

# 波動方程式の初期値問題について

東大 理 木村俊房

## §1 序

### 波動方程式の初期値問題

$$(W) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

$$u(0, x) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x),$$

の解は次の様に具体的に与えられる。

$n \geq 3$  が奇数のとき

$$u(t, x) = \frac{1}{(n-2)!!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} (t^{n-2} w[f; t, x]) \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}} (t^{n-2} w[g; t, x]) \right\},$$

$n \geq 2$  が偶数のとき,

$$u(t, x) = \frac{1}{(n-2)!!!} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \omega[f; \rho, x] \frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \omega[g; \rho, x] \frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \right\}$$

∴  $\tau''$ ,

$$(n-2)!!! = \begin{cases} (n-2)(n-4) \cdots 3 \cdot 1 & n: \text{奇} \\ (n-2)(n-4) \cdots 4 \cdot 2 & n: \text{偶} \end{cases}$$

$$\omega[f; t, x] = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\|\xi\|=1} f(x_1 + t\xi_1, \dots, x_n + t\xi_n) d\omega,$$

$\sigma_{n-1}$  は  $n-1$  次元球面の面積,

$d\omega$  は  $n-1$  次元単位球面の面積要素.

本稿の目的は Laplace の方程式の半空間における Dirichlet 問題, Neumann 問題の公式から上の公式を導くことにある.

§2 Laplace の方程式の半空間における Dirichlet, Neumann 問題

$n+1$  変数の Laplace の方程式

$$(L) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

と考える.  $\mathbb{R}^{n+1}$  の半空間

$$x_0 > 0$$

に対する Dirichlet 問題

$$u(0, x) = f(x)$$

と Neumann 問題

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}(0, x) = g(x)$$

の解はそれぞれ

$$(2.1) \quad \varphi(x_0, x) = \frac{2x_0}{\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n} \int \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n}{(x_0^2 + (x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$(2.2) \quad \psi(x_0, x) = \frac{-2}{(n-1)\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n} \int \frac{g(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n}{(x_0^2 + (x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

で与えられる.

こゝで  $(x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$  と仮定したが, 複素変数  
に  $z$  と

$$(2.3) \quad r^2 = x_0^2 + (x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2 \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

なる  $(x_0, x) \in \mathbb{C}^{n+1}$  に対し  $\varphi(x_0, x)$  と  $\psi(x_0, x)$  は  
定義され複素解析的である.  $x_1, \dots, x_n$  は実変数  
とし,  $x_0$  を複素変数として,

$$x_0 = s + it$$

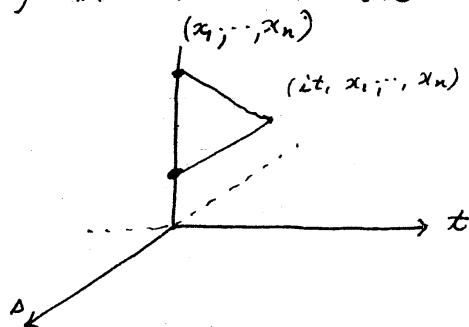
とおく.

$\lambda > 0$  or  $\lambda < 0$  ならば (2.3) は成りたつから,  $\varphi$  と  $\psi$  は  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$  の 2つの半空間

$$\lambda > 0,$$

$$\lambda < 0$$

の各々で"定義"されそこで  $x_0$  について holomorphic である. 一方与えられた  $(it, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$  に対し  $t=0$  となる点  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  は  $n-1$  次元の平面を作る.



### §3. 方針

#### 変換

$$x_0 = it$$

によって Laplace の方程式 (L) は波動方程式 (W) に移る. したがって, (L) の 1つの解  $u(x_0, x)$  に対して  $v(t, x) = u(it, x)$  は意味をもつ限り (W) の解となる.

しかし, (L) の解  $\varphi(x_0, x), \psi(x_0, x)$  に対しては直接

$$x_0 = it$$

14.

と書くことができない。  $\lambda > 0$  とすると

$$\varphi(\lambda + it, x), \quad \varphi(-\lambda + it, x)$$

$$\psi(\lambda + it, x), \quad \psi(-\lambda + it, x)$$

は意味をもっている。

(2.1) から

$$\varphi(\lambda, x) = -\varphi(-\lambda, x),$$

したがって

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(-\lambda, x)$$

これと

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

に注意して,

$$\frac{1}{2}(\varphi(\lambda, x) - \varphi(-\lambda, x)) \rightarrow f(x) \quad (\lambda \rightarrow 0)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda, x) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-\lambda, x)\right) \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0)$$

を得る。

(2.2) から

$$\psi(\lambda, x) = \psi(-\lambda, x)$$

したがって

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(\lambda, x) = -\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(-\lambda, x).$$

ゆえに

$$\frac{1}{2i} (\psi(\Delta, x) - \psi(-\Delta, x)) \rightarrow 0 \quad (\Delta \rightarrow 0),$$

$$\frac{1}{2i} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t}(\Delta, x) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(-\Delta, x) \right) \rightarrow g(x) \quad (\Delta \rightarrow 0).$$

を得る.

以上の考察から,  $\Delta \rightarrow 0$  のとき

$$\frac{1}{2i} (\varphi(\Delta + it, x) - \varphi(-\Delta + it, x))$$

は波動方程式 (W) の

$$u(0, x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$$

をみたす解に,

$$\frac{1}{2i} (\psi(\Delta + it, x) - \psi(-\Delta + it, x))$$

は (W) の

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$$

をみたす解に収束することゝ期待される.

これが実際成り立つことを示すのが方針である.

解  $\varphi(x_0, x)$ ,  $\psi(x_0, x)$  は,  $\omega[f; t, x]$ ,  $\omega[g; t, x]$  と

使って, 次のように書き直される

$$\varphi(x_0, x) = \frac{2\sigma_{n-1}}{\sigma_n} x_0 \int_0^\infty \omega[f, \rho, x] \frac{\rho^{n-1}}{(x_0^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}} d\rho,$$

$$\psi(x_0, x) = \frac{-2\sigma_{n-1}}{(n-1)\sigma_n} \int_0^\infty \omega[g, \rho, x] \frac{\rho^{n-1}}{(x_0^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}} d\rho.$$

以下,  $n$  は奇数のときは  $\geq 3$ , 偶数のときは  $\geq 2$  とする.

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

を使うと,

$$\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!} \frac{1}{\pi} & n: \text{奇} \\ \frac{(n-1)!!}{2(n-2)!!} & n: \text{偶} \end{cases}$$

#### §4 積分の变形

積分

$$I = \int_0^\infty F(\rho) \frac{\rho^{n-1}}{(x_0^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}} d\rho$$

を考える.

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho^{n-2} F(\rho) \frac{2\rho}{(x_0^2 + \rho^2)^{\frac{n+1}{2}}} d\rho$$

に部分積分を行う

$$I = \frac{1}{n-1} \left\{ \left[ -\rho^{n-2} F(\rho) \frac{1}{(x_0^2 + \rho^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d}{d\rho} (\rho^{n-2} F(\rho)) \frac{d\rho}{(x_0^2 + \rho^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right\}$$

右辺の第1項は消えると仮定して (以下同様の仮定を行う)

$$I = \frac{1}{n-1} \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^{n-2} F(\rho)) \frac{\rho}{(x_0^2 + \rho^2)^{\frac{n-1}{2}}} d\rho.$$

この操作をくり返すことにし、

$n$  が奇数のとき

$$I = \frac{1}{(n-1)!!} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^{\frac{n-1}{2}} (\rho^{n-2} F(\rho)) \frac{\rho}{x_0^2 + \rho^2} d\rho,$$

$n$  が偶数のとき

$$I = \frac{1}{(n-1)!!} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^{\frac{n}{2}} (\rho^{n-2} F(\rho)) \frac{\rho}{\sqrt{x_0^2 + \rho^2}} d\rho$$

を得る。これから

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \varphi(\lambda+it, x) - \varphi(-\lambda+it, x) \} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(n-2)!! \pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^{\frac{n-1}{2}} (\rho^{n-2} \omega[f, \rho, x]) \left( \frac{\lambda+it}{(\lambda+it)^2 + \rho^2} - \frac{-\lambda+it}{(-\lambda+it)^2 + \rho^2} \right) \rho d\rho & (n: \text{奇}) \\ \frac{1}{2(n-2)!!} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^{\frac{n}{2}} (\rho^{n-2} \omega[f, \rho, x]) \left( \frac{\lambda+it}{\sqrt{(\lambda+it)^2 + \rho^2}} - \frac{-\lambda+it}{\sqrt{(-\lambda+it)^2 + \rho^2}} \right) \rho d\rho & (n: \text{偶}) \end{cases} \end{aligned}$$

を得る。

積分

$$J = \int_0^\infty F(\rho) \frac{\rho^{n-1}}{(x_0^2 + \rho^2)^{\frac{n-1}{2}}} d\rho$$

と同様にし、

$n$  が奇数のとき

$$J = \frac{1}{(n-3)!!} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^{\frac{n-3}{2}} (F(\rho)) \frac{\rho}{x_0^2 + \rho^2} d\rho,$$

$n$  が偶数のとき

$$J = \frac{1}{(n-3)!!} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^{\frac{n-2}{2}} (F(\rho)) \frac{\rho}{\sqrt{x_0^2 + \rho^2}} d\rho.$$

これから,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \left\{ \psi(\lambda+it, x) - \psi(-\lambda+it, x) \right\} \\ = & \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)!! \pi i} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^{\frac{n-3}{2}} (\rho^{n-2} \omega[g, \rho, x]) \left( \frac{1}{(\lambda+it)^2 + \rho^2} - \frac{1}{(-\lambda+it)^2 + \rho^2} \right) \rho d\rho & (n: \text{奇}) \\ -\frac{1}{2(n-2)!! i} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^{\frac{n-2}{2}} (\rho^{n-2} \omega[g, \rho, x]) \left( \frac{1}{\sqrt{(\lambda+it)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-\lambda+it)^2 + \rho^2}} \right) \rho d\rho & (n: \text{偶}) \end{cases} \end{aligned}$$

したがって問題は次の4つの積分

$$N_1(\lambda) = \int_0^\infty F(\rho) \left( \frac{1}{(\lambda+it)^2 + \rho^2} - \frac{1}{(\lambda+it)^2 + \rho^2} \right) \rho d\rho,$$

$$D_1(\lambda) = \int_0^\infty F(\rho) \left( \frac{\lambda+it}{(\lambda+it)^2 + \rho^2} - \frac{-\lambda+it}{(-\lambda+it)^2 + \rho^2} \right) \rho d\rho,$$

$$N_2(\lambda) = \int_0^\infty F(\rho) \left( \frac{1}{\sqrt{(\lambda+it)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-\lambda+it)^2 + \rho^2}} \right) \rho d\rho,$$

$$D_2(\lambda) = \int_0^\infty F(\rho) \left( \frac{\rho + it}{\sqrt{(\rho + it)^2 + \rho^2}} - \frac{-\rho + it}{\sqrt{(-\rho + it)^2 + \rho^2}} \right) \rho d\rho$$

の計算に着手する。

こゝで次の注意をしておく。

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} F(\rho) \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho &= \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{d}{d\rho} F(\rho) \sqrt{t^2 - \rho^2} d\rho \\ &= \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_0^t F(\rho) \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho, \end{aligned}$$

これより、

$$\int_0^t \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^k F(\rho) \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho = \left( \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^k \int_0^t F(\rho) \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho.$$

## §5 積分の実行

積分

$$N_1(\lambda) = \int_0^\infty F(\rho) \left( \frac{1}{(\rho + it)^2 + \rho^2} - \frac{1}{(-\rho + it)^2 + \rho^2} \right) \rho d\rho$$

を考える。

$$N_1(\lambda) = -i \int_0^\infty F(\rho) \frac{2\rho t \cdot 2\rho}{(t^2 - \rho^2 - \lambda^2) + (2\rho t)^2} d\rho$$

と3つの部分

$$\int_0^{t-\delta} \quad , \quad \int_{t-\delta}^{t+\delta} \quad , \quad \int_{t+\delta}^{\infty}$$

に分ける,

$$\int_0^{t-\delta} \rightarrow 0, \quad \int_{t+\delta}^{\infty} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0)$$

はすぐ分る, 2番目と計算して

$$\int_{t-\delta}^{t+\delta} \rightarrow \pi F(t) + \varepsilon(\delta) \quad (\delta \rightarrow 0),$$

$$\varepsilon(\delta) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0)$$

より分る. 二つから

$$N_1(\delta) \rightarrow -\pi i F(t) \quad (\delta \rightarrow 0)$$

ゆえに,  $n$  が奇数のとき,

$$\frac{1}{2i} \left\{ \psi(\delta+it, x) - \psi(-\delta+it, x) \right\} \rightarrow \underbrace{\left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-3}{2}}}_{\frac{1}{(n-2)!}} (x^{n-2} \omega[g; x, x]).$$

次に積分

$$D_1(\delta) = \int_0^{\infty} F(\rho) \left( \frac{\delta+it}{(\delta+it)^2 + \rho^2} - \frac{-\delta+it}{(-\delta+it)^2 + \rho^2} \right) \rho d\rho$$

を算する.

$$\begin{aligned} D_1(\delta) &= \delta \int_0^{\infty} F(\rho) \left( \frac{1}{(\delta+it)^2 + \rho^2} + \frac{1}{(-\delta+it)^2 + \rho^2} \right) \rho d\rho \\ &\quad + it \int_0^{\infty} F(\rho) \left( \frac{1}{(\delta+it)^2 + \rho^2} - \frac{1}{(-\delta+it)^2 + \rho^2} \right) \rho d\rho \end{aligned}$$

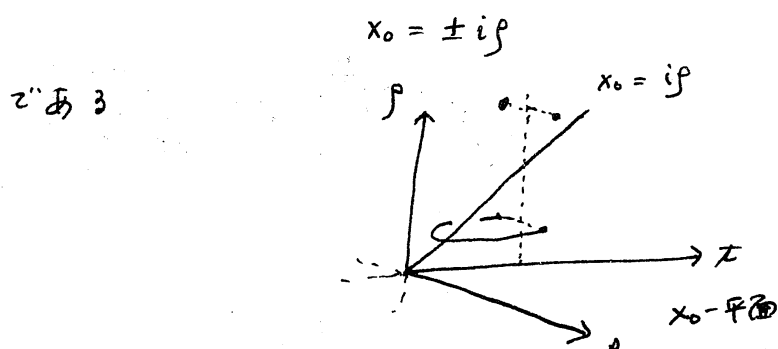
の右辺第1項は  $\Delta \rightarrow 0$  のとき 0 に収束し、第2項は  $\Delta \rightarrow 0$  のとき  $it(-\pi i)F(t) = \pi t F(t)$  に収束する。ゆえに、 $n$  が ~~偶~~ 奇数のとき

$$\frac{1}{2}(\varphi(\Delta+it, x) - \varphi(-\Delta+it, x)) \rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\frac{1}{(n-2)!}} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} (t^{n-2} \omega[g, t, x]).$$

第3項の積分

$$N_2(\Delta) = \int_0^\infty F(\rho) \left( \frac{1}{\sqrt{(\Delta+it)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-\Delta+it)^2 + \rho^2}} \right) \rho d\rho$$

を考える。  $\sqrt{(\Delta+it)^2 + \rho^2}$  と  $\sqrt{(-\Delta+it)^2 + \rho^2}$  の分枝のとり方が問題である。  $x_0^2 + \rho^2 = 0$  の零点は  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  内の直線



$\rho > t$  のとき

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sqrt{(\Delta+it)^2 + \rho^2} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sqrt{(-\Delta+it)^2 + \rho^2} = \sqrt{\rho^2 - t^2} > 0,$$

$0 < \rho < \frac{t}{2}$  のとき

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sqrt{(\Delta+it)^2 + \rho^2} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sqrt{(-\Delta+it)^2 + \rho^2} = i\sqrt{t^2 - \rho^2}$$

となるように分枝を定める。このとき

$$N_2(\lambda) = \int_0^t \quad + \int_t^\infty$$

にあい。2

$$\int_0^t \quad \rightarrow \frac{2}{i} \int_0^t F(p) \frac{p}{\sqrt{t^2 - p^2}} dp \quad (\lambda \rightarrow 0),$$

$$\int_t^\infty \quad \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0)$$

より。すなわち、 $n$ が偶数のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \{ \psi(\lambda + it, x) - \psi(-\lambda + it, x) \} &\rightarrow \frac{1}{(n-2)!!} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} (p^{n-2} \omega[g; p, x]) \frac{p}{\sqrt{t^2 - p^2}} dp \\ &= \frac{1}{(n-2)!!} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \omega[g; p, x] \frac{p^{n-1}}{\sqrt{t^2 - p^2}} dp. \end{aligned}$$

最後に積分

$$D_2(\lambda) = \int_0^\infty F(p) \left( \frac{\lambda + it}{\sqrt{(\lambda + it)^2 + p^2}} - \frac{-\lambda + it}{\sqrt{(-\lambda + it)^2 + p^2}} \right) p dp$$

を考へる。

$$\begin{aligned} D_2(\lambda) &= \lambda \int_0^\infty F(p) \left( \frac{1}{\sqrt{(\lambda + it)^2 + p^2}} + \frac{1}{\sqrt{(-\lambda + it)^2 + p^2}} \right) p dp \\ &\quad + it \int_0^\infty F(p) \left( \frac{1}{\sqrt{(\lambda + it)^2 + p^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-\lambda + it)^2 + p^2}} \right) p dp. \end{aligned}$$

右辺の第1項は  $\lambda \rightarrow 0$  のとき 0 に近づく, 第2項  
は  $\lambda \rightarrow 0$  のとき

$$it \cdot \frac{2}{i} \int_0^t F(\rho) \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho$$

に近づく. これから,  $n$  が偶数のとき,  $\lambda \rightarrow 0$  ならば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \{ \varphi(\lambda + it, x) - \varphi(-\lambda + it, x) \} \\ & \rightarrow \frac{1}{(n-2)!!} t \int_0^t \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^{\frac{n}{2}} (\rho^{n-2} \omega[f; \rho, x]) \frac{\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \\ & = \frac{1}{(n-2)!!} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \omega[f; \rho, x] \frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho. \end{aligned}$$