

氏 名	はや かわ たか ゆき 早 川 貴 之
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	論 理 博 第 1417 号
学位授与の日付	平 成 15 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities (3次元端末特異点のブローアップ)

論文調査委員	(主 査) 教 授 森 重 文 教 授 向 井 茂 助 教 授 中 山 昇
--------	--

論 文 内 容 の 要 旨

X を正規代数多様体とすると、 X が端末特異点であるとは、

1. ある正の整数 m に対して mK_X が Cartier 因子、
2. ある特異点解消 $f: W \rightarrow X$ があって、 $\sum E_i$ を f の例外因子として

$K_W = f^*K_X + \sum a_i E_i$ とかいたとき、すべての a_i が正、

をみたすことをいう。1 をみたす最小の m を X の指数 (index) といい、2 の a_i を E_i の食い違い係数 (discrepancy) といい。2 に表れる E_i のうち、 a_i が 1 より小さいものは特異点の解消によらずに定まる特異点自身の不変量であり、他のものと比べて重要性が高いと考えられる。この学位論文は、3次元の端末特異点について、具体的な分類を用いて、特異点上にある食い違い係数の小さい素因子についての研究、およびその応用として得られるいくつかの結果を扱っている。

主論文1では、(cD/2)型以外の指数 m が2以上の3次元端末特異点 X について、双有理射 $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ であって π の例外因子が食い違い係数 $1/m$ の素因子となるようなものをすべて求めている。それらはすべて X を4次元商特異点の中に埋め込んでおいて、適当な重みを与えた重み付きのブローアップで得られる。一般には $\bar{X}$ は標準特異点を持った代数多様体になるのだが、特に $\bar{X}$ が端末特異点しか持たない代数多様体になるためには、与えるべき重みが極大になっていることが必要かつ十分である。

主論文2は主論文1で残された(cD/2)型の端末特異点について扱っている。主論文1と同様に双有理射 $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ であって π の例外因子が食い違い係数 $1/2$ の素因子となるようなものをすべて求めているが、この場合は X を5次元の商特異点の中に埋め込んでおいて重み付きのブローアップを行う必要のあるものがいくつか表れる。

主論文1および主論文2で指数が2以上の端末特異点のすべてについて、食い違い係数最小の素因子すべてを扱ったことになる。得られた双有理射 $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ は素因子を点に潰すような端射線の縮少の例を数多く与える。さらに簡単な帰結として、双有理射 $f: Y \rightarrow X$ で Y がゴレンスタイン端末特異点しか持たないものを、重み付きブローアップの合成として具体的に記述出来ることがわかった。

参考論文はいずれも主論文1, 2で得られた結果の応用に当てられている。参考論文1では3次元フリップの存在について新しい証明を与えている。 $\varphi: X \rightarrow Z$ をフリップ収縮とすると、 $|-K_X|$ が有理2重点しか持たないような元を持つことを使えば、 $K_X + |-K_X|$ が標準的となることがわかり、 φ のフリップの存在が $K_X + |-K_X|$ に関するフロップの存在に帰着できる。主論文1, 2で得られた $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ がクレパント降下を与える。参考論文2は、双有理射 $f: Y \rightarrow X$ であって Y がゴレンスタイン端末特異点しか持たないようなものを具体的に構成し、その例外因子について調べている。 X 上であって食い違い係数が1より小さい素因子はすべて f の例外因子として表れるので、そういった素因子は f を調べることによってわかることになる。さらに、 $|-K_X|$ の元として表れる有理2重点との関係についても調べている。参考論文3は、双有理射 $g: Z \rightarrow X$ であって g の例外因子がちょうど食い違い係数が1より小さい素因子全体となるものの存在に関するReid氏の問題に解答を与えている。 U に標準特異点までを許せば存在を示すことが出来る、しかし U が端末特異点しか持たないよ

うには必ずしも出来ない。

論文審査の結果の要旨

X を正規代数多様体とすると、 X が末端特異点であるとは、

1. ある正の整数 m に対して mK_X が Cartier 因子,
2. ある特異点解消 $f: W \rightarrow X$ があって、 $\sum E_i$ を f の例外因子として

$K_W = f^*K_X + \sum a_i E_i$ とかいたとき、すべての a_i が正、

をみたすことをいう。1 をみたす最小の m を X の指数 (index) といい、2 の a_i を E_i の食い違い係数 (discrepancy) という。

これらは代数多様体の極小モデルプログラムの中で生じる特異点であり 3 次元の場合には完全な分類が知られている。しかしながら、特異点を持っているために複雑なものになっている 3 次元の代数多様体の双有理幾何をより具体的かつ見やすいものにしようとした場合、分類された結果だけではなく、特異点の持つ不変量や特異点を除去する過程を具体的なものにしていくことが不可欠である。

この学位論文では、3 次元の双有理幾何を具体的なものとするとき必要になる 3 次元の末端特異点について、分類された結果を用いて特異点を除去する際に最も基本的になる双有理射を具体的に構成している。

指数 m の 3 次元の末端特異点 X の特異点解消上には食い違い係数が 1 より小さい素因子はすべて表れ、さらに食い違い係数が最小の $1/m$ となる素因子はつねに存在することが知られている。これらの素因子は X の上空にある素因子の中でもっとも重要であると思われる。主論文では指数 m が 2 以上の 3 次元末端特異点 X について、双有理射 $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ であって π の例外因子が食い違い係数 $1/m$ の素因子となるようなものをすべて求めている。それらはすべて X を 4 次元または 5 次元の商特異点の中に埋め込んでおいて、適当な重みを与えた重み付きのブローアップで得られる、一般には X は標準特異点を持った代数多様体になるが、特に X が末端特異点しか持たない代数多様体になるための条件についても調べられている。

参考論文は主論文で得られた結果の応用に当てられる。

主論文で得られた結果は、末端特異点 X 単独ではなく、 X とその上の反標準因子からなる線型系 $| -K_X |$ とを組にして考えると見やすい。 $| -K_X |$ の一般元が有理 2 重点しか持たないことから $K_X + | -K_X |$ が標準的になり、主論文で得られた双有理射は $K_X + | -K_X |$ に関するクレパントな射を与えている。従ってそのような射を有限回構成することによって双有理射 $f: Y \rightarrow X$ であって Y が高々指数 1 の末端特異点しか持たないようなものを構成できその例外素因子を具体的に調べることが出来る。参考論文 2 はそれを実行したものである。より一般に双有理射 $g: Z \rightarrow X$ であって $K_Z + | -K_Z |$ が端末的になるもの、つまり $K_X + | -K_X |$ の端末化を構成することが具体的に出来れば、端射線の因子的縮小や Q-Fano 多様体の分類などについて応用が期待される、参考論文 1 は X と $| -K_X |$ を組にして考える方法を、3 次元のフリップの存在に応用したものである、今までに知られていた 2 重被覆をとってフロツプに帰着させる方法とは異なる、双有理同値の範囲内でできさらに Q-分解性も自然に保たれている方法で 3 次元のフリップの存在を示した。3 次元の標準特異点のクレパントな特異点解消の過程、および指数 1 の末端特異点について主論文でなされたのと同じような仕事が出来れば、より具体的に 3 次元のフリップについて理解すること可能になると思われる。参考論文 3 は、3 次元末端特異点のいわゆる経済的特異点解消について、理想的な形ではこのようなものの存在しないこと、およびどのような条件のもとに存在するかについて調べたものである、

平成15年1月17日、論文内容とそれに関連した口頭試問ならびに申請者の学識についての審査を行った結果合格と認めた。