

3次元多様体のオープンブック分解について

東京工業大学・大学院理工学研究科 石川 昌治 (Masaharu Ishikawa)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology
e-mail: ishikawa@math.titech.ac.jp

本稿では、前半で3次元多様体のオープンブック分解について村杉和を中心に解説し、後半では Stein fillable な3次元多様体の正オープンブック分解に関する結果を紹介します。

1. 3次元多様体のオープンブック分解

S をコンパクトで向き付けられた境界付き2次元曲面とし、 $\phi: S \rightarrow S$ を境界 ∂S では恒等写像であるような S から S 自身への可微分同相写像とする。 $S \times [0, 1]$ の両端 $S \times \{0, 1\}$ を次の同値関係で同一視する：

- (i) $(x, 1) \sim (\phi(x), 0)$ for $x \in S$;
- (ii) $(y, 0) \sim (y, t)$ for $y \in \partial S$ and $\forall t \in [0, 1]$.

閉3次元多様体 M が $S \times [0, 1]/\sim$ で与えられるとき、それを M のオープンブック分解と呼び、 S をファイバー曲面、 ∂S をファイバーリンク、 ϕ をモノドロミー写像と呼ぶ。

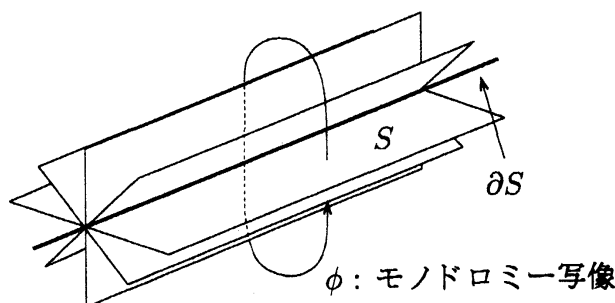


図 1. オープンブック分解のファイバーリンクの近傍.

例 1.1. S^3 内の自明な結び目は S^3 のオープンブック分解のファイバーリンクである。このときのファイバー曲面は自明な結び目が張る円盤であり、 t が 0 から 1 に移るに従い、円盤が S^3 を埋め尽くすのが観察できる (図 2 を参照)。

例 1.2. 図 3 (a) のバンドのことを正のホップバンド (Hopf band) と呼ぶ。その境界は正のホップリンク (Hopf link) である。また、図 3 の鏡像として得られるバンドは負のホップバンド、その境界は負のホップリンクと呼ばれる。図 (a) のホップバンドは S^3 のファイバー曲面になっている。つまり、例 1.1 と同様、 t が 0 から 1 に移るに従い、ホップバン

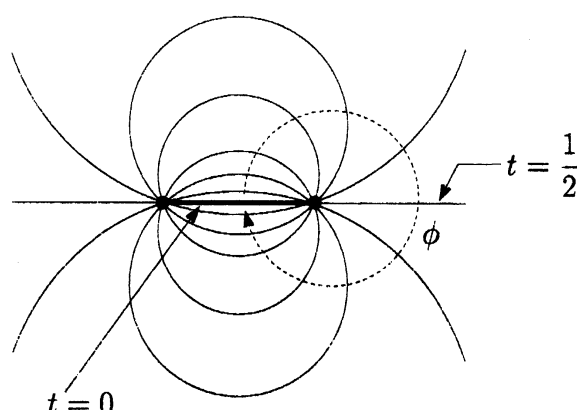


図 2. 自明な結び目をファイバーリンクとする S^3 のオープンブック分解の断面の様子.

ドは S^3 を埋め尽くして行く. この埋め尽くしの図を書くのは難しいが, 代わりに図 (a) に描かれた紐 (string) をホップバンドの表面に浮かし, 補空間でくるっと捻って, 図 (b) のようにホップバンドの裏面に持って行けることが確認できる*. (a) から (b) への写像がこのオープンブック分解のモノドロミーであるが, これはホップバンドを中心線に沿って切り開き, 切り口に沿って右ネジの方向に 360° 回してから貼り直す「右手デーンツイスト」と呼ばれる操作に対応している. 負のホップバンドについても同様で, モノドロミーは左ネジ方向への 360° 回転である左手デーンツイストになっている.

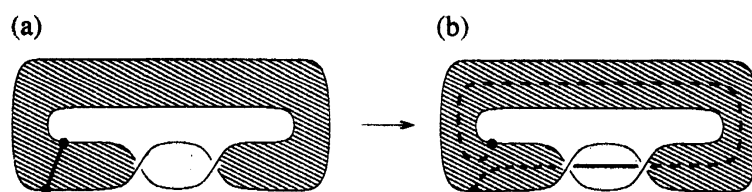


図 3. 正のホップバンドのモノドロミー.

注意 1.3. 例 1.2 は $f(x, y) = x^2 + y^2$ の原点における孤立特異点のミルナー束であり, そのモノドロミーが右手デーンツイスト 1 回で表されるということを述べている. この特異点はモース型特異点, つまり変形で分解される最小の特異点である. またデーンツイストの中心線は, 消滅サイクル (vanishing cycle) と呼ばれ, 特異点で潰れるホモロジーサイクルに対応している. ちなみに, 例 1.1 は非特異写像 $f(x, y) = x$ の原点におけるミルナー束である.

定義 1.4. モノドロミー写像が右手デーンツイストの積で表されるとき, そのオープンブック分解のことを正オープンブック分解という.

*分かりにくいという人は (b) から (a) へ戻す操作を観察してください.

2. 結び目理論におけるオープンブック分解の研究

3次元多様体のオープンブック分解の研究における重要な結果として、まず 1923 年の Alexander の結果が良く知られている。

定理 2.1 (Alexander [1]). 任意の向き付け可能な閉 3 次元多様体はオープンブック分解をもつ。

1978 年に Stallings はオープンブック分解の研究に村杉和という操作が有効であることを発見した。彼の定理を述べる前に、まず村杉和の定義を述べる。

S, S_1 および S_2 を S^3 内の向き付けられた、コンパクトな、境界付き曲面とする。

定義 2.2. S と S_1 および S_2 が次の条件を満たすとき、 S は S_1 と S_2 の村杉和であるという (図 4 を参照) :

- (1) $S = S_1 \cup S_2$ かつ $D := S_1 \cap S_2$ は円盤で次を満たしている :
 - (1-1) ∂D は $2n$ -角形である。この辺を半時計周りに $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ とラベル付けする ;
 - (1-2) a_i は ∂S_1 に含まれ、 S_2 内では proper な弧 (arc) になっている ;
 - (1-3) b_i は ∂S_2 に含まれ、 S_1 内では proper な弧になっている ;
- (2) S^3 内の 3 次元球体 B_1, B_2 で次を満たすものが存在する :
 - (2-1) $B_1 \cup B_2 = S^3$ かつ $B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2 = S^2$;
 - (2-2) $B_i \supset S_i$ for $i = 1, 2$;
 - (2-3) $\partial B_1 \cap S_1 = \partial B_2 \cap S_2 = D$.

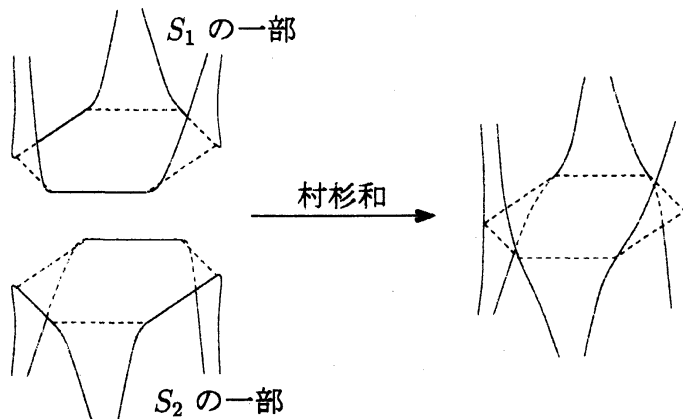


図 4. 6-角形による村杉和.

この村杉和を使って Stallings は次の定理を示した。

定理 2.3 (Stallings [14]). S_1 と S_2 が S^3 のファイバー曲面であるならば, S_1 と S_2 を村杉和して得られる曲面もファイバー曲面である. さらに, そのモノドロミーは S_1 のモノドロミー ϕ_1 と S_2 のモノドロミー ϕ_2 の積で表される.

逆に, ファイバー曲面 S が村杉和により曲面 S_1 と S_2 に分解されるならば, S_1 と S_2 は共にファイバー曲面であることが Gabai により示されている [3].

例 2.4. 図 5 のリンクは, $(3, 3)$ -トーラスリンクで, そのファイバー曲面は重ねて並べた 3 枚の円盤に 6 つの半捻りのバンドを交互に付けて得られる曲面である. 図に示したように, これは 2 つの $(2, 3)$ -トーラス結び目のファイバー曲面の村杉和で実現される. ミルナー束の言葉で述べるならば, $x^3 + y^3$ の特異点のミルナーファイバーは $x^3 + y^2$ のミルナーファイバー 2 つの村杉和で得られることを表している.

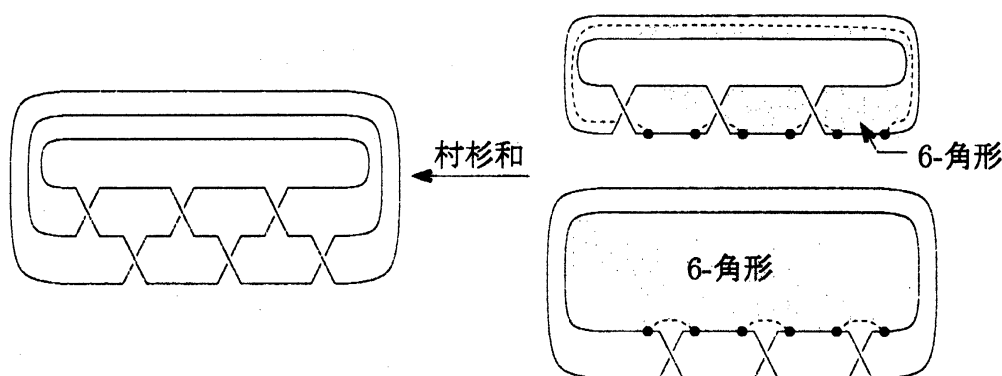


図 5. $(3, 3)$ -トーラスリンクの村杉和による分解.

定理 2.5. 正の閉ブレイド表示をもつリンクはファイバーリンクであり, そのモノドロミーは右手デーンツイストの積で表される.

Proof. ブレイドダイアグラムのバンドが交互に現われる場合には, 例 2.4 と同様にして, ブレイドの円盤に沿って村杉和に分割できる. バンドが交互でない場合には, 交互でない部分をひとまとまりだと思って村杉和の $2n$ -角形を選べば, 村杉和に分割できる. 分割により得られた各曲面は, $(2, n)$ -トーラスリンク ($n > 0$) を境界とする曲面であり, この曲面はさらに $n-1$ 個の正のホップバンドに村杉和で分解することが知られている. よって定理 2.3 より, この曲面はファイバー曲面であり, かつ, モノドロミーは右手デーンツイストの積で表され, さらにそれらの村杉和である正の閉ブレイドが張る曲面もファイバー曲面であり, そのモノドロミーは右手デーンツイストの積で表されることになる. $\square$

注意 2.6. 平面曲線孤立特異点のミルナー束のモノドロミーが正のデーンツイストの積で表されるという事実は, 特異点のモース化によるモノドロミーの分解を使って証明されるが, 特異点のリンクが正の閉ブレイド表示をもつことが知られていることから, 定理 2.5

よりミルナー束のモノドロミーは正のデーンツイストの積で表されると結論付けることもできる。

定理 2.7 (Stallings [14]). 図 6 のようにブレイドの各階層の交点が同じ符号で揃っている場合, その閉ブレイドはファイバーリンクである。

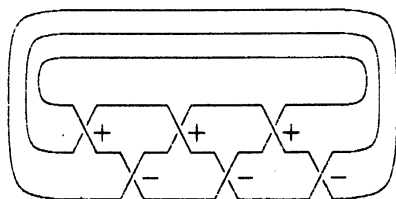


図 6. 各階層が同じ符号で揃っているブレイド.

Proof. 定理 2.5 の証明と同様にブレイドの円盤に沿って村杉和に分割できる. このとき, 分割された各曲面は $(2, n)$ -トーラスリンク ($n \neq 0$) であり, この曲面はさらに $|n| - 1$ 個のホップバンドに村杉和で分解することが知られている. よって定理 2.3 よりこの曲面はファイバー曲面であり, それらの村杉和である図 6 の閉ブレイドが張る曲面もファイバー曲面である. $\square$

この定理から S^3 内のファイバーリンクのリンク成分について次の系が得られる.

系 2.8 (Stallings [14]). L を S^3 内のリンクとする. このとき, $S^3 \setminus L$ 内のある結び目 K で, $L \cup K$ が S^3 のオープンブック分解のファイバーリンクになるものが存在する.

Proof. 図 7 のように, $+$ と $-$ を分けるように新しい結び目 K を加えればよい. $\square$

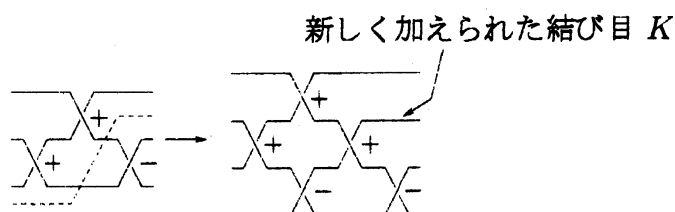


図 7. 結び目 K の加え方.

この Stallings の系はそのまま任意の 3 次元多様体に拡張することができる.

定理 2.9. M を向き付け可能な閉 3 次元多様体, L を M 内のリンクとする. このとき, $M \setminus L$ 内のある結び目 K で, $L \cup K$ が M のオープンブック分解のファイバーリンクになるものが存在する.

Proof. Stallings の系は、結び目 K を加えるときに、もともとのリンク L と適当に絡めることで、その絡み数 (linking number) を自由に変えることができる。これを使って、3次元多様体 M を S^3 から作る際のデーモン手術の係数に合わせて K と手術用のリンクの絡み数を適当に調整すれば、 S^3 内のファイバー曲面と手術用のリンクのフレイミングを調整でき、結果としてデーモン手術後も L を残したまま S^3 のオープンブック分解を M に拡張することができる。詳細は [7, Theorem 7.4] を参照。□

これに続く問題として、定理 2.9 のオープンブック分解にモノドロミーが右手デーモンツイストの積で表されるという制限を加える。つまり定理 2.9 の正オープンブック分解版を考えるわけである。これはいつでも成り立つわけではなく、多様体にある程度の制限がつくことになる。これについては次章で扱う。

ちなみに、 S^3 内の任意のファイバー曲面は円盤から Hopf plumbing (正および負のホップバンドの 4 角形による村杉和) とその逆操作を繰り返して得られることが、2000 年頃に Giroux により証明されている [4]。いわゆる Harer 予想 ([6]) の解決である。

3. Stein fillability および主結果

定理 2.9 の正オープンブック分解版を考える際に、Stein fillable という概念が必要不可欠になる。そこでまず Stein fillable の定義を述べる。 X を 2次元複素多様体とし、 $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ を狭義多重劣調和関数 (strictly plurisubharmonic function) とする。

定義 3.1. 閉 3次元多様体 M が 2次元複素多様体 X と proper かつ下に有界な狭義多重劣調和関数 $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ により $M = h^{-1}(0)$ で表されるとき、 M は Stein fillable であるという。また、コンパクトな境界付き 2次元複素多様体 $W = h^{-1}((-\infty, 0])$ を compact Stein surface と呼ぶ。

Stein fillable な 3次元多様体の特徴付けとして Eliashberg によるハンドル分解定理が知られており [2] (cf. [5])、その定理を経由して、Loi と Piergallini は次の定理を証明した。

定理 3.2 (Loi-Piergallini [13]). 閉 3次元多様体が Stein fillable であることは、正オープンブック分解を持つための必要十分条件である。

Stein fillable な 3次元多様体のクラスは非常に広く、そうでない多様体の例はほとんど知られていない [10, 11, 12]。例えば Poincaré ホモロジー球面に逆に向きを入れて得られる多様体は Stein fillable ではない。これは Lisca により発見された、Stein fillable でない 3次元多様体の最初の例である。

ここでは定理 2.9 の正オープンブック分解版を考えたいわけだが、定理 3.2 から Stein fillable でない閉 3次元多様体に対しては正オープンブック分解そのものが作れないことになる。逆に、問題を Stein fillable な 3次元多様体に制限して考えると、定理 2.9 の正オープンブック分解版が成り立つことを示すことができる。

定理 3.3 (I. [8]). Stein fillable な閉 3 次元多様体 M 内の任意のリンク L に対し, $M \setminus L$ 内の結び目 K で, $L \cup K$ が M の正オープンプック分解のファイバーリンクになっているものが存在する.

証明では, compact Stein surface への 2-ハンドル貼りつけを, 境界の 3 次元多様体が Stein fillable であるという条件と正オープンプック分解をもつという条件を共存させるようにうまく選ぶという手法を使う. 詳細は [8] を参照. また多賀城の研究集会の報告集 [9] に日本語で概略が書かれているので参照されたい.

4. Stein fillable でない 3 次元多様体について

Stein fillable でない 3 次元多様体についても定理 3.3 と同様の問題を考えたい. この場合にはオープンプック分解のモノドロミーは有限個の左手デーンツイストを含むことになるのだが, ある雑誌の referee に次の事実を教えて頂いた.

定理 4.1 (referee [8]). 向き付けられた閉 3 次元多様体に対し, そのオープンプック分解で, モノドロミーが左手デーンツイスト高々 1 つを含むデーンツイストの積で表されるものが存在する.

証明は 2 段階に分かれる.

第 1 段階 図 8 の γ に沿った右手デーンツイストを同じ記号で γ と書くことにする. h をモノドロミー写像としたとき, k を十分大きい正の整数とすると, $\gamma^k h$ は右手デーンツイストの積で表すことができる.

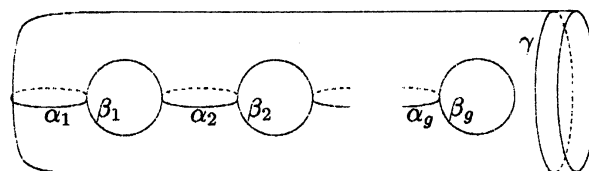


図 8. 単純閉曲線 γ の位置.

第 2 段階 図 9 は図 8 のリーマン面に $(2, 2n+1)$ -トーラス結び目のファイバー曲面を連結和で貼り合わせたものである. このときの境界に沿った右手デーンツイストを γ'_n と書くことにする. h_n をモノドロミー写像としたとき, n を十分大きい正の整数とすると, $\gamma'_n h_n$ は右手デーンツイストの積で表すことができる. よって h_n は高々 1 回の左手デーンツイストを含む表示をもつ.

証明の詳細は [8] の第 6 章を参照されたい.

この定理を踏まえると, 定理 3.3 の non-Stein fillable 3 次元多様体版として次の問題が考えられる.

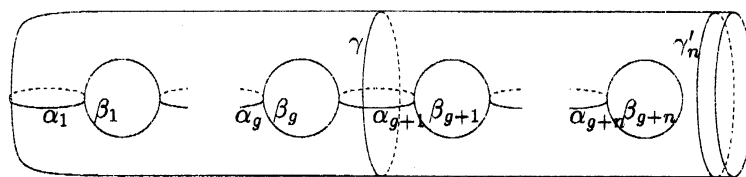


図 9. 単純閉曲線 γ'_n の位置.

問題 4.2. *Stein fillable* でない閉 3 次元多様体 M 内の任意のリンク L に対し, $M \setminus L$ 内の結び目 K で, $L \cup K$ が M の, ちょうど 1 回の左手デーントツイストをモノドロミーに含むオープンブック分解のファイバーリンクとなるものが存在するか?

既に定理 2.9 で, 3 次元多様体 M 内の任意のリンク L に対し, 結び目 K を加えて, $L \cup K$ をファイバーリンクにできることを紹介した. よってあとは, L の形を変えずに左手デーントツイストの数を 1 まで減らすことを考えれば問題は解決する. 例えば, 上の referee の証明のように境界に沿ったデーントツイストに押しつけてしまうというのも 1 つの手である. ただし, 先程と違い, L と K とで境界成分が少なくとも 2 つ以上あり, 写像類群の関係式をもっと複雑に適用する必要があると思われる.

参考文献

- [1] J. Alexander, *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **9** (1923), 93-95.
- [2] Y. Eliashberg, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2* , Internat. J. Math. **1** (1990), 29-46.
- [3] D. Gabai, *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981), Contemp. Math. **20**, A.M.S. Providence RI, 1983, pp. 131-143.
- [4] E. Giroux, *Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimension supérieures*, ICM 2002, Vol. II, pp. 405-414.
- [5] R.E. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. **148** (1998), 619-693.
- [6] J. Harer, *How to construct all fibered knots and links*, Topology **21** (1982), 263-280.
- [7] M. Ishikawa, *Tangent circle bundles admit positive open book decompositions along arbitrary links*, Topology **43** (2004), 215-232.
- [8] M. Ishikawa, *Positive open book decompositions of Stein fillable 3-manifolds along prescribed links*, Topology **45** (2006), no. 2, 325-342.

- [9] 石川昌治, *Lefschetz fibrations associated with divides and positive open book decompositions of 3-manifolds*, 研究集会「Hodge 理論・退化・複素曲面の代数幾何とトポロジー」報告集, 東北学院大学, 2004, pp. 199-217.
- [10] P. Lisca, *Symplectic fillings and positive scalar curvature*, *Geometry & Topology* **2** (1998), 103-116.
- [11] P. Lisca, *On symplectic fillings of 3-manifolds*, *Proceedings of 6th Gökova Geometry-Topology Conference. Turkish J. Math.* **23** (1999), 151-159.
- [12] P. Lisca, A.I. Stipsicz, *Infinitely many irreducible 3-manifolds with no tight contact structures*, preprint, arXiv:math.SG/0404136
- [13] A. Loi, R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4* , *Invent. Math.* **143** (2001), 325-348.
- [14] J.R. Stallings, *Constructions of fibred knots and links*, *A.M.S. Proc. Symp. in Pure Math.* **32**, 1978, pp. 55-60.