbb{Z}} I]^G$ が stably rational を言うためには, $\mathbb{Q}_k[I^*]^G$ がそうであることを示せばよい (実は k 上 rational).

1, α , β に対応する不定元を t_1, t_2, t_3 とする,

$$\begin{aligned} \alpha(t_1) &= t_2 & \beta(t_1) &= t_3 \\ \alpha(t_2) &= t_1 & \beta(t_2) &= \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \\ \alpha(t_3) &= \frac{1}{t_1 t_2 t_3} & \beta(t_3) &= t_1 \end{aligned}$$

このとき $k(t_1, t_2, t_3)^G$ を計算する.

$$u_1 = t_1 t_3, \quad u_2 = t_2 t_3 \quad \text{とおくと,}$$

$$\begin{aligned} \alpha(u_1) &= \frac{1}{u_1} & \beta(u_1) &= u_1 \\ \alpha(u_2) &= \frac{1}{u_2} & \beta(u_2) &= \frac{1}{u_2} \\ \alpha(t_3) &= \frac{t_3}{u_1 u_2} & \beta(t_3) &= \frac{u_3}{t_3} \end{aligned}$$

$$v = (1 + u_1)^{-1} (1 + u_2)^{-1} t_3 \quad \text{とおくと,}$$

$$\alpha(v) = u_1 u_2 (1 + u_1)^{-1} (1 + u_2)^{-1} \cdot \frac{t_3}{u_1 u_2} = v$$

$$\beta(v) = \frac{u_1 u_2}{(1 + u_1)^2 (1 + u_2)^2} \cdot \frac{1}{v}.$$

$\mathbb{Q}k[I^*] = k(t_1, t_2, t_3) = k(u_1, u_2, v)$ に注意する。

$$k(u_1, u_2)^{\langle \alpha \rangle} = k\left(\left(\frac{1-u_1}{1+u_1}\right)^2, \left(\frac{1-u_1}{1+u_1}\right) \cdot \left(\frac{1-u_2}{1+u_2}\right)\right).$$

$$X = \left(\frac{1-u_1}{1+u_1}\right)^2, \quad Y = \left(\frac{1-u_1}{1+u_1}\right) \left(\frac{1-u_2}{1+u_2}\right) \text{ とおく.}$$

$$\beta(X) = X, \quad \beta(Y) = -Y \text{ である.}$$

$$Z = 1 + \frac{Y}{X} \text{ とおく,}$$

$$\alpha(Z) = Z, \quad \beta(Z)Z = 1 - \frac{Y^2}{X^2} = \frac{u_2}{(1+u_2)^2} \text{ である,}$$

$$w = Z^{-1}v \text{ とおくと,}$$

$$\alpha(w) = w, \quad \beta(w) = \frac{u_1}{2(1+u_1)^2} \cdot \frac{1}{w} = \frac{1}{4}(1-X) \cdot \frac{1}{w}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \mathbb{Q}k[I^*]^G &= k(u_1, u_2, w)^{\langle \alpha \rangle \times \langle \beta \rangle} \\ &= k(X, Y, w)^{\langle \beta \rangle} \\ &= \{ k(X, w)(Y) \}^{\langle \beta \rangle} \end{aligned}$$

$$\gamma = w - \frac{1}{4}(1-X) \cdot \frac{1}{w} \text{ とおくと, } \beta(\gamma) = -\gamma \text{ である,}$$

γY は $\langle \beta \rangle$ -invariant. 従って,

$$\mathbb{Q}k[I^*]^G = k\left(X, w + \frac{1}{4}(1-X) \cdot \frac{1}{w}, \gamma Y\right)$$

$\mathbb{Q}k[I^*]^G$ は k 上 rational である。

注意1: $\mathbb{Q}k[I^* \oplus I^*]^G$ は rational であることが知られている。

注意2: crossed product algebra with group G で, G は非可換 simple group とする。このとき algebra は cyclic

algebras の積に similar となるものは知られていない
 である。

REFERENCES

- [1] A.A. ALBERT : Structure of algebra, AMS. Colloq. Pub. 24
- [2] S.A. AMITSUR : On central division algebras, Israel J. Math. 12(1972),
 408 - 420
- [3] _____ : The generic division rings, Ibid. 18(1978), 241 - 247
- [4] _____ and D.SALTMAN : Generic abelian crossed products and
 p-algebras, JJ. Algebra 51(1978), 76 - 87
- [5] S. BLOCH : Torsion algebraic cycles, K_2 and Brauer groups of function
 fields, Bull. AMS. 80(1974), 941 - 945
- [6] C. CHEVALLEY : On algebraic group varieties, J. Math. Soc. Japan 6(1954),
 303 - 324
- [7] A.L. CISTOV : On the number of generators of a semigroup of classes of
 algebraic tori relative to stable equivalence, Soviet Math. Dokl.
 19(1978), 1267 - 1270
- [8] J.J. COLLIOT-THELENE et J.J. SANSUC : La equivalence sur les tores, Ann.
 Sci. Ec. Norm. Sup. 10(1977), 175 - 230
- [9] P. DELIGNE : Varietes unirationnelles non rationnelles, Seminaire
 Bourbaki, Expose 402, in LNM. 317(1973)
- [10] S.ENDO and T. MIYATA : Invariants of finite abelian groups, J. Math.
 Soc. Japan 25(1973), 7 - 26
- [11] _____ : On a classification of the function fields of
 algebraic tori, Nagoya Math. J. 56(1974), 85 - 104
- [12] E. FORMANEK : The center of the ring of 3×3 generic matrices, Lin. Mult.
 Alg. 7(1979), 203 - 212

- [13] _____ : The center of 4×4 generic matrices, J. Algebra 62(1980), 304 - 319
- [14] K.W. GRUENBERG : Relation modules of finite matrices, CBMS series 25(1976)
- [15] I.N. HERSTEIN : Notes from a ring conference, Ibid. 9 (1971)
- [16] N.JACOBSON : PI-algebras, an introduction, LNM 441(1975)
- [17] D.E. Kunjavokii : On tori with a biquadratic splitting field, Math. USSR. Izv. 12(1978), 536 - 542
- [18] H.W. LENSTRA, JR. : Rational functions invariant under a finite abelian group, Inv. Math. 25(1974), 299 - 325
- [19] J. MILNOR : Introduction to algebraic K-theory, Ann. Math. Studies 72(1971)
- [20] 宮田武彦:有限群の整数表現とコホモロジー.マセマティクス7
- [21] _____ : Invariants of certain groups, Nagoya Math. J. 41(1971), 69 - 73
- [22] C. PROCESI : Noncommutative affine rings, Atti Accad. Naz. Lincei 8(1967) 239-255
- [23] _____ : Rings with polynomial identities, Marcel Dekker, 1973
- [24] _____ : The invariant theory of $n \times n$ matrices, Adv. in Math. 19 (1977), 306 - 381
- [25] _____ : Trace identities and standard diagrams, in Ring Theory, Proc. of the 1978 Antwerp Conference, Marcel Dekker, 1980
- [26] M.L. RACINE : A simple proof of a theorem of Albert, Proc. AMS 43 (1974), 487 - 488
- [27] Ju.P. RAZMYLOV : Trace identities of full matrix algebra over a field of char. zero, Izv. Akad. Nauk USSR 8(1974), 727 - 760
- [28] S. ROSSET : Generic matrices, K_2 , and unirational fields, Bull. AMS. 81(1975), 707 - 708
- [29] _____ : Abelian splitting fields of division algebras of prime degree, Comment. Math. Helvetici 59(1977), 519 - 523

- [30] L. SNIDER : Is the Brauer group generated by cyclic algebras ? in Ring Theory, Waterloo, 1978, 279 - 301, LNM 734 (1979)
- [31] R.G. SWAN : Invariant rational functions and a problem of Steenrod, Inv. Math. 7(1969), 148 - 158
- [32] V.E. VOSKRESENSKII : Fields invariants of abelian groups, Russian Math. Surveys 28(1973), 79 - 105
- [33] _____ : Birational properties of linear algebraic groups, Math. USSR-Izv. 4(1970), 1 - 17
- [34] L.H. ROWEN : Polynomial identities in ring theory, Academic Press, 1980