

Intertwining operators の間の spectrum の関係について

東北大 教養 吉野 崇 (Takashi Yoshino)

X 及び Y を、2つの複素バナッハ空間とする。 X から Y への有界線形作用素の全体を $B(X, Y)$ で表わす。特に $X = Y$ の場合は、 $B(X)$ で表わす。 $A \in B(X)$ 及び $B \in B(Y)$ に対して、 $C \in B(X, Y)$ が、 $CA = BC$ をみたす時、 C intertwines A and B と云う。特に C が、injective で、dense range を持つようにとれる時は、 A は、a quasi-affine transform of B であるとい、 $A \prec B$ で表わす。 $A \prec B$ 且 $B \prec A$ である時は、 A と B とは、quasi-similar であるとい。 C が invertible にとれる時は、 A と B とは、similar であるとい。 similar な作用素の間の spectrum の関係及び quasi-similar な作用素の間の spectrum の関係については、多くの研究結果が知られているが、ここでは、intertwining な作用素の間の spectral manifolds の関係を調べ、その応用として、spectrum の関係について、報告する。

§ 1. 準備

$A \in B(X)$ が a spectral operator であるとは、 A と可換で、 $\sigma(A|E(\sigma)X) \subset \bar{\sigma}$ for all Borel sets σ なる性質を持つ a spectral measure $E(\cdot)$ が存在する場合である。ここで、 $\sigma(T)$ は作用素 T の spectrum を表わす。この spectral operators の概念は、Foias [3] によって、以下に述べる decomposable operators へと一般化される。 $A \in B(X)$ に対して、

$$\sigma_p^0(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}; (z-A)f(z) \equiv 0 \text{ for some non-zero analytic}$$

function $f: D_r(\lambda) \rightarrow X \}$ とする。但し、

$D_r(\lambda) = \{ z \in \mathbb{C}; |z-\lambda| < r \}$ である。 $\sigma_p^0(A) = \emptyset$ なる場合に、 A は、the single-valued extension property を持つと云う。 $A \in B(X)$ 及び、a closed set $\sigma \subset \mathbb{C}$ に対して、

$$X_A(\sigma) = \{ x \in X; (z-A)f(z) \equiv x \text{ for some analytic}$$

function $f: \mathbb{C} \setminus \sigma \rightarrow X \}$ とし、任意の $\sigma \subset \mathbb{C}$ に

対しては、 $X_A(\sigma) = \bigcup \{ X_A(\tau); \tau \subset \sigma \text{ and } \tau \text{ is closed} \}$ とする。集合 $X_A(\sigma)$ は the spectral manifold of A と云う。 $X_A(\sigma)$ が A の an invariant linear manifold になることや、 $\sigma_1 \subset \sigma_2$ ならば、 $X_A(\sigma_1) \subset X_A(\sigma_2)$ なることが知られてゐる。又、 $X_A(\sigma) = X_A(\sigma \cap \sigma(A))$, $X_A(\sigma(A)) = X$ 及び $X_A(\emptyset) = \{0\}$ なることも容易にわかる。

Proposition. ([9]) If $X_A(\sigma)$ is closed, then

$$\sigma(A|X_A(\sigma)) \subset \sigma \cup \overline{\sigma_p^0(A)}.$$

$A \in B(X)$ が "Dunford's closure condition" をみたすとは、任意の closed set $\sigma \subset \mathbb{C}$ に對して、 $X_A(\sigma)$ が closed なる時である。この時には、 A は、the single-valued extension property を持つことが知られている。 $A \in B(X)$ の不変部分空間 Z が、a spectral maximal space であるとは、 A の、 $\sigma(A|Z') \subset \sigma(A|Z)$ なる任意の不変部分空間 Z' に對して、 $Z' \subset Z$ なる時である。 $A \in B(X)$ が decomposable であるとは、 $\sigma(A)$ の任意の open covering $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ に對して、 A の spectral maximal spaces の系 $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ が存在して、 $X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ 且 $\sigma(A|Z_j) \subset G_j$ for every $j = 1, 2, \dots, n$ なる時である。

§ 2. 主な結果.

Lemma. If $C \in B(X, Y)$ intertwines $A \in B(X)$ and $B \in B(Y)$, then

$CX_A(\sigma) \subset X_B(\sigma)$ for an arbitrary set $\sigma \subset \mathbb{C}$. In particular

$$CX \subset X_B(\sigma(A)).$$

Proof. If $x \in X_A(\sigma)$, then $x \in X_A(\tau)$ for some closed set $\tau \subset \sigma$ and $(z-A)f(z) \equiv x$ for some analytic function $f: \mathbb{C} \setminus \tau \rightarrow X$. Since $Cx \equiv C(z-A)f(z) = (z-B)Cf(z)$ and since $Cf(z): \mathbb{C} \setminus \tau \rightarrow Y$ is analytic, $Cx \in X_B(\tau) \subset X_B(\sigma)$ and hence $CX_A(\sigma) \subset X_B(\sigma)$. And the rest follows by $X_A(\sigma(A)) = X$.

Theorem 1. (Radjavi-Rosenthal [5]) If $C \in B(X, Y)$ intertwines spectral operators $A \in B(X)$ and $B \in B(Y)$ with spectral measures $E(\cdot)$ and $F(\cdot)$ respectively, then C intertwines $E(\sigma)$ and $F(\sigma)$ for every Borel set σ .

Proof. Since $X_A(\sigma) = E(\sigma)X$ and $X_B(\sigma) = F(\sigma)Y$ for every closed set $\sigma \subset \mathbb{C}$ by [1; Theorem 4], $CE(\sigma)X \subset F(\sigma)Y$ by Lemma and hence $F(\sigma)CE(\sigma) = CE(\sigma)$ and $F(\mathbb{C} \setminus \sigma)CE(\sigma) = 0$ because $F(\sigma)CE(\sigma)x = CE(\sigma)x$ for all $x \in X$ and $F(\mathbb{C} \setminus \sigma)CE(\sigma)X \subset F(\mathbb{C} \setminus \sigma)F(\sigma)Y = F([\mathbb{C} \setminus \sigma] \cap \sigma)Y = F(\emptyset)Y = \{0\}$. By regularity of $E(\cdot)$ and $F(\cdot)$, $F(\sigma)CE(\sigma) = CE(\sigma)$ and $F(\mathbb{C} \setminus \sigma)CE(\sigma) = 0$ for every Borel set σ . And hence $F(\sigma)C = F(\sigma)C[E(\sigma) + E(\mathbb{C} \setminus \sigma)] = F(\sigma)CE(\sigma) + F(\sigma)CE(\mathbb{C} \setminus \sigma) = F(\sigma)CE(\sigma) = CE(\sigma)$.

Theorem 2. (Rosenblum [6]) If $C \in B(X, Y)$ intertwines $A \in B(X)$ and $B \in B(Y)$ and if $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, then $C = 0$.

Proof. Since $CX \subset X_B(\sigma(A)) = X_B(\sigma(A) \cap \sigma(B)) = X_B(\emptyset) = \{0\}$ by Lemma, $CX = \{0\}$ and hence $C = 0$.

Theorem 3. (Fong [4], Stampfli [7], Williams [8]) If $C \in B(X, Y)$ intertwines $A \in B(X)$ and $B \in B(Y)$ and has dense range

and if B satisfies the Dunford's closure condition, then $\sigma(B) \subset \sigma(A)$.

Proof. Since $\sigma_p^o(B) = \emptyset$ and since $X_B(\sigma(A))$ is closed by the assumption, $Y = \overline{CX} \subset X_B(\sigma(A)) \subset Y$ by Lemma and hence $Y = X_B(\sigma(A))$. Therefore $\sigma(B) = \sigma(B|Y) = \sigma(B|X_B(\sigma(A))) \subset \sigma(A) \cup \overline{\sigma_p^o(B)} = \sigma(A)$ by Proposition.

Theorem 4. (Fialkow [2]) If $C \in B(X, Y)$ intertwines $A \in B(X)$ and $B \in B(Y)$ and is injective and if A is decomposable, then $\sigma(A) \subset \sigma(B)$.

Proof. If $\lambda \notin \sigma(B)$, then there exists an open ball $D_r(\lambda)$ such that $D_r(\lambda) \cap \sigma(B) = \emptyset$, and then $CX_A(D_r(\lambda)) \subset X_B(D_r(\lambda)) = X_B(D_r(\lambda) \cap \sigma(B)) = X_B(\emptyset) = \{0\}$ by Lemma and hence $X_A(D_r(\lambda)) = X_A(D_r(\lambda) \cap \sigma(A)) = \{0\}$ because C is injective. If $D_r(\lambda) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$, then there exists r' such that $0 < r' < r$ and $D_{r'}(\lambda) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$. Since $D_r(\lambda)$ and $\mathbb{C} \setminus \overline{D_{r'}(\lambda)}$ are open covering of $\sigma(A)$ and since A is decomposable by the assumption, A satisfies the Dunford's closure condition and $X = X_A(D_r(\lambda)) + X_A(\mathbb{C} \setminus \overline{D_{r'}(\lambda)}) \subset X_A(D_r(\lambda)) + X_A(\mathbb{C} \setminus D_{r'}(\lambda)) \subset X$ (see [9]). And since $\sigma(A|X_A(\mathbb{C} \setminus D_{r'}(\lambda))) \subset [\mathbb{C} \setminus D_{r'}(\lambda)] \cap \sigma(A) = \sigma(A) \setminus D_{r'}(\lambda) \subsetneq \sigma(A)$ by Proposition,

$X_A(\mathbb{C} \setminus D_F(\lambda)) \neq X$ and hence $X_A(D_F(\lambda)) \neq \{0\}$. This contradicts with $X_A(D_F(\lambda)) = \{0\}$. Therefore $D_F(\lambda) \cap \sigma(A) = \emptyset$ and $\lambda \notin \sigma(A)$.

Remark. In the above proof, the decomposability of A is only used to show that $X_A(\sigma) = \{0\}$ implies $\sigma \cap \sigma(A) = \emptyset$. If $C \in B(X, Y)$ intertwines $A \in B(X)$ and $B \in B(Y)$ and is injective, then $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(B)$ and $\sigma_p^\circ(A) \subset \sigma_p^\circ(B)$, where $\sigma_p(A)$ denotes the point spectrum of A . Because if $\lambda \notin \sigma_p(B)$ and if $(\lambda - A)x = 0$, then $0 = C(\lambda - A)x = (\lambda - B)Cx$ and $Cx = 0$ and hence $x = 0$ because C is injective. Therefore $\lambda \notin \sigma_p(A)$. If $\lambda \notin \sigma_p^\circ(B)$ and if $(z - A)f(z) \equiv 0$ for some analytic function $f: D_F(\lambda) \rightarrow X$, then $0 \equiv C(z - A)f(z) = (z - B)Cf(z)$ and $Cf(z); D_F(\lambda) \rightarrow Y$ is analytic. Hence $Cf(z) = 0$ by the assumption and $f(z) = 0$ because C is injective. Therefore $\lambda \notin \sigma_p^\circ(A)$.

参考文献

- [1] N. Dunford, Spectral operators,
Pacific J. Math., 4(1954) 321-354.
- [2] L. A. Fialkow, A note on quasi-similarity of operators,
Acta Sci. Math., 39(1977) 67-85.
- [3] C. Foiaş, Spectral maximal spaces and decomposable operators

in Banach space,

Arch. Math., 14 (1963) 341-349.

[4] C.-K. Fong, Quasi-affine transforms of subnormal operators,

Pacific J. Math., 70 (1977) 361-368.

[5] H. Radjavi and P. Rosenthal, Hyper-invariant subspaces for

spectral and n -normal operators,

Acta Sci. Math., 32 (1971) 121-126.

[6] M. Rosenblum, On the operator equation $BX - XA = Q$,

Duke Math. J., 23 (1956) 263-269.

[7] J. G. Stampfli, Quasi-similarity of operators,

Proc. R. Ir. Acad., 81A (1981) 109-119.

[8] L. R. Williams, Quasi-similarity and hyponormal operators,

J. Operator Theory, 5 (1981) 127-139.

[9] T. Yoshino, Some properties of the spectral manifolds,

(to appear).