

多重コクセター配置の自由性について¹

吉永正彦 (Masahiko Yoshinaga)

京都大学数理解析研究所

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

e-mail address: yosinaga@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 有限鏡映群の鏡映面とベクトル場.

研究の動機や背景は後で述べることにして, 記号の定義から主結果までをまず述べる.

V を内積 I を持った実 ℓ 次元ベクトル空間とする. $x_1, x_2, \dots, x_\ell$ をその座標系, $\mathbb{R}[V] := \mathbb{R}[x_1, \dots, x_\ell]$ を V 上の多項式環とおく. このとき, $O(V, I)$ の既約な有限部分群 W で, 直行鏡映変換で生成される群 (有限鏡映群) を考える. W のなかの各直行鏡映変換の鏡映面 $H \subset V$ を集めたものを $\mathcal{A}$ で表し, 各 $H \in \mathcal{A}$ に対して, その定義式 $\alpha_H \in V^\vee$ ($\text{Ker}(\alpha_H) = H$) を固定しておく. Chevalley によって, V 上の W 不変式環 $\mathbb{R}[V]^W$ が ℓ 個の代数的に独立な斉次多項式 $P_1, P_2, \dots, P_\ell \in \mathbb{R}[V]^W$ で生成されることが証明されている. ここで次数を $\deg P_1 \leq \deg P_2 \leq \dots \leq \deg P_\ell =: h$ としておくと次が成り立つ (h はコクセター数と呼ばれる),

$$2 = \deg P_1 < \deg P_2, \deg P_{\ell-1} < h. \quad (1)$$

$$|\mathcal{A}| = \frac{h\ell}{2} \quad (2)$$

Der_V を V 上の多項式係数ベクトル場全体とする, つまり

$$\text{Der}_V := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid f_i \in \mathbb{R}[V] \right\}.$$

これは階数 ℓ の自由 $\mathbb{R}[V]$ 加群となる. ここで一般にイデアル $I \subset \mathbb{R}[V]$ に対して, I の共通零点として定義される多様体 $\mathcal{V}(I)$ にベクトル場 $\delta \in \text{Der}_V$ が接触するための条件が $\delta I \subset I$ であったことを思い出して, 超平面配置 $\mathcal{A}$ に多重に接触するベクトル場を次で定義する.

定義 1.1 ([Te2]) 非負整数値関数 $\bar{m} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 接触度数 $\bar{m}$ で各鏡映面に接するベクトル場全体の集合を

$$\mathbb{D}^{\bar{m}}(\mathcal{A}) := \{ \delta \in \text{Der}_V \mid \delta \alpha_H \in \alpha_H^{\bar{m}(H)} \cdot \mathbb{R}[V], \forall H \in \mathcal{A} \}$$

で定義する. □

¹多変数関数論の萌芽的研究, 2002 年 11 月 18 日

$\bar{m} \equiv 1$ の場合は普通に超平面に接するベクトルの集合で、「対数的ベクトル場」と呼ばれる [Sa1].

問題としたいのは $\mathbb{D}^{\bar{m}}(\mathcal{A})$ の $\mathbb{R}[V]$ 加群としての構造, 特に自由加群になるかどうか, 自由加群の場合はその基底の次数 ($\delta = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ の次数を $\deg \delta := \max\{\deg f_i\}_i$ で定義する) である. $\bar{m} \equiv 0$ の時は $\mathbb{D}^0(\mathcal{A}) = \text{Der}_V$ に他ならない. $\bar{m} \equiv 1$ の時も階数 ℓ の自由 $\mathbb{R}[V]$ 加群となることが, 鏡映群不変式論を使って基底を構成することにより証明されていた [Sa1][Sa2]. 一般に接触度数が一定 $\bar{m} \equiv m \in \mathbb{Z}$ の場合は次が証明されていた.

定理 1.2 [Te2] $\mathbb{D}^m(\mathcal{A})$ は自由加群で, 基底の次数は次で与えられる.

$$m = 2k \text{ の時は, } \{kh, kh, \dots, kh\}.$$

$$m = 2k + 1 \text{ の時は, } \{kh + \deg P_1 - 1, \dots, kh + \deg P_\ell - 1\}.$$

□

[Te2] では具体的に基底を構成しているのだが, その基底は (個人的な印象では) とても複雑な表示をしている. また, 奇数と偶数で基底の次数の振る舞いが違ってくことも不思議なのだが, 次の結果で実は, 接触度数を一斉に $+2$ した時により振る舞いをしていることがハッキリと分かる.

定理 1.3 [Y] $\bar{m}$ を $\{0, 1\}$ に値をとる接触度数として, $\mathbb{D}^{\bar{m}}(\mathcal{A})$ が自由 $\mathbb{R}[V]$ 加群であると仮定, $\delta_1, \dots, \delta_\ell$ をその基底とする. この時 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\mathbb{D}^{\bar{m}+2k}(\mathcal{A})$ も自由で, 基底の次数は

$$\{kh + \deg \delta_1, \dots, kh + \deg \delta_\ell\}$$

で与えられる.

□

$\bar{m} \equiv 0$ または $\bar{m} \equiv 1$ と置くと定理 1.2 が得られる.

2 原始ベクトル場による基底の構成.

本節では定理 1.3 の証明に必要な, [Sa2] の結果をまとめる.

前節で不変式環 $\mathbb{R}[V]^W$ の生成元 $P_1, \dots, P_\ell$ を固定したが, これは標準的に定まるものではない, しかし式 (1)

$$\deg P_i < \deg P_\ell, \quad (i = 1, \dots, \ell - 1)$$

から有理ベクトル場 $D := \frac{\partial}{\partial P_\ell}$ は生成元の取り方に依らず (定数倍を除いて) 一意に決まる. これを原始ベクトル場 (Primitive vector field) とよぶ.

$$Q := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H \frac{\partial(P_1, \dots, P_\ell)}{\partial(x_1, \dots, x_\ell)},$$

と置くと, 原始ベクトル場 D は次の表示を持つ.

$$D \doteq \frac{1}{Q} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_{\ell-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial P_1}{\partial x_\ell} & \cdots & \frac{\partial P_{\ell-1}}{\partial x_\ell} & \frac{\partial}{\partial x_\ell} \end{pmatrix}.$$

(実際この式の右边が $DP_1 = \cdots = DP_{\ell-1} = 0$, $DP_\ell = 1$ を満たすことは明らか.)

次にアフィン接続 $\nabla : \text{Der}_V \times \text{Der}_V \rightarrow \text{Der}_V$ を定義する.

定義 2.1 二つのベクトル場 $\delta_1, \delta_2 \in \text{Der}_V$ (ただし, $\delta_2 = \sum_{i=1}^{\ell} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$) に対して, $\nabla_{\delta_1} \delta_2 \in \text{Der}_V$ を

$$\nabla_{\delta_1} \delta_2 := \sum_{i=1}^{\ell} (\delta_1 f_i) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

で定義する. □

共変微分の中でも原始ベクトル場 D による微分 ∇_D が特に重要である. Saito[Sa2] によって, ∇_D はある種の逆 ∇_D^{-1} を持つことが示された.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[V]^{W,D} &:= \{f \in \mathbb{R}[V]^W \mid Df = 0\} \\ &= \mathbb{R}[P_1, \dots, P_{\ell-1}] \end{aligned}$$

とおく. この時 ∇_D は $\mathbb{R}[V]^{W,D}$ 加群としての準同型である.

定理 2.2 自然数 $n \geq 1$ に対して,

$$\mathcal{G}_n := \left\{ \delta \in \text{Der}_V^W \mid (\nabla_D)^n \delta \in \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}[V]^{W,D} \frac{\partial}{\partial P_i} \right\},$$

とすると, $n \geq 0$ に対して, $\nabla_D : \mathcal{G}_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_n$ は $\mathbb{R}[V]^{W,D}$ 同型である. また,

$$\text{Der}(\mathcal{A})^W = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{G}_n.$$

は $\mathbb{R}[V]^{W,D}$ 加群としての直和分解で, $\mathcal{H}^k := \bigoplus_{n \geq k} \mathcal{G}_n$ と置くと, $\mathcal{H}^k$ は階数 ℓ の自由 $\mathbb{R}[V]^W$ 加群となる. □

我々が今回必要なのは $\nabla_D^{-1} : \text{Der}_V^W \rightarrow \text{Der}_V^W$ なる単射の存在である.

以上の結果を用いて, $\mathbb{D}^{m+2k}(\mathcal{A})$ の基底を構成しよう. オイラーベクトル場

$$E := \sum_{i=1}^{\ell} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

は W 不変 $E \in \text{Der}_V^W$ であることに注意する.

定理 2.3 [Y] $\bar{m} : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ に対して, $\mathbb{D}^{\bar{m}}(\mathcal{A})$ が自由 $\mathbb{R}[V]$ 加群で, $\delta_1, \dots, \delta_\ell$ をその基底とする. この時

$$\nabla_{\delta_1} \nabla_D^{-k} E, \dots, \nabla_{\delta_\ell} \nabla_D^{-k} E$$

が $\mathbb{D}^{\bar{m}+2k}(\mathcal{A})$ の基底をなす. □

3 自由超平面配置の一般論

本節では上の研究の背景にある超平面配置の結果, 特にベクトル場の自由性やその基底の次数と複素化された補集合のポアンカレ多項式との関係, 及び動機となった予想について簡単に述べる.

今までと同様, V を ℓ 次元ベクトル空間で, $\mathcal{A}$ を有限個のアフィン超平面の集まりとする (超平面が原点を通るとは限らないとする). 各 $H \in \mathcal{A}$ に対して定義方程式となる一次式 α_H を固定しておく.

定義 3.1

$$\mathbb{D}^1(\mathcal{A}) = \{\delta \in \text{Der}_V \mid \delta \alpha_H \in \alpha_H \cdot \mathbb{R}[V], \forall H \in \mathcal{A}\}$$

が自由 $\mathbb{R}[V]$ 加群の時 $\mathcal{A}$ が自由配置 (free arrangement) であると言い, その基底 $\delta_1, \dots, \delta_\ell \in \mathbb{D}^1(\mathcal{A})$ の次数の組 $\exp = \{\deg \delta_1, \dots, \deg \delta_\ell\}$ を $\mathcal{A}$ の冪指数 (exponent) と呼ぶ. □

超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して, このように $\mathcal{A}$ に接触するベクトル場の自由性やその基底の次数にこだわる理由は次の定理による.

定理 3.2 [Tel] V が ℓ 次元複素ベクトル空間で, $\mathcal{A}$ が V 上の自由配置, $\exp = \{e_1, e_2, \dots, e_\ell\}$ をその冪指数とすると, 超平面達の補集合のポアンカレ多項式が次の表示を持つ.

$$\sum_{n=0}^{\ell} \dim H^n(V - \cup_{H \in \mathcal{A}} H, \mathbb{C}) t^n = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + e_i t).$$

□

ポアンカレ多項式が整数係数で一次式に分解するというのは, 一般の超平面配置では起らず, “自由” という条件がかなり強い位相的な束縛であることが分かる. ちなみにこの定理の逆は成り立たない.

またそれ以前の結果 (Orlik-Solomon, Zaslavsky) と併せることによって, 実 (自由) 超平面配置の補集合の連結成分, 及び (相対的) 有界連結成分の個数が冪指数を使ってそれぞれ

$$\prod_{i=1}^{\ell} (1 + e_i), \quad \prod_{i=1}^{\ell} (e_i - 1)$$

で与えられることが分かる. 冪指数, 複素化の補集合のポアンカレ多項式が超平面配置の組合せ論的構造を背後から統制しているのである.

次にアフィン超平面配置の自由性と多重に接触するベクトル場の関係を述べた Ziegler の結果 [Zi] を述べる. 一般に V のアフィン超平面 H に対して H と平行な原点を通る $(\ell-1)$ 次元部分ベクトル空間を $\tilde{H}$ で表すことにする. アフィン超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して, (原点を通る) 超平面配置 $\tilde{\mathcal{A}}$ を

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{\tilde{H} \mid H \in \mathcal{A}\},$$

また関数 $\bar{m}$ を

$$\bar{m} : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{Z}, H \longmapsto \#\{H' \in \mathcal{A} \mid \tilde{H}' = H\}$$

平行な平面の枚数で定める. 以上の準備の下 Ziegler の結果は次のように述べられる.

定理 3.3 [Zi] アフィン超平面配置 $\mathcal{A}$ が自由配置で, $\delta_1, \dots, \delta_\ell$ を $\mathbb{D}^1(\mathcal{A})$ の基底とする. $\delta \in \mathbb{D}^1(\mathcal{A})$ に対してその最高次の部分を $L(\delta) \in \mathbb{D}^{\bar{m}}$ と書くことにすると,

$$L(\delta) \in \mathbb{D}^{\bar{m}}(\tilde{\mathcal{A}})$$

が成り立ち, また $L(\delta_1), \dots, L(\delta_\ell)$ は $\mathbb{D}^{\bar{m}}(\tilde{\mathcal{A}})$ の基底となる. $\square$

4 ルート系から決まるアフィン超平面配置に関する問題

今回の研究の動機となった Edelman-Reiner の予想とその一般化を述べよう. V を ℓ 次元ユークリッド空間とし, $\Phi \subset V^\vee$ をルート系として, 正ルートの集合 $\Phi^+ \subset \Phi$ を固定する.

さて, ルート $\alpha \in \Phi$ が定める超平面 $H_{\alpha,0} := \{\alpha = 0\}$ を考えると, これは §1 で扱った有限鏡映群の鏡映面の集合として扱える. これを平行移動した超平面を使ったアフィン超平面配置を考える. $\alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$H_{\alpha,k} := \{x \in V \mid \alpha(x) = k\}$$

と置いて, $s, t \in \mathbb{Z} (s \leq t)$ に対してアフィン超平面配置 $\mathcal{A}_\Phi^{[s,t]}$ を次のように定義する.

$$\mathcal{A}_\Phi^{[s,t]} := \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi^+, k = s, s+1, \dots, t\}.$$

これは s, t の取り方に関してかなり自由度があって, 研究 (主に組合せ論的な研究) を始めた人に因んだ名前のついた系列がいくつかある. Edelman-Reiner は次の予想を述べた,

予想 4.1 [ER] $\{e_1, e_2, \dots, e_\ell\}$ を $\mathcal{A}_\Phi^{[0,0]}$ の冪指数, $h := e_\ell + 1$ (コクセター数) とすると,

- (i) 非負整数 a に対して extended Catalan arrangement $\mathcal{A}_\Phi^{[-a,a]}$ は自由で, 冪指数は $\{ah + e_1, ah + e_2, \dots, ah + e_\ell\}$.
- (ii) 非負整数 a に対して extended Shi arrangement $\mathcal{A}_\Phi^{[-a+1,a]}$ は自由で, 冪指数は $\{ah, ah, \dots, ah\}$.

(i)(ii) 共に A 型ルート系の場合には超平面を一枚一枚増やしていく様子を調べることに
よって解かれている ([ER], [Ath]). しかしこのような“自由性”は非常に稀な性質で、未
だ知られていないルート系の深い性質に触れているのでは、という思いからルート系の分
類を使わない、ワイル群不変式論に依った証明があるだろうと想像している。

さて、この予想、Ziegler の定理 3.3 及び Terao の定理 1.2 の関係は明らかであろう。図示
すると

$$\text{Edelman-Reiner 予想} \xrightarrow{(\text{Ziegler})} \text{Terao の多重自由性}$$

となる。Terao 研究の動機は Edelman-Reiner 予想の肯定的な証拠としての、基底とな
るべきベクトル場の主要項の構成であった。ここで定理 1.2 の若干の一般化である定理
1.3 を思いだそう。この結果に基づいて Edelman-Reiner の予想を一般化するというのは、
無謀であろうか？

予想 4.2 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\Phi}^{[0,0]}$ をルート鏡映面からなる超平面配置とし、接触度 $\bar{m} : \Phi^+ \rightarrow \{0, 1\}$
に対して $\mathbb{D}^{\bar{m}}(\mathcal{A})$ が自由で冪指数が $\{e_1, e_2, \dots, e_\ell\}$ であると仮定する。この時、 $\mathcal{A}_{\Phi}^{[-a+1, a]}$
も自由で、冪指数は $\{ah + e_1, ah + e_2, \dots, ah + e_\ell\}$ となるであろう。 $\square$

$\bar{m} \equiv 1$ の場合が extended Catalan $\mathcal{A}_{\Phi}^{[-a, a]}$ に、 $\bar{m} \equiv 0$ の場合が extended Shi $\mathcal{A}_{\Phi}^{[-a+1, a]}$ に
それぞれ対応している。また、Ziegler の定理 3.3 から得られる主要項の多重自由性が丁度
定理 1.3 に対応している。

参考文献

- [Ath] C. Athanasiadis, On free deformations of the braid arrangement. *European J. Combin.* **19** (1998), no. 1, 7–18.
- [ER] P. Edelman, V. Reiner, Free arrangements and rhombic tilings. *Discrete and Computational Geometry* **15** (1996), 307–340.
- [Sa1] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **27** (1980), no. 2, 265–291.
- [Sa2] K. Saito, On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **29** (1993), no. 4, 535–579.
- [Sa3] K. Saito, Finite reflexion group and related geometry (A motivation to the period mapping for primitive forms). preprint, 2000
- [Te1] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula. *Invent. Math.* **63** (1981), no. 1, 159–179.
- [Te2] H. Terao, Multiderivations of Coxeter arrangements. *Invent. Math.* **148**(2002), 659–674.
- [Te3] H. Terao, The Hodge filtration and contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. (math.CO/0205058) preprint
- [Y] M. Yoshinaga, The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **78**(2002), no. 7, 116–119.
- [Zi] G. M. Ziegler, Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. *Singularities* (Iowa City, IA, 1986), 345–359, *Contemp. Math.*, 90, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.