

Integrable systems in unfashionable geometries *

井ノ口順一 (Jun-ichi Inoguchi)

宇都宮大学教育学部 (Utsunomiya University)

概要

In this talk, I would like to exhibit some unfashionable geometries which describe integrable systems.

はじめに

ソリトン理論が発展するたびに種々の古典幾何 (20 世紀初頭以前) が再発見され, 可積分系理論 + 現代の微分幾何で再び研究対象となった。

最初に蘇ったのは Sine-Gordon の幾何つまり負定曲率曲面。ついで (楕円型版にあたる) Sinh-Laplace の幾何 (平均曲率一定曲面)。戸田方程式から射影微分幾何などなど。

平均曲率一定曲面を除くと, どれも (国内) 微分幾何学者が興味・関心をよせるものではないようである。

しかしながら可積分系¹をよく理解しようと思うと unfashionable geometry を使わざるを得ない。実際 Sine-Gordon, Sinh-Laplace の差分化がうまくいく理由はこれらのもつ「大きな対称性」にあり, 大きな対称性を説明するのはどれも unfashionable geometry である²。

この講演ではそういう unfashionable geometry に現れる可積分系の例を 2 つ紹介する。

*このタイトルにはいろいろ含みがあるのだが, “unfashionable” なる言葉自体は畏友 Burstall 氏・Hertrich-Jeromin 氏の論文の題を借用した。

¹の文化人類学的研究, つまり hierarchy・佐藤理論のように可積分系に共通した性質を調べる社会学的研究に対し, 各々の系特有の性質や構造を調べようという立場。例えば同じ AKNS 系でもそれぞれ違う文化があると考ええる。この見方は Lax 形式を定める群より「大きな群の作用」を見つけることから始まる。同じ AKNS 系でも「異なる大きな群」の作用を持つ例がある。

²[17], [18] を参照

1 非線型シュレディンガー方程式のもう一人の家族 と第4の幾何

非線型シュレディンガー方程式のラックス表示 [33] を思い出そう:

AKNS による 2 行 2 列の固有値問題 [1] は未知関数 $\Phi = \Phi(x, t, \lambda)$: $\mathbb{R}^2(x, t) \times \mathbb{C}^*(\lambda) \rightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$: に対する次の連立線型方程式であった:

$$\Phi_x = \Phi U(x, t, \lambda), \quad \Phi_t = \Phi V(x, t, \lambda)$$

$$(1) U = \begin{pmatrix} \lambda & q(x, t) \\ r(x, t) & -\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a(x, t, \lambda) & b(x, t, \lambda) \\ c(x, t, \lambda) & -a(x, t, \lambda) \end{pmatrix},$$

この可積分条件

$$V_x - U_t + [U, V] = 0$$

を書き下すと

$$a_t = qc - rb,$$

$$q_t - 2aq - b_x + 2\lambda b = 0,$$

$$r_t + 2ar - c_x - 2\lambda c = 0.$$

となる。 V の成分 a, b, c をうまくえらぶと当時知られていた範囲で全ての可積分系が得られた。

非線型シュレディンガー方程式の場合は

$$r = -\bar{q}, \quad a = 2\sqrt{-1}\lambda^2 + \sqrt{-1}|q|^2,$$

$$b = \sqrt{-1}q_x + 2\sqrt{-1}\lambda q, \quad c = \sqrt{-1}\bar{q}_x - 2\sqrt{-1}\lambda\bar{q}$$

と選べばよく、実際、可積分条件は

$$\sqrt{-1}q_t + q_{xx} + 2|q|^2q = 0$$

なる。とくに V は λ について 2 次多項式であることに注意する。KdV, mKdV は 3 次式であり Sine-Gordn の場合はローラン多項式で冪は -1 から 1 までである。

非線型シュレディンガー方程式の U, V をよく見れば、 Φ は $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ の部分群に収まることに気づく。実際 Φ は $\mathrm{SU}(2)$ に値をもつ。暗いソリトンをもつ「符号違いの非線型シュレディンガー方程式」の場合は Φ は $\mathrm{SU}(1, 1)$ に値をもつ。

そこで次の問題を設定しよう:

問題 1.1 AKNS のラックス方程式で V が λ の 2 次多項式であるものが定める可積分系は NLS 以外にあるか?

問題 1.2 NLS の場合の Φ が $SU(2)$, $SU(1,1)$ に値をもつことを説明できるか?

この 2 つの問いに対する解答を丁青氏³ (上海・復旦大学) との共同研究 [7] で得た。

定理 1.3 V が λ について 2 次式のラックス対が定める可積分系は次の 3 つのどれかとゲージ同値:

$$(2) \quad \begin{cases} q_t = q_{ss} + 2q^2r \\ r_t = -r_{ss} - 2r^2q, \end{cases}$$

$$(3) \quad i\psi_t + \psi_{ss} - 2|\psi|^2\psi = 0,$$

$$(4) \quad i\psi_t + \psi_{ss} + 2|\psi|^2\psi = 0.$$

これらは複素化非線型 Schrödinger 方程式⁴の実形である。言い換えると「 V が λ について 2 次式の AKNS ラックス対が定める系は複素化 NLS の実形 3 種である」という至極妥当な結論である。

最初の系は複素化をそのまま単純に実簡約 (real reduction) したものである。この系の自明解 $q = r = 0$ に Darboux 変換を施すと

$$q = \frac{\lambda_0 e^{\lambda_0^2 t + c}}{\cosh(\lambda_0 s)}, \quad r = \frac{\lambda_0 e^{-(\lambda_0^2 t + c)}}{\cosh(\lambda_0 s)}.$$

を得る。

$SL(2, \mathbb{C})$ は実 6 次元の単純複素リー群である。その実形 (real form) は $SU(2)$ (コンパクト実形), $SU(1,1) = SL(2, \mathbb{R})$ (非コンパクト実形) の 2 種類ある。

ここで次の初等的な事実を思い出す。

- $SU(2)$ の随伴軌道は 2 次元球面 S^2
- $SU(1,1)$ の随伴軌道は双曲平面 H^2 , 擬球面 S_1^2 , 光錐のどれか⁵。

非退化なものは次のようにあらわせる:

$$S^2 = SU(2)/U(1),$$

³Qing Ding: 2003 年 7 月に来日し一ヶ月滞在予定だったが SARS の影響で上海からの出国ビザ発給停止に遭い来日できなかった

⁴ 寛 [21] 参照

⁵ それぞれ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $-x^2 + y^2 + z^2 = -1$, $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$

$$H^2 = \mathrm{SU}(1, 1)/\mathrm{U}(1) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2),$$

$$S_1^2 = \mathrm{SU}(1, 1)/\mathrm{SO}(1, 1) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(1, 1).$$

随伴軌道だから、一般論よりどれも等質 symplectic 構造が入っている。とくに S^2 , H^2 はケーラー多様体で S_1^2 はパラケーラー多様体というものになっている。

註 1.4 (ついでながら)

平行線の公理を証明しようという幾多の挑戦の後、非ユークリッド幾何が発見されたという歴史話は一度は読まれたことがあるでしょう。それは双曲平面の発見によるのですが、Riemann, Poincare の時代には2次元の幾何学のモデルは“ユークリッド平面幾何”, “楕円幾何 (S^2 の幾何)”, “双曲幾何 (H^2 の幾何)”の3つが挙げられています。Poincare は「科学と方法」の中で「第四の幾何」というものを説明しています。それは現代の言葉で説明すれば S_1^2 の幾何です。また

$$u_{xt} = \begin{cases} \sinh u, \\ e^u/2, \\ \cosh u \end{cases}$$

はどれも S_1^2 へのシグマ模型です [11]. 第四の幾何は unfashionable ですが可積分系には馴染み深いのです。

大雑把に先に答えを述べておくと NLS, NLS(dark), 「そのまま実形」はそれぞれ S^2 , H^2 , S_1^2 上の力学系である。リー群の観点からすれば自然に見つかる方程式のファミリーといえる。この理由を説明するために次の節で「Symplectic 多様体中の Schrödinger flow」というものを考える。

最も単純な幾何つまり平面の場合にも NLS に相当する方程式があってもおかしくはない。次節で説明するが平面中の Schrödinger flow の方程式は

$$iq_t + q_{xx} = 0$$

で与えられる。つまり線型方程式! (Schrödinger flow の観点からは、これも NLS の家族に入れるべきということになる)

2 Heisenberg 強磁性体と橋本変換

まずは橋本変換の復習から。渦糸の方程式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(s; t) = \kappa(s; t) B(s; t)$$

の速度場 $T(s; t) = \mathbf{r}_t$ は次の方程式を満たす:

$$(5) \quad T(s; t)_t = T(s; t) \times \frac{\partial^2 T}{\partial s^2}.$$

これは Heisenberg 強磁性体方程式と同じである. さらに橋本変換

$$\phi := \kappa(s, t) \exp[i \int \tau(s; t) ds]$$

により

$$i\phi_t + \phi_{ss} + \frac{1}{2}(|\phi|^2 + A(t))\phi = 0$$

に変換される.

$$\psi(s; t) := \frac{1}{2}\phi(s; t) \exp(-\frac{i}{2} \int A(t) dt)$$

ともう一回変換すれば

$$i\psi_t + \psi_{ss} + 2|\psi|^2\psi = 0$$

と NLS の形になる.

NLS と (5) は等価であるとみなされる. 改めて (5) を眺めると T は球面 S^2 上を動くことから, ちょっと微分幾何を知っていれば次のように書き換えられることに気づく.

$$T_t = J\mathcal{T}(T),$$

ここで J は球面の複素構造とよばれるテンソル場で $\mathcal{T}(T)$ は T の tension field と呼ばれる量である. この形はもっと一般に次の状況で意味がある:

(M, ω) を symplectic 多様体とし擬リーマン計量 g で以下の条件を満たすものが与えられているとする:

$$\omega(X, Y) = g(X, KY)$$

で交代テンソル場 K を定義したとき

$$g(KX, KY) = g(X, Y)$$

を満たす. この条件のもとでは $K^2 = \pm 1$ である. 計量 g が正定値のときは K は複素構造 ($K^2 = -1$) であり, $K^2 = 1$ となるときは概パラ複素構造とよばれている. 計量 g の定める微分 (Levi-Civita 接続) に関し K が平行であるとき (M, ω, g) はケーラー多様体 (Kähler)・パラケーラー (paraKähler) 多様体とよばれる⁶.

写像 $u: \mathbb{R} \rightarrow M$ が

$$u_t = K\mathcal{T}(u)$$

を満たすとき *Schrödinger map* とよぶ.

⁶奥村 [29] 参照. 彼の分類リストをみると Kähler metric, paraKähler metric, neutral Kähler metric ($g(JX, JY) = -g(X, Y)$, $J^2 = -1$) が現れている.

命題 2.1 NLS, NLS-dark, 「そのまま実形」はそれぞれ S^2 , H^2 , S_1^2 への Schrödinger map である.

NLS のときは周知であった. Schrödinger map については, 特にケーラー多様体の場合, Uhlenbeck, 小磯憲史らの解析学的研究がある⁷. とくに M が複素グラスマン多様体のときは matrix nonlinear Schrödinger equation と呼ばれている系であることを注意しておく. matrix NLS の差分化も得られている.

新しい系や NLS-dark も渦糸のように思えるだろうか? 答えは次の通り:

命題 2.2 NLS-dark, 「そのまま実形」はそれぞれ 3 次元平坦時空⁸内の空間的渦糸, 時間的渦糸である.

詳細は [7] を参照.

3 Tîţeica (Tzitzeica) 方程式とアファイン微分幾何学

まず 2 次元戸田方程式を復習しよう (児玉氏の稿 [22] も参照されたい)

G を X_ℓ 型のコンパクト Lie 群としよう. G のリー環の極大可換部分代数を $\mathfrak{t}$ で表す. $\mathfrak{t}$ に関するルートの基本系 (単純ルート系) を $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$, 最大ルートを α_0 と書く. 最大ルートをルートの基本系で表示しておく; $-\alpha_0 = m_1\alpha_1 + \dots + m_\ell\alpha_\ell$. $m_0 = 1$ とおく.

双曲型と楕円型の方程式を並行して表記するために次の記法を準備しておく. $\diamond^+ = \triangle = \partial_x^2 + \partial_t^2$, $\diamond^- = \square = \partial_x^2 - \partial_t^2$:

リー環に値を持つ函数 $\Omega : \mathbb{R}^2(x, t) \rightarrow \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ に関する次の偏微分方程式を 2D affine Toda field equation of type X_ℓ とよぶ.

$$\diamond^\pm \Omega \mp \sum_{p=0}^{\ell} m_p e^{\alpha_p(\Omega)} \alpha_p^\# = 0, \quad \alpha_p^\# : \text{coroot of } \alpha_p.$$

Type A の場合:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0 & & & \\ & \omega_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_\ell \end{pmatrix}$$

⁷para の場合はまだない. 解析の人は関心をもつだろうか?

⁸3-dimensional Minkowski spacetime $(\mathbb{R}^3, -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2)$

$\alpha_p(\Omega) = \omega_p - \omega_{p-1}$, $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_\ell = 0$, $\omega_{p+(\ell+1)} = \omega_p$: なので戸田方程式は

$$(\omega_p)_{xx} \pm (\omega_p)_{tt} = \mp \{e^{\omega_p - \omega_{p-1}} - e^{\omega_{p+1} - \omega_p}\}$$

となる.

階数 1 つまり $G = \mathrm{SU}(2) (A_1^{(1)})$ のとき:

$$(\omega_1)_{xx} \pm (\omega_1)_{tt} = \mp \{e^{2\omega_1} - e^{-2\omega_1}\}$$

だからこれは Sinh-Gordon 方程式 または Sine-Gordon 方程式である: 実際, 楕円型のとき $u = 2\omega_1$, 双曲型のとき $u = \sqrt{-1}\omega_1$ と定めれば戸田方程式は $\Delta u + \sinh u = 0$, $\square u - \sin u = 0$ の形になる. これらはそれぞれ 3 次元空間内のガウス曲率 1, -1 の曲面を定める. 前者は平均曲率一定曲面⁹も定める. また曲面の法線場 (ガウス写像) を考えればそれらはリーマン球面 $\mathbb{CP}^1$ に値をもつ非線型 sigma 模型 (harmonic map) である. (ここに書いたことについては [17] を参照してください)

階数をひとつ上げて $G = \mathrm{SU}(3) (A_2^{(1)})$: を考えよう.

$$\diamond^\pm \omega_0 = \mp \{e^{\omega_0 - \omega_2} - e^{\omega_1 - \omega_0}\},$$

$$\diamond^\pm \omega_1 = \mp \{e^{\omega_1 - \omega_0} - e^{\omega_2 - \omega_1}\},$$

$$\diamond^\pm \omega_2 = \mp \{e^{\omega_2 - \omega_1} - e^{-\omega_3 - \omega_2}\}.$$

これらは複素射影平面に値をもつシグマ模型を定める (楕円型の場合は superconformal harmonic map とよばれる解を定めている)

Reduction: $\omega_0 = 0$, $\omega_2 = -\omega_1$, $u = \omega_1$ を課すと $\diamond^\pm u = \mp \{e^u - e^{-2u}\}$ という方程式が得られる. これをルーマニア人¹⁰幾何学者に因み近頃は **Tzitzeica equation** と呼ぶ (以前は $A_2^{(2)}$ -Toda, BC_1 -Toda, Dodd-Bullough, Ziber-Shabat などとよばれていた)

この reduction の意味は楕円型のときは明確な説明がある. 複素射影平面の symplectic 構造に関し Lagrangian であることとこの reduction を満たすことが同値である. 楕円型 Tzitzeica 方程式の解は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{CP}^2$ への Lagrangian minimal surface を定める. とくに 2 重周期解が定める Lagrangian minimal torus が重要である. これらはミラー対称性からの要請で詳しく調べられている¹¹. Lagrangian minimal torus の決定・分類はごく最近, 宇田川氏 (日大医学部) によって為された [35].

⁹Fashionable! 国内の微分幾何学者の中には可積分系=平均曲率一定曲面と早合点してる人もいる

¹⁰ルーマニアでは微分幾何の父とよばれて尊敬されているそうです. 戸田セミナーに相当する “Tzitzeica Seminar” (ただし微分幾何) というのがあるそうです

¹¹Fashionable

A 型戸田方程式から Tzitzeica 方程式を簡約する方法はここで挙げたものだけではない。(ここで挙げたのは微分幾何学的の観点に基づく、Darboux も参照されるとよい) 戸田分子方程式からの簡約 については広田先生の稿 [16] を参照。

Tzitzeica 方程式の構造を深く理解するためにはアファイン微分幾何という¹² 幾何学が必要である。大雑把に言えば

○ アファイン微分幾何 = 等積変換群 $SL(3, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ を “合同群” とする幾何のことで

○ 空間 = 等積アファイン空間¹³ $\mathbb{A}^3$

というものである。従って二つの図形が「合同」とは「体積」が等しいという意味である¹⁴。

Tzitzeica は球面のアファイン的類似 (アファイン球面¹⁵) を発見し、その構造方程式 (可積分条件) が今日 Tzitzeica 方程式と呼ばれるものであることを導いた。更におどろくべきことに変換論までも行なっていた¹⁶。

球面は実は以下の二つの条件で特徴づけられる¹⁷:

- 位置ベクトルは曲面に横断的 (とくに法線方向)。
- 全ての位置ベクトルは一点に集まる (中心)

これらの性質は計量を捨象した世界でも通用する。そこでこれら二つを満たすアファイン空間内の曲面をアファイン球面とよぶ¹⁸。

註 ユークリッド幾何では球面は (大きさを除いて) ひとつしかないがアファイン球面は無数にある。Tzitzeica 方程式の解が定めるのだから。

アファイン球面を漸近座標 (u_1, u_2) でパラメータ表示する: 曲面の位置ベクトルを F と書くと次の Gauss-Weingarten の公式に従う。

$$F_{u_1 u_1} = \frac{h_{u_1}}{h} F_{u_1} + \frac{a}{h} F_{u_2},$$

$$F_{u_1 u_2} = h F$$

$$F_{u_2 u_2} = \frac{h_{u_2}}{h} F_{u_2} + \frac{b}{h} F_{u_1}.$$

¹² unfashionable geometry

¹³ ふつうの空間 (ユークリッド空間) から長さ・角の概念を捨象した空間。平行性と体積・面積の概念はある。

¹⁴ 正確には等積変換 $SL_3 \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ で重なるとき合同という。

¹⁵ 球面のアファイン版

¹⁶ 野水・佐々木の教科書 [28] にも説明されているように Tzitzeica 方程式の発見がアファイン微分幾何の誕生である。ところが不思議なことに (私の知る限り) 国内・外国を問わずアファイン微分幾何 (現代人!) の専門家で Tzitzeica 方程式を深く研究している・していた人物はたった一人、黒瀬俊氏 (福岡大) だけである。射影微分幾何の場合は佐々木武氏 (神戸大) と吉田正章氏 (九州大) の一連の研究がある。深みのない研究については触れない

¹⁷ 学部水準の微分幾何の知識で証明できる

¹⁸ 正確な定義は [28] 参照

可積分条件は **Tzitzeica 方程式** (1907) である¹⁹。

$$(\ln h)_{u_1 u_2} = h - abh^{-2}, \quad a_{u_2} = b_{u_1} = 0.$$

アファイン球面を差分化することで**差分 Tzitzeica 方程式**を得る²⁰

整数格子からアファイン空間への写像 $F = F_{n,m} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$ が次の 2 条件²¹を満たすとき**差分アファイン球面**とよぶ。

○ F は差分漸近網つまり、各点 $F_{n,m}$ に対し、

$$F_{n,m}, F_{n+1,m}, F_{n-1,m}, F_{n,m+1}, F_{n,m-1} \in \mathcal{P}_{n,m}.$$

であるような平面 $\mathcal{P}_{n,m}$ がとれる;

○ F は 2 階差分 $\Delta_{12} F := F_{n+1,m+1} - F_{n+1,m} + F_{n,m+1} + F_{n,m}$ の方向を向く。

この差分曲面 (差分網) の可和分条件を計算するために次の記法を用意する: $F_1 = F_{n+1,m}$, $F_2 = F_{n,m+1}$, $F_{11} = F_{n+2,m}$, $F_{12} = F_{n+1,m+1}$, $F_{22} = F_{n,m+2}$.

この記法を使うと Gauss-Weingarten の公式は

$$F_{11} - F_1 = \frac{H_1 - 1}{H_1(H - 1)}(F_1 - F) + \frac{A}{H - 1}(F_{12} - F_1),$$

$$F_{12} + F = H(F_1 + F_2),$$

$$F_{22} - F_2 = \frac{H_2 - 1}{H_2(H - 1)}(F_2 - F) + \frac{B}{H - 1}(F_{12} - F_2),$$

となりその可和分条件は**差分 Tzitzeica 方程式**

$$H_{12} = \frac{H(H - 1)}{H^2(H_1 + H_2 - H_1 H_2) - H + ABH_1 H_2},$$

$$A_2 = \frac{H_1}{H} A, \quad B_1 = \frac{H_2}{H} B$$

¹⁹ここに挙げた連立方程式が Tzitzeica 方程式とよぶべきものである。2 番目の式から $a = b = 1$ となるよう座標変換をしてよいことがわかるので $(\ln h)_{u_1 u_2} = h - h^{-2}$ と正規化される。Tzitzeica の原論文では正規化も行なっているので「正規化された方程式」を Tzitzeica 方程式とよぶようになった。正規化をして $h = e^u$, $u_1 = (x+t)/2$, $u_2 = (x-t)/2$ と置きなおせば $\square u = e^u - e^{-2u}$ の形になる。なお差分化の際は正規化を行なわないのがミソ。次の項参照

²⁰この差分化は Bobenko, Schief [3] による

²¹2 段構えになっていることに注目。最初の条件はアファイン不変な網を定義している。その次にアファイン球面を特徴づける性質を挙げている。差分 **Sine-Gordon** の場合は最初の条件に続けて差分漸近網が Chebyshev 網であるという「計量的性質」を使う。差分 Sinh-Laplace のときは共形不変な**差分双等温網**に平均曲率一定曲面を特徴づける条件 (計量的) を課すという 2 段構えになっている [17] 参照。つまり「計量的性質」は差分化のある種の障害になっている。これが Sine-Gordon の超差分化が簡単でないことの幾何学的説明・根拠である。Tzitzeica 方程式はアファイン幾何に納まっているので障害がなく超差分まで進める。

であることが導ける。超離散 Tzitzeica 方程式は広田先生が得ていることを注意しておこう [16].

註 平面の特徴づけ

- 全ての法線ベクトル場は平行

のアファイン的類似を考えることもできる. この場合は

- 全ての横断的ベクトル場は平行

と定めることになる. この条件をみたす曲面を**非固有アファイン球面**とよぶ. この場合, 構造方程式は Liouville 方程式である. 従って平面以外に無数の解曲面がある. **差分 Liouville 方程式**の定める幾何学は松浦望氏 (東北大院生) の修士論文 [23] で展開されている ([24], [26] 参照). さらに差分 Liouville 方程式の幾何学的拡張に相当する方程式 (**差分アファイン極小曲面**の構造方程式) を [25] で研究している. [25] において広田先生の**平均冪乗函数** [15] を用いて差分調和多項式の分類²²が行なわれている. この結果を利用して差分アファイン極小曲面の例を構成している.

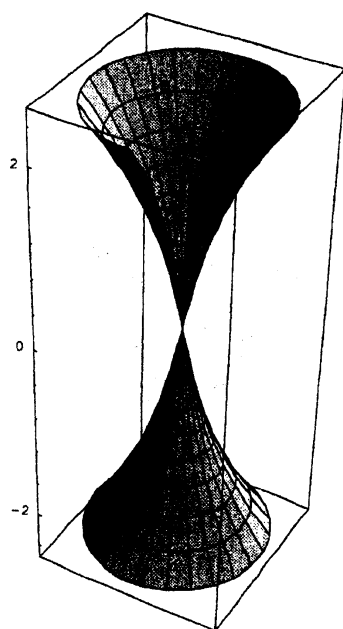
²² この結果は幾何を経由しない純粋な「差分学」の結果である! 差分学の結果が幾何に応用された初めての例 (しかも日本人若手!) であるという点でも注目したい。

Unfashionable geometry というだけあって実は Tzitzeica 方程式の厳密解は Sine-Gordon ほどよくわかっていない。そこで Sine-Gordon との比較をしながら Tzitzeica 方程式の基本的な解を説明しよう²³

まず $u_{xx} - u_{tt} = \sin u$ の 1-soliton 解の幾何学的意味を説明しよう:

Kink: $u(x, t) = 4 \tan^{-1}(e^x)$ の定める曲面は Beltrami's pseudosphere とよばれる: 回転面である (犬線をまわす)

$$F(x, t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sech} x \\ 0 \\ -x + \tanh x \end{bmatrix}$$



[12] より

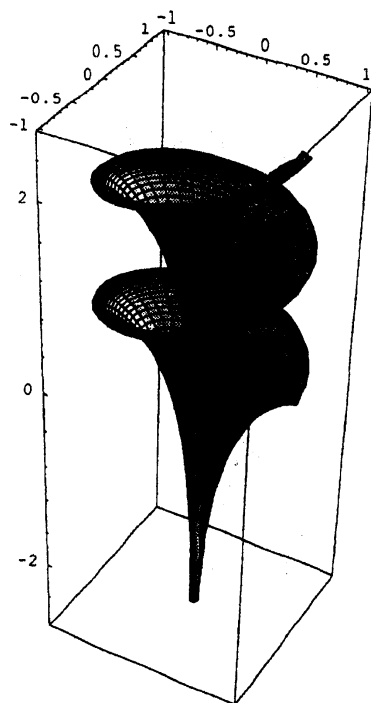
²³ 差分・超差分というのは実は気がはやい?

Moving Kink (1-soliton) は Dini's pseudosphere とよばれる螺旋面である

$$F(x, t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sech} x \\ 0 \\ -x + \tanh x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{bmatrix}$$

注意

$K = -1$ の回転面で定まる Sine-Gordon の解は一般には楕円函数解である。擬球 (Kink) は初等函数に落ちている特別なケース. Gray の本 [12] などを参照されたい.



[12] より

アファイン球面の場合, (群が大きくなったので) 回転面が3種ある!

Elliptic rotation or Rotation

$$F(x, t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ 0 \\ g(x) \end{bmatrix},$$

Hyperbolic rotation or Boost

$$F(x, t) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ 0 \\ g(x) \end{bmatrix},$$

Parabolic rotation

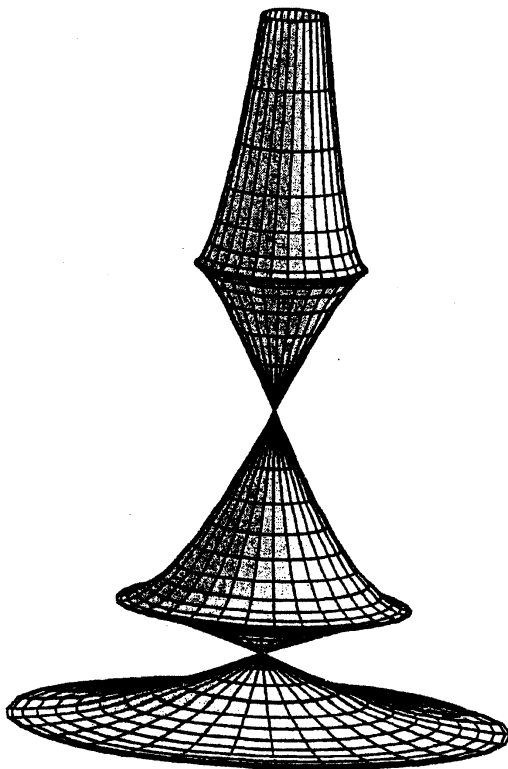
$$F(x, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ 0 \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

⇒ 1-soliton 解に相当するものが3種ある???ということになる

Elliptic rotation の場合:

$$e^u = 1 - \frac{3}{2 \cosh^2 \left[\frac{2}{\sqrt{3}} (\lambda x + \lambda^{-1} t) \right]}$$

という解が得られる. これは Jonas が 1915 年の論文で発表した解である.
この解が定める曲面は **Kelch surface** と呼ばれる.



[31] より

このタイプの“1-soliton 解”を含む楕円函数解は

$$e^u = A + \frac{1}{2}r^2 p^2 \operatorname{sn}^2(rx/2, p), \quad r > 0, \quad 0 \leq p \leq 1,$$

$$A = \frac{1 - \sqrt{\alpha^3 + 1}}{\alpha^2}, \quad r^2 = \frac{\alpha^3 - 2 + 2\sqrt{\alpha^3 + 1}}{\alpha^2}, \quad p^2 = \frac{4\sqrt{\alpha^3 + 1}}{\alpha^3 - 2 + 2\sqrt{\alpha^3 + 1}}$$

で与えられる (宇田川). $\alpha = 2$ のとき

$$e^u = 1 - \frac{3}{2\cosh^2(\sqrt{3}x/2)}$$

となる.

自明解 $u \equiv 0$ が定める曲面は Hexenhut とよばれる 2 次曲面 ($X^2 + Y^2$) $Z = 1$ である. 自明解を含む解の族 (cnoidal 波解) $\{u_\alpha\}$ は次で与えられる (宇田川):

$$e^{u_\alpha(x,t)} = \frac{\alpha}{2} \left\{ 1 - q^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{r}{2}(x-t), p\right) \right\}, \quad \alpha \geq 2,$$

$$q^2 = \frac{\alpha^3 - 2 - 2\sqrt{\alpha^3 + 1}}{\alpha^3}, \quad r^2 = \frac{\alpha^2 - 2 + 2\sqrt{\alpha^3 + 1}}{\alpha^2}, \quad p^2 = \frac{\alpha q^2}{r^2},$$

P_{III} -reduction

Sine-Gordon の P_{III} -reduction はよく知られている²⁴. P_{III} に簡約する必要十分条件は Amsler により与えられた.

“Sine-Gordon 場 $u(x, t)$ が P_{III} に落ちる $\Leftrightarrow$ 曲面の漸近曲線が直線”.

この条件を満たす負定曲率曲面を **Amsler surface** とよぶ.

$-u_{tt} + u_{xx} = \sin u$ を光錘座標 $(\zeta_1, \zeta_2) = (x+t, x-t)/2$ を使って $u_{\zeta_1 \zeta_2} = \sin u$ の形にしておく. Amsler の条件は Sine-Gordon 場の方で見ると $u = u(r)$, $r = 2\sqrt{\zeta_1 \zeta_2}$ というローレンツ不変性での簡約である. r に関する微分を $\cdot$ で表すと $\ddot{u} + \frac{1}{r}\dot{u} + \sin u = 0$ という常微分方程式に簡約される. さらに次の変数変換 $y(t) := e^{\sqrt{-1}u(r)}$, $t = r^2$ を施すと

$$y'' = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{t} + \frac{\sqrt{-1}}{8t}(y^2 - 1).$$

を得る. Tzitzeica 方程式の場合は次の類似な性質を持つ.

“Tzitzeica 場 $u(x, t)$ が P_{III} に落ちる $\Leftrightarrow$ 曲面の漸近曲線がアファイン的にまっすぐである”.

²⁴ この簡約を最初に発見したのは Bianchi らしい

直線でない空間曲線に対し「アファイン的な曲率」が定義される。「アファイン的な曲率」が恒等的に0である空間曲線をアファイン的にまっすぐな曲線²⁵と仮によんでおく。この場合は $(\log h)_{xy} = h - h^{-2}$, $h(x, y) = H(r)$, $r = xy$ というやはり ローレンツ不変性での簡約 である。 $d/dr = \cdot$ と書けば

$$\ddot{H} = \frac{\dot{H}^2}{H} - \frac{\dot{H}}{r} + \frac{1}{r} \left(H^2 - \frac{1}{H} \right).$$

変数変換

$$y(t) := x^{\frac{1}{3}} H(r), \quad t = \frac{8}{3\sqrt{3}} r^{\frac{3}{4}}$$

を施して

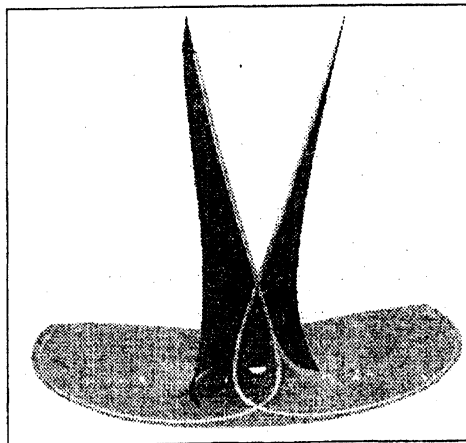
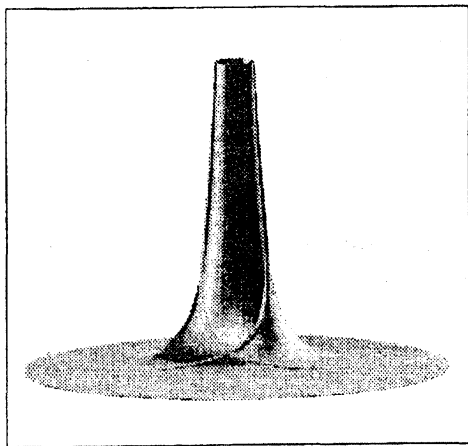
$$y'' = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{t} + \frac{y^2}{t} - \frac{1}{y}$$

を得る。標準形

$$y'' = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{t} + \frac{1}{t}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma^3 + \frac{\delta}{y}.$$

と比べると Sine-Gordon のときは $\alpha = -\beta = \sqrt{-1}/8$, $\gamma = \delta = 0$, Tzitzeica のときは $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = -1$ という特定のパラメータに固定されていることに注意。

P_{III} 簡約については [2] に詳しく述べられている。



[2] より

²⁵アファイン幾何では affine straight line とよばれている

まとめと課題

- ★ Tzitzeica 方程式は Sine-Gordon 方程式に比べ複雑な構造である。
- ★ ϑ 函数解は得られている (Sharipov, 宇田川)
- ★ Tzitzeica 方程式の Darboux 変換は Its により与えられている。
- 3 種の回転面が定める “1-soliton 解” ・ “楕円函数解” の相互の関係などを明らかにしたい (研究進行中/宇田川-黒瀬-I [19])

謝辞 講演の機会をくださった増田哲先生, 有益なコメントをいただいた
 広田良吾・高橋大輔・上野喜三雄・児玉 裕治・寛三郎の諸先生方, Tzitzeica
 方程式の楕円函数解についてご教示いただいた宇田川誠一先生に感謝いた
 します。

参考文献

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problem, *Stud. Appl. Math.* **53** (1974) 249-315.
- [2] A. I. Bobenko and U. Eitner, *Painlevé Equations in the Differential Geometry of Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, **1753**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [3] A. I. Bobenko and W. Schief, Discrete indefinite affine spheres, *Discrete Integrable Geometry and Physics* (Vienna, 1996), pp. 113-138, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **16**, Oxford Univ. Press, New York, 1999.
- [4] F. E. Burstall and U. Hertrich-Jeromin, Harmonic maps in unfashionable geometries, *Manuscripta Math.* **108** (2002), no. 2, 171-189
- [5] N. H. Chang, J. Shatah, K. Uhlenbeck, Schrödinger maps, *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000) 590-620.
- [6] Q. Ding, Schrödinger flow and its applications in integrable systems, *Differential Geometry* (Sakado, 2001), pp. 23-36, Josai Math. Monogr., **3**, Josai Univ., Sakado, 2001
 Available at <http://math.josai.ac.jp/cheng/geom/proc.html>
- [7] Q. Ding and J. Inoguchi, Schrödinger flows, binormal motion for curves and the second AKNS-hierarchies, preprint, 2003.

- [8] Q. Ding, J. Inoguchi, Hasimoto surfaces derived from dark solitons, in preparation
- [9] Q. Ding, Z. Zhu Z, A geometric characterization of the nonlinear Schrödinger equation and its applications, *Sci. in China A* **45** (2002) 1225–1237.
- [10] W. Y. Ding, Y. D. Wang, Schrödinger flow of maps into symplectic manifolds, *Sci. in China* **47A** (1998) 746–755.
- [11] J. Dorfmeister, J. Inoguchi and M. Toda²⁶ Weierstraß-type representation of timelike surfaces with constant mean curvature, *Differential Geometry and Integrable Systems* (Tokyo, 2000), *Contemp. Math.*, 308, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 77–99.
- [12] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Second edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.
- [13] C. H. Gu, H. S. Hu, J. Inoguchi and Z. X. Zhou, Darboux transformations for Tzitzeica equation, in preparation.
- [14] H. Hasimoto (橋本英典), A soliton on a vortex filament, *J. Fluid Mech.* **51** (1972), 477–485
- [15] R. Hirota(広田良吾), 差分学入門, 培風館, 1998.
- [16] R. Hirota(広田), 本講究録.
- [17] J. Inoguchi (井ノ口), 離散化された微分幾何学, 数理研講究録 **1170** (2000), 9–22
- [18] J. Inoguchi (井ノ口), 離散射影微分幾何はやわかり, 数理研講究録 **1221** (2001), 112–124
- [19] J. Inoguchi, T. Kurose (黒瀬俊) and S. Udagawa (宇田川誠一), in preparation.
- [20] A. R. Its Liouville's theorem and the method of the inverse problem, *J. Soviet Math.* **31** (1985), 3330–3338.
- [21] S. Kakei (笥三郎), 本講究録.
- [22] Y. Kodama (児玉裕治), 本講究録.

²⁶Magdalena Toda: ルーマニア人の女性, 現在はテキサス工科大 assistant professor.

- [23] N. Matsuura (松浦望), 曲面の離散化と微分幾何学, 修士論文, 東北大学大学院情報科学研究科, 2001.
- [24] N. Matsuura (松浦), Discrete indefinite improper affine spheres, 数理研講究録 **1280** (2002), 35–45.
- [25] N. Matsuura, A discrete analogue of the affine Bäcklund transformation, preprint, 2003.
- [26] N. Matsuura (松浦) and H. Urakawa (浦川肇), Discrete improper affine spheres, J. Geom. Phys. **45** (2003), no. 1-2, 164–183.
- [27] A. Nahmod, A. Stefanov, K. Uhlenbeck, On Schrödinger maps, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003) 114–151.
- [28] K. Nomizu (野水克己) and T. Sasaki (佐々木武), アフライン微分幾何学, 裳華房.
- [29] S. Okmura (奥村昌司), 本講究録.
- [30] H. Poincaré, 科学と仮説, 邦訳 岩波文庫
- [31] C. Rogers and W. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations* Geometry and Modern Applications in Soliton Theory, Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [32] C. L. Terng, K. Uhlenbeck, Schrödinger flows on Grassmannians, (1999) preprint math.DG/9901086.
- [33] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, Soviet Physics JETP **34** (1972), no. 1, 62–69.
- [34] V. E. Zakharov, L. A. Takhtajan, Equivalence of a nonlinear Schrödinger equation and a Heisenberg ferromagnet equation, Theoret. Mat. Phys. **38** (1979) 26–35.
- [35] S. Udagawa (宇田川誠一), Tzitzeica 方程式について, preprint, 2003. Available at:
<http://www.med.nihon-u.ac.jp/home/sudagawa/ulist.html>