

## モジュラー群環とモジュラー表現

大阪市大 理 津島 行男

### §1 序

Brauer characters の導入によって ordinary characters の上にさらに精密な議論が考察されるようになった。しばしば複素数体上に一連の "character" theory とよばれるものが確立されたわけだが、その発展のための主流ともいえるテーマは ordinary characters と Brauer characters との関係のより深き追及と云ってよいであろう。しかしながら Brauer characters というのももとは modular 表現が導入されたものである限り、こういった理論の発展のためにはやはり modular 表現そのものの研究も不可欠なものである。そしてこういった研究を推進させる一つの有力な武器はいうまでもなく 多元環 (order も含めて)、たかみちく Frobenius algebra あるいは symmetric algebra の理論であろう。本稿では後に述べる Frobenius algebra に関する中山の定理を

group algebra に応用し 2 modular 表現に関するいくつかの結果を述べる。(近刊 [4] [5])

§2. この章の内容は [1] による。従って詳しくはこれとを参照して欲しい。以後  $k$  は体,  $A$  を  $k$  上有限次の多元環とする。

- $A^* = \text{Hom}_k(A, k)$  の元を linear function (l.f.)
- $a \in A, \lambda \in A^*$  に対し  $\lambda_a(x) = \lambda(xa)$  ( $A^*$  の left  $A$ -module としての作用。)
- $\lambda \in A^*$   $\lambda(Ax) = 0 \Rightarrow x = 0$  なら  $\lambda$  を正則 L.F. と記す  
 $\lambda(xy) = \lambda(yx) \quad \forall x, y \in A$  のとき  $\lambda$  を symmetric  
 とし  $s.l.f.$  と記す。
- $A$  が Frobenius algebra  $\iff A \cong A^*$  as (left)  $A$ -modules  
 $\iff \exists$  L.F.  $\lambda \in A^*$  により  $A$  の 1 に対応する  $A^*$  の元を  
 $\lambda$  とすればよい。
- $A$  が symmetric algebra  $\iff A \cong A^*$  as  $A$ - $A$ -bimodules  
 $\iff \exists$  s.L.F.  $\lambda \in A^*$

Theorem A. (中山 [1])

$A$  を Frobenius algebra (symmetric resp.)  $\lambda$  を L.F. (s.L.F.)

$\mathfrak{f}$  を  $A$  の両側イデアル,  $r(\mathfrak{f})$  をその右零化イデアル

このとき

$A/\mathfrak{f}$  が Frobeniusian (symmetric resp.) over  $k \iff$   
 $r(\mathfrak{f})$  が principal (generated by a central element) 又  $\lambda = 0$  とき  
 $\mu$  は  $A/\mathfrak{f}$  上の L.F. (s. L.F. resp.) とすれば  $\exists c \in A$ ,  
 $\mu\psi = \lambda c$  and  $r(\mathfrak{f}) = cA$  ( $c$  は central resp.),  $\psi: A \xrightarrow{\text{nat.}} A/\mathfrak{f}$   
 (三主)  $\lambda = 0$  とき  $r(\mathfrak{f}) = cA$  なる実は  $r(\mathfrak{f}) = AC$

§3. よく知られているように semisimple algebra は Frobenius algebra である。従って  $\mathcal{R}$  を Frobenius algebra  $A$  の radical とすれば上記の定理より  $r(\mathcal{R}) = AC$ 。一方  $e$  を  $A$  の primitive idempotent とすれば  $r(\mathcal{R})e$  は 極小左イデアルであり、又逆に

任意の irreducible  $A$ -module

はどれかの  $r(\mathcal{R})e$  と同型である。従って上記  $c$  を決定することは ( $A$  を与えて) 非常に興味ある問題である。特に  $G$  が有限群で  $A = kG$  のとき  $r(\mathcal{R})$  の生成元が何らかの意味で特徴づけられるであろうか。残念ながらいまのところこれに対し満足すべき結果を一般の  $G$  については得られなかった。ここでは一応 Theorem A の方法に従って一つの生成元を決め、そこから派生するいくつかの結果を述べてみよう。 $p$  を体  $k$  の標数として、 $|G| = p^n g_0$  ( $(p, g_0) = 1$  とする ( $p=0$  のときは  $|G| = g_0$ ))  $\ell$  を整数とし  $\ell \mid |G|$  を  $\ell$  の素因数分解における  $p$  の指数としよう。よく知られているように  $kG/\mathcal{R}$  は separable

over  $k$ , 従って  $K$  を  $k$  の任意の拡大体  $\pi_K$  を  $kG$  の radical  
 としとき  $\pi_K = K\pi$ ,  $\pi_K \cap kG = \pi$  同様のことが  $r(\pi)$  に  
 ついても成立する。  $kG$  は次の写像  $\lambda$  (以後固定) を通じて  
 Frobeniusian 同時に symmetric となる。

$$\lambda\left(\sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma\right) = a_1 \quad a_{\sigma} \in k \quad 1 \text{ は } G \text{ の identity}$$

$\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_r$  を  $G$  の適当な分解体 ( $\supset k$ ) 上での異なる  
 irreducible characters 全体とする。  $\overline{\psi} = \sum_{i=1}^r \overline{\psi}_i$  とおけば  $\overline{\psi}(\sigma)$   
 は任意の  $\sigma \in G$  に対し 2 素体の中に属する。

Proposition 1.  $v = \sum_{\sigma \in G} \overline{\psi}(\sigma^{-1}) \sigma$  とおけば

$$(1) \quad r(\pi) = (kG)v$$

$$(2) \quad f \in \text{Aut}(G) \text{ なる任意の } f \text{ に対し } v^f = v.$$

(もちろん  $f$  は自然の意味で  $kG$  の自己同型に拡張した上で)

(証明) (1) 上の注意から  $k$  を  $G$  の分解体と仮定してよい。

$$kG/\pi = \bigoplus_{i=1}^r (k)_{n_i}. \quad \psi: kG \xrightarrow{\text{nat.}} kG/\pi, \quad p_i: kG/\pi \xrightarrow{\text{projection}} (k)_{n_i}$$

$p_i \psi$  により  $kG$  の表現が得られるがその character を  $\overline{\psi}_i$  とする。

よく知られたように trace map  $\text{tr}_i: (k)_{n_i} \rightarrow k$  は

L.F. であり従って  $\sum \text{tr}_i$  も  $kG/\pi$  上の L.F. である。

従って Th. A. より  $\exists v \in kG, (\sum \text{tr}_i) \psi = \lambda v, r(\pi) = (kG)v$

$v = \sum a_{\sigma} \sigma$  とする。もちろん  $(\sum \text{tr}_i) \psi = \overline{\psi}$  である

$$\alpha_\sigma = \lambda(\sigma^{-1}v) = \lambda_v(\sigma^{-1}) = \overline{\varphi}(\sigma^{-1})$$

(2)  $\overline{\varphi}_i^f(\sigma) = \overline{\varphi}_i(\sigma^f)$  によ,  $\sigma^f$  は  $\{\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_r\}$  上に置換を引  
き起す。とくに  $\overline{\varphi}(\sigma^f) = \overline{\varphi}^f(\sigma) = \overline{\varphi}(\sigma)$  となり明らか。

$\overline{\varphi}(\sigma)$  が何らかの意味で特徴づけができればいいが。そうで  
ない限り上の  $v$  は余りいい形とはならないであろう。むしろ  
興味あるのは (2) の方である。  $\Sigma = \Sigma^H$  を  $G$  の正規部分群とし  
 $m = \text{radical of } kH$ ,  $\mathcal{L} = kGm = mkG$  とすれば  $\mathcal{L}$  は  
nilpotent two sided ideal である。

Corollary 1. 上の記号の下で

- (1)  $kG/\mathcal{L}$  は symmetric algebra over  $k$
- (2)  $(\mathcal{L} : \pi e) = \{x \in kG \mid \pi x \in \mathcal{L}\}$  任意の primitive  
idempotent  $e$  に対し  $(kG)e/\pi e \simeq (\mathcal{L} : \pi e)/\mathcal{L}e$

Proof. (1)  $H \triangleleft G$  だから  $G$  の各元は  $H$  の自己同型を induce  
する。  $\gamma_H(m)$  を  $m$  の  $kH$  における annihilator ideal とされ  
ば Prop 1 より  $\gamma_H(m) = kH \cdot v'$  で  $v'$  は  $kG$  の中で central.  
よって  $\gamma(\mathcal{L}) = (kG)/v'$  は central element  $v'$  で生成され  
た単項イデアル。従って Theorem A より  $kG/\mathcal{L}$  は symmetric.

(2) 一般に  $A$  が symmetric to  $\mathcal{L}$   $Ae/\mathcal{L}e \simeq r(\mathcal{L})e$ .

よって  $(\mathcal{L}:\mathcal{R})/\mathcal{L}$  が  $k\mathcal{G}/\mathcal{L}$  の radical  $\mathcal{R}/\mathcal{L}$  の right annihilator ideal であることに注意して

$$(k\mathcal{G})e/\mathcal{L}e \simeq (k\mathcal{G})\bar{e}/\mathcal{R}\bar{e} \simeq (\mathcal{L}:\mathcal{R})\bar{e}/\mathcal{L} \simeq (\mathcal{L}:\mathcal{R})e/\mathcal{L}e$$

である。  $\bar{e}$  は  $e$  の  $k\mathcal{G}/\mathcal{L}$  における class である。 Q.E.D.

ここでさらに  $H$  が  $G$  の normal  $p$ -subgroup であること仮定し

よ。このとき  $\mathcal{M} = \ker(kH \xrightarrow{\text{aug.}} k) = \{\sum a_\sigma \sigma \mid \sum a_\sigma = 0\}$

よって  $r_H(\mathcal{M}) = kH \triangleleft_H = k \triangleleft_H$ ,  $\Delta_H = \sum_{\sigma \in H} \sigma$ . かくに

$$r(\mathcal{R}) \subset r(\mathcal{L}) = k\mathcal{G} \Delta_H \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{R}$$

(もちろん  $H$  は  $G$  が non-trivial normal  $p$ -subgroup であること)

$G$  は defect 0 の block であること。この事実に対応してゐる。後の章参照)

Lemma 1.  $P_2 \supset H_2 \supset P_1 \supset H_1$  をすべて  $G$  の normal subgroups

とし,  $P_i/H_i$  は non-trivial  $p$ -groups である。  $\mathcal{L}_i$  を前の通り

$$\mathcal{L}_i = k\mathcal{G}(\text{rad. } kP_i) \quad \mathcal{F}_i = \ker(k\mathcal{G} \xrightarrow{\text{nat.}} k(\mathcal{G}/H_i))$$

$$(1) (\mathcal{L}_2 + \mathcal{F}_2 : \mathcal{R}) \supset \mathcal{L}_2 + \mathcal{F}_2 \supset (\mathcal{L}_1 + \mathcal{F}_1 : \mathcal{R}) \supset \mathcal{L}_1 + \mathcal{F}_1$$

(2)  $e \notin \mathcal{F}_2$  である。  $e$  は primitive idempotent である。

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{F}_1 : \mathcal{R})e / (\mathcal{L}_1 + \mathcal{F}_1)e \simeq (k\mathcal{G})e / \mathcal{R}e$$

proof. (1) 明らかに 真中の包含関係も証明すればいい。

$$\text{rad } k(P_2/H_2) \cdot k(G/H_2) = L_2 + \cancel{f_2}/\cancel{f_2} \supset r(\text{rad } k(G/H_2)) = \text{これは}$$

$P_2/H_2$  が  $p$ -group だから。  $\bar{G} = G/H_1$ ,  $\bar{P}_1 = P_1/H_1$  とおく。

$$L_1 + \cancel{f_1}/\cancel{f_1} = (L_1 + f_1 : \cancel{f_1})/\cancel{f_1} = ((\text{rad } k\bar{P}_1)k\bar{G} : \text{rad } k\bar{G})$$

$$= r(\text{rad } k(\bar{G}/\bar{P}_1)) \simeq r(\text{rad } k(G/P_1)). \quad \text{ここでも目の等号}$$

は  $\bar{P}_1$  が  $\bar{G}$  の normal  $p$ -subgroup だから。 — 最後の

iso. は  $\text{mod } f_1 \in \text{mod } f$  によって与えられるとわかる。

$$\text{結局 } r(\text{rad } k(G/P_1)) = (L_1 + f_1 : \cancel{f_1}) + \cancel{f_1}/\cancel{f_1} = \text{ここで } f = \ker(kG \rightarrow k(G/P_1))$$

—  $P_1 \subset H_2$  が induce する  $k(G/P_1) \rightarrow k(G/H_2)$  は epimorphism だから  $r(\text{rad } k(G/P_1)) \supset r(\text{rad } k(G/H_2))$

$$\text{の中に移される。即ち } L_2 + \cancel{f_2}/\cancel{f_2} \supset (L_1 + f_1 : \cancel{f_1}) + \cancel{f_1}/\cancel{f_1}$$

(2) 上の Cor. 1 (2) で  $G$  の代りに  $G/H_i$  を与えればよい。

仮定から  $k(G/H_i)e \neq 0$ . 即ち  $e$  は  $\text{mod } f_i$  上で primitive

idempotent. Q.E.D

(2) の中の仮定  $e \notin f_i$  はもし  $e$  が trivial representation に対応する idempotent なら常に. 即ち  $e$  は subgroup  $H_i$  に対してのみみたす。何故か  $(kG)e/\pi e \simeq k \simeq k \Delta G$

( $\because \Delta G = \sum_{g \in G} g$ ) であるから  $e \Delta G \neq 0$ . 即ち  $e$  は

augmentation ideal  $\{\sum a_r \sigma \mid \sum a_r = 0\}$  に  $\lambda$  する。これは  
明らか。

Theorem 1.  $G$  の主組成列の商群のうち  $p$ -群 となるものの  
個数を  $m$  とする。  $c_{11}$  を  $G$  の first Cartan invariant とすれば  
 $c_{11} \geq m+1$

proof. 少なくとも  $m$  個あることは上の注意と Lemma 1(2) より  
明らか。  $\lambda$  が加わるのは唯一つの極小イデアル  $\gamma(\pi)e$  の分であ  
る。(詳細は省く)

(註) Brauer-Nesbitt [2] によれば  $N$  を  $G$  の  $p$ -regular  
elements の個数とすれば  $c_{11} \geq |G|/N$  しか(上の結果は  
これと一応無関係である。例えば  $p$  を odd prime とし  $2$   
 $G$  を位数  $2p^m$  の dihedral group とする。  $G$  の  $p$ -regular elements  
の個数は  $p^m+1$   $\therefore |G|/N < 2$ 。一方  $G$  の  $p$ -Sylow 群は  
normal で cyclic だから 上記の  $m=n$ 。(実際は  $c_{11} = p^{n+1}/2$ )

§<sup>4</sup> 記号は前の通りとする。  $P_i$  を  $kG$  の主直既約射影加群で  
 $P_i/\pi P_i$  が irreducible character  $\overline{\psi}_i$  を afford するものとする。  
 $P_i$  の  $k$  上の次元を  $u_i$  とすれば一般に  $u_i = p^n h_i$  であるが。  
初めの  $u_1, \dots, u_t$  を丁度  $p^r$  で割り切れるものとする。(  $t \leq r$  )  
~~全部~~

Brauer character に因るよく知られた直交関係 (〔〕 p561)

から 次の等式が成立する。

$$(*) \quad \sum_{i=1}^t h_i \bar{\chi}_i(\tau) = \begin{cases} g_0 & \tau \text{ が } p\text{-element のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

(もちろん  $h_i$  は体  $k$  の中で考えられおり 又  $\bar{\chi}_i(\tau) = \overline{\chi_i(1)}$ .)

Lemma 2.  $k$  を  $G$  の分解体,  $z = \sum_e (kg)e + \mathcal{R}$ .  $\therefore z$  は

$2_p(\dim_k (kg)e) > n$  なる primitive idempotent 全部を含む。

$c$  を  $G$  の  $p$ -elements 全部の和 (in  $kg$ ) とすれば

$$r(z) = (kg)c$$

proof. prop 1 の証明の記号をそのまま使う。  $kg/\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^t (k)_{m_i} \oplus \bigoplus_{j=t+1}^m (k)_{n_j}$

明らかに  $z = \psi^{-1}(\bigoplus_{j>t} (k)_{n_j})$  であり従って 両側 ideal

$$kg/z \cong \bigoplus_{i=1}^t (k)_{m_i}. \quad \therefore \mu = \sum_{i=1}^t h_i \text{tr}_i \text{ とすれば仮定から}$$

$h_i \neq 0$  なる  $\mu$  は  $kg/z$  上の L.F. 以下 prop 1 と同じ

議論によつて  $r(z) = (kg)c$  を得る。もちろん (\*) は使う。

特に  $z \in \mathcal{R}$  たり  $r(\mathcal{R}) \cap r(z) \ni c$  を得る。そしてこれは

§ 2 の初めに述べた注意によつて  $k$  を分解体と仮定しなくともよい。即ち

Theorem 2.  $r(\mathcal{R})$  は  $p$ -elements 全部の和を含む。

この定理は例の Maschke の定理の精密化といつてよい。即ち

$$p \nmid |G| \text{ なる } c=1 \text{ なる } r(\mathcal{R}) \geq 1 \text{ なら } \mathcal{R} = 0.$$

所以  $e$  を primitive idempotent とすれば  $r(\mathcal{R})e$  は極小であ

た。上の定理より  $r(\mathcal{R})e \subset (kG)e$

Corollary 2.  $k$  を  $G$  の分解体と仮定する。

$$r(\mathcal{R})e = (kG)e \iff \ell_p(\dim_k kGe) = n$$

proof.  $\ell(\cdot)$  左零化イデアルをとり作用とする。Lemma 2

$$\text{より } ce=0 \iff e \in \ell(c) = \ell(r(\mathcal{J})) = \mathcal{J} \iff \ell_p(\dim kGe) > n.$$

Corollary 3.  $x = \sum a_r r$  に対し  $x(p)$  をこの表示の中に

でてくる  $p$ -elements の係数全体の和とする。

$$x \in \mathcal{R} \implies x(p) = 0$$

proof.  $x(p)$  は  $x$  の  $1$  の係数 である = 明らか。

一般に  $\mathcal{R}$  がどのような元から構成されているかという問題は非常に難しく、その完全なる解答は  $G$  の Sylow  $p$ -群が  $G$  で normal であるという場合以外わかっていない。上の結果はその一つ必要条件を与えている。

所以  $G$  が  $p$ -可解なる実はすべての primitive idempotent に対して  $\ell_p(\dim_k kGe) = n$  となる (P. Fong [3]) によって

$$\mathcal{J} = \mathcal{R} \text{ であり } r(\mathcal{J}) = r(\mathcal{R}).$$

Corollary 4.  $G$  が  $p$ -可解ならば  $r(\mathcal{H}) = (kG)C$

### §5. Defect 0 の block

ここで  $K$  を代数体,  $f$  を  $p$  を含む一つの prime divisor,  
 $R$  を  $f$ -整数のつくる ring,  $k = R/f$  とする。任意の  $kG$   
 加群に対し  $\exists N: Rf$ -module  $M = K \otimes_R N$

$kG = \bigoplus B_i$  を  $kG$  の block ideal への分解とする。この分解と  
 one to one に対応して  $G$  の ordinary characters が完全に  
 disjoint systems  $\tilde{B}_i$  に分解される。即ち与えられた  $M$  から  
 afford された irreducible character をすれば  $\chi \in \tilde{B}_i$

$\Leftrightarrow \bar{\chi}_0 = N/fN$  の主組成商加群のすべてが  $B_i$  に属する。

各  $B_i$  (又は  $\tilde{B}_i$ ) には  $G$  の  $p$ -subgroup が共役を除いて唯一つ  
 対応する。これを  $D$ ,  $|D| = p^d$  とするとき  $B_i$  は defect group  $D$   
 をもつ defect  $d_i$  の block とよばれる。そしてある  $p$ -regular  
 element  $\alpha$  が存在して  $C_G(\alpha)$  の  $p$ -Sylow 群が  $D$  となる。

character の研究の上で block, defect groups の果す役割は  
 非常に大きい。特に  $\chi(1)$  が  $p^n$  で割り切れぬ場合はこれを  
 今も  $\tilde{B}_i$  は唯一つの元とみえたり,  $\bar{\chi}$  は irreducible,  $B_i$  は

simple algebra となる。この場合  $D = \{1\}$  であることが

知られていて従って  $d=0$ , 即ち defect 0 の block と呼ば  
 れる。こういう block は必ずしも存在するとは限らないが

その存在条件は(一般論として)  $G$  の  $p$ -subgroup を与えたときそれを defect group とするような block の存在と深く関係する。その存在の必要条件については Brauer はもちろんとして Green (Math. Z. 79 (1962)), 十分条件については 伊藤(昇)の諸結果( $G$ : solvable Nagoya J. 1951, 1970) 等が興味深い。ここでは前章の応用として

Theorem 3.  $C$  を  $p$ -elements 全部の和とする。  $C^2$  は defect 0 の block idempotents の和である。

即ち defect 0 の block が存在するか否かは  $G$  の  $p$ -elements 全体の乗法構造に依存しているといえる。しかし実際に  $C^2$  を計算することは容易である。

まず証明の前に2つの注意を Lemma の形で述べておく。

いづれも証明は容易である。

Lemma 3.  $A$  を  $k$  上の (quasi) Frobenius algebra.  $e \in A$  の primitive idempotent.  $Ae$  が irreducible なら  $Ae$  を含む  $A$  の block は simple algebra.

Lemma 4.  $kG$  の simple block は defect 0.

(即ちその degree が  $p^n$  でわかれる ordinary character かつ)

この § の初めに述べた方法で induce された block)

定理の証明 まず  $B$  を positive defect の block,  $\delta$  を  
その block idempotent とする.  $e$  を  $B$  の任意の primitive  
idempotent とすれば Lemma 3.4, 5)  $\mathcal{R}e \neq 0$

$$\therefore \mathcal{R}e = r(\mathcal{R})e \ni ce \quad \therefore ce \in \mathcal{R} \quad \therefore c^2e = 0$$

$\therefore c^2\delta = 0$ . 次に  $\delta$  を defect 0 の block idempotent  
とすれば  $c = 1 + (\text{p-element の class の和})$  である

$$\psi_B(c) = \psi_B(1) = 1 \quad (\psi_B \text{ は block } B \text{ の unique linear character})$$

$$\therefore c\delta = \psi_B(c)\delta = \delta \quad (\text{初めの等号は } B \text{ が simple である})$$

$$\therefore c^2\delta = c\delta = \delta. \quad \text{Q.E.D.}$$

Corollary 5.  $kG$  が defect 0 の block を持つ

$\exists \theta, \theta_2 : \text{p-elements}$  があり  $\theta, \theta_2$  は defect 0 の  
p-regular element.

proof. defect 0 の block idempotent は defect 0 の  
p-regular elements の和であるから。 Q.E.D.

この逆は一般には真目であらう。もし  $p=2$  で  $\theta_1, \theta_2$  が

共に involution なる条件は  $\exists v : \text{p-regular defect 0}$

$\exists \theta : \text{involution} \quad \theta v \theta = v^{-1}$  と同値である。

Theorem 4.  $G$  の Sylow 2-subgroup が elementary

abelian とする。このとき  $G$  が 2-defect 0 の block を  
 もつ  $\iff \exists v : 2\text{-regular of defect } 0, \exists \theta : \text{involution}$   
 $\theta^{-1} v \theta = v^{-1}$

Proof.  $\Leftarrow$  を示せばよい。  $\mathcal{S} = \{(I, J) \mid IJ = v : I, J \text{ は involution}\}$  とし  $\mathcal{S}$  の個数が odd である  $\Rightarrow$   $\epsilon$  を示せば  
 よい。これは involution に関する簡単な計算から  
 直ちに知られる。

### 文献

- [1] 中山, 東屋 ; 代数学 II (岩波)
- [2] R. Brauer and C. Nesbitt : *Annals of Math.* 42 (1941)
- [3] P. Fong : *Trans. Amer. Math. Soc.* 103 (1962)
- [4] 津島 : *Osaka J.* (to appear)
- [5] " : in preparation