

Arithmetic degree (非孤立素因子込みの“次数”)について

柳川 浩二

名古屋大学 理学部 数学教室
yanagawa@math.nagoya-u.ac.jp

本稿の内容は、宮崎 誓氏, W. Vogel 氏との共同研究である ([7] 参照).

1 準素分解と算術次数

k を体 (簡単の為 $\#k = \infty$ とする), $S = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ を $n+1$ 変数の多項式環とし, 各 x_i の次数を 1 として次数付環とみなす. この無縁イデアルを m と記す, つまり $m = (x_0, x_1, \dots, x_n)$.

$M = \bigoplus M_i$ を有限生成の次数付 S -加群とする. 御存知のように, M の次数 $\deg M$ は M の Hilbert 多項式によって定義される. 具体的に言うと, $d = \dim M \geq 1$ の時には,

$$t \gg 0 \quad \text{に対して} \quad \dim_k M_t = \frac{\deg M}{(d-1)!} t^{d-1} + (d-2\text{-次以下の項}),$$

$d = 0$ ならば, $\deg M = \dim_k M$.

ところが, 良く知られているように, $\deg M$ は $\text{Assh}(M) := \{P \in \text{Ass}(M) \mid \dim S/P = \dim M\}$ の元における M の局所的な情報のみで決まってしまう. つまり,

$$\deg M = \sum_{P \in \text{Assh}(M)} \ell(M_P) \deg(S/P)$$

である. もちろん $\ell(-)$ は, S_P 加群としての長さを表す. 本稿のテーマである **arithmetic degree** (算術次数) とは, 非孤立素因子も含め $\text{Ass}(M)$ の全ての元における情報を考慮した “refine された” 次数であり, 最近では 主として computational な立場から, 活発に研究されている ([1, 9] 等).

各整数 $i \geq -1$ に対し,

$$M_{\leq i} := \{x \in M \mid \dim(S/\text{ann}(x)) \leq i\},$$

と置くと, $M_{\leq i}$ は M の次数付部分加群であり $\text{Ass}(M_{\leq i}) = \{P \in \text{Ass } M \mid \dim S/P \leq i\}$ であって, なおかつ $M_{> i} := M/M_{\leq i}$ と置いた時に, $\text{Ass}(M_{> i}) = \{P \in \text{Ass } M \mid \dim S/P > i\} = \text{Ass } M \setminus \text{Ass}(M_{\leq i})$ となる. ただし, $M_{\leq -1} = \{0\}$ とする.

定義 1.1 各 $r \geq -1$ に対し,

$$\begin{aligned} \text{arith-deg}_r(M) &:= \begin{cases} \deg(M_{\leq r+1}) & \dim M_{\leq r+1} = r+1 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \\ &= \sum_{P \in \text{Spec } S, \dim S/P = r+1} \ell(H_P^0(M_P)) \cdot \deg(S/P). \end{aligned}$$

また 簡単の為, イデアル $I \subset S$ に対し, $\text{arith-deg}_r(S/I)$ を $\text{arith-deg}_r(I)$ と書く.

$\ell(H_P^0(M_P))$ を M の P における **length multiplicity** と呼ぶ.

二つ目の等式で, 素イデアル P に対し $H_P^0(M_P) \neq 0$ は $P \in \text{Ass}(M)$ と同値であるし, $P \in \text{Min } M$ ならば $M_P = H_P^0(M_P)$ である. 従って, $d = \dim M$ とおくと, $\text{arith-deg}_{d-1} M = \deg M$ である (arithmetic degree に関しては, [1, 9] に於ける記号法に従ったが, 彼らは射影幾何的な次元を採用しているのので, 環論的な Krull 次元とは, 番号付けが一つずれることに注意).

一見煩わしい定義であるが, 命題 1.4 で示すように, 局所双対性をうまく利用して (準素分解を経由せずに) かなりの例まで $\text{arith-deg}_r(-)$ を, *Macaulay* 等のソフトを用いて具体的に計算できる (計算機を用いた準素分解は, computational commutative algebra の重要なテーマの一つで, 実際に実行可能なのだが, 大変 時間がかかるようである. [3] を参照). まず, 次の事実がある. ただし, 零加群の次元は -1 とし, $\text{codim } M := \dim S - \dim M = \text{ht}(\text{ann}(M))$ と定義する.

命題 1.2 (c.f., [3]) 任意の $0 \leq i \leq n+1$ について $\text{codim}(\text{Ext}_S^i(M, S)) \geq i$ である. また, $\text{codim}(\text{Ext}_S^i(M, S)) = i$ となる為の必要充分条件は, M が 高さ i の素因子を持つ事である. さらに, $\text{ht}(P) = i$ なる S の斉次素イデアル P に対し, $P \in \text{Ass}(M)$ と $P \in \text{Min}(\text{Ext}_S^i(M, S))$ は 同値.

注意 1.3 上の命題で, S を $(n+1)$ -次元の Gorenstein 局所環としても, 同様の事が成立する. 本稿 第 3 節の 命題 3.4 も参照のこと.

命題 1.4 (c.f., [10]) 任意の $r \geq -1$ について,

$$\begin{aligned} \text{arith-deg}_r(M) &= \begin{cases} \deg \text{Ext}_S^{n-r}(M, S) & \text{codim}(\text{Ext}_S^{n-r}(M, S)) = n-r \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \\ &= \deg(\text{Ext}_S^{n-r}(\text{Ext}_S^{n-r}(M, S), S)). \end{aligned}$$

以後しばらく, arithmetic degree に関して, これまでに得られている代表的な結果を紹介する.

まず, イデアルの arithmetic degree の上限を, 剰余環の (Castelnuovo–Mumford) regularity を用いて表すという方向の研究がいくつか存在する. Bayer, Mumford や その周辺の人達は, regularity を 環の “複雑さ” を表す不変量と捉えているようなので, 自然な問題設定と言う気がする. これについては, [1, 6] 等を参照して頂きたい.

以後 $\text{arith-deg}(I) := \sum_{r \geq -1} \text{arith-deg}_r(I)$ とおく.

定理 1.5 (Sturmfels et.al. [9, Theorem 3.1]) I を 単項式の集合 $\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$ を極小生成元に持つイデアル とすると,

$$\max\{\deg(m_i) \mid 1 \leq i \leq s\} \leq \text{arith-deg}(I) \leq \left(\prod_{i=1}^s \deg(m_i)\right) + s - \text{ht}(I)$$

が成り立つ.

上の不等式は (左右とも), 単項式イデアルでない場合には, 簡単な反例がある.

例 1.6 (i) 一般のイデアルの場合の左側の不等式の反例; $S = k[x, y, u, v]$, $I = (x^2, xy, xu^t + yv^t, y^2)$ とすると, $\text{arith-deg}(I) = \deg(S/I) = 2$ なので, $t \geq 2$ ならば, 左側の不等式が成立しない.

(ii) 右側の不等式の反例; 同じく $S = k[x, y, u, v]$ とし, $I = (xv - yu, x^{b-a}u^a - y^b, u^b - y^a v^{b-a})$ と置く. $\text{arith-deg}_1(I) = \deg(S/I) = a + b$, $\text{arith-deg}_{-1}(I) = 0$ であるが, 何と $\text{arith-deg}_0(I) = \binom{b-a+1}{3}$ であり, $b \gg a$ ならば右側の不等式が成立しない.

arithmetic degree は 1966 年の Hartshorne [5] で既に考察されている (“arithmetic degree” という用語は使われてないが). “普通の” degree は, Hilbert 多項式のみで決まるので, flat deformation で不変であるが, arithmetic degree は 不変ではない. ただし, 命題 1.4 から分かるように上半連続ではある (これが [5] における, arithmetic degree そのものに関する主結果であった). 特に 次の事が言える.

定理 1.7 (c.f., [9, 10]) $I \subset S$ を斉次イデアル, $\text{in}(I)$ を (ある monomial order に関する) I の initial ideal とする. このとき,

$$\text{arith-deg}_r(\text{in}(I)) \geq \text{arith-deg}_r(I).$$

Gröbner 基底と flat deformation の関係については, [1, 2] を参照して欲しい.

定理 1.7 に於ける不等式の ギャップは 一般には非常に大きい. 例えば, 例 1.6 (i) の S/I であるが, 適当な変数変換をした上で, reverse lexicographic order を入れて考えると,

$$\begin{aligned} \text{arith-deg}(\text{in}(I)) &\geq \text{in}(I) \text{ の極小生成元の中で最も次数の高いものの次数} \quad (\text{定理 1.5 より}) \\ &= \text{reg}(\text{in}(I)) \quad (\text{“generic initial ideal” の基本的性質. [2] 参照}) \\ &= \text{reg}(I) \quad (\text{上に同じ}) \\ &\geq t+1 \end{aligned}$$

$\text{arith-deg}(I) = 2$ であったから, その差はいくらでも大きく成り得る事が分かる.

今回の筆者の講演には登場しなかったが, geometric degree という類似の不変量も [1] で定義されている. これは, arithmetic degree から非孤立素因子の寄与を除いたものであり, 具体的には

$$\text{geom-deg}_r(M) := \sum_{P \in \text{Min}(M), \dim S/I = r+1} \ell(H_P^0(M_P)) \deg(S/P)$$

で定義される. これは文字通り, arithmetic degree 程には 計算し易くないようである. 面白いことに, arithmetic degree とは逆に,

$$\text{geom-deg}_r(\text{in}(I)) \leq \text{geom-deg}_r(I)$$

が成立している ([9]). 実際に 不等号となる例も, generic initial ideal の手法を用いて簡単に構成できる. 一般に, $\text{in}(I)$ は I より “悪く” なるので, I では極小素因子であったものが, $\text{in}(I)$ では非孤立素因子になる場合があるからである.

また, arithmetic degree は, “effective Nullstellensatz” と呼ばれる問題とも関連があり, 次が成り立つ. ただし, あまり sharp な上限ではない. [7] では, これをある程度改良している.

定理 1.8 ([9, Theorem 2.2]) $I \subset S$ を斉次イデアル, $s = \text{arith-deg}(I)$ とすると,

$$(\sqrt{I})^s \subset I.$$

また, Vasconcelos [10] では, Noether の正規化と arithmetic degree との関連が, 考察されている.

2 算術次数と Bezout の定理

この節では, $f \in S$ を M -正則な斉次元 (実際には, もう少し弱い条件でも良い) とした時の, $\text{arith-deg}_r(M)$ と $\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM)$ との関係について, 基礎的な考察を行なう. 標語的に言えば, arithmetic degree に関する Bezout の定理である. この節及び次節の結果は, すべて [7] で得られたものである.

定理 2.1 r を非負整数とし, $f \in S$ を $\dim(S/P) \geq r+1$ なる $P \in \text{Ass}(M)$ に含まれない斉次元とする. このとき,

$$\begin{aligned} & \text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) - \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M) \\ &= \text{arith-deg}_{r-1}([0 : f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M, S)}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0 : f]_M) \\ &= \text{arith-deg}_{r-1}(M_{>r+1}/fM_{>r+1}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0 : f]_M). \end{aligned}$$

さらに, $P \subset S$ を $\dim S/P = r$ なる 斉次素イデアルとしたとき, $[0 : f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M, S)}$ や $M_{>r+1}/fM_{>r+1}$ の P に於ける length multiplicity は,

$$H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P) \simeq H_P^1((M_{>r+1})_P)/fH_P^1((M_{>r+1})_P)$$

の S_P 加群としての長さで与えられる.

$H_P^1(M_P)$ は S_P 加群として 必ずしも有限生成ではないので, $H_P^1(M_P) \neq 0$ かつ $f \in P$ であっても, $H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P) \neq 0$ とは限らない. 一方, $(M_{>r+1})_P$ は, S_P 加群として Krull 次元 1 の素因子を持たないので, $H_P^1((M_{>r+1})_P)$ は S_P 加群として常に長さ有限 (特に有限生成) である. よって, $H_P^1((M_{>r+1})_P) \neq 0$ かつ $f \in P$ ならば 必ず $H_P^1((M_{>r+1})_P)/fH_P^1((M_{>r+1})_P) \neq 0$. また $(M_{>r+1})_P \neq 0$ であれば必ず, この S_P 加群としての depth は 1 以上なので, 従って次の系を得る.

系 2.2 定理 2.1 と同じ状況で, 以下は同値.

- (i) $\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) = \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M)$
- (ii) f が, $P \in \text{Ass } M \cup \text{Ass}(\text{Ext}_S^{n-r}(M, S))$ 且つ $\dim S/P = r$ なる P に含まれない.
- (iii) f が, $\dim S/P = r$ であって $P \in \text{Ass } M$ 或いは $\text{depth}_{S_P}(M_{>r+1})_P = 1$ となる 斉次素イデアル P に含まれない.

よって, 特に, $r \geq 1$ ならば, 一般の f について (i) の等号が成立.

注意 2.3 上の系で, $r = \dim M - 1$, つまり $\text{arith-deg}_r(M) = \deg M$ の場合を考えよう. 良く知られているように, $\text{Ext}_S^{n-r}(M, S)$ は $r+1 (= \dim M)$ 次元の加群で, さらに Serre の S_2 条件を満たす. 従って $P \in \text{Ass}(\text{Ext}_S^{n-r}(M, S))$ ならば常に $\dim S/P = r+1$ である. よって上の系の (i) と (ii) の同値性から, 系と同じ条件下で, $\deg(M/fM) = \deg(f) \cdot \deg M$ となる為の必要充分条件は, f が $P \in \text{Ass } M$ 且つ $\dim S/P = r$ なる P に含まれない事であると分かる. これは, 条件 (iii) と $M_{>r+1} = 0$ からも従う. いずれにせよ, これは良く知られた事実であり, 直接証明する事も易しい.

定理 2.1 に ほぼ近い結果は [6] で既に得られており, これが今回の研究の出発点となったが, そこでは, $\text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) > \text{arith-deg}_r M$ になる為の条件が上の系の (ii) のようには具体的に求められておらず, 一般の f で等号が成立する事を示すにも, H. Flenner の別の結果 (本稿の 命題 3.2 の後半に当たるもの) を必要とした.

系 2.2 を見ると, $\dim(S/P) = r$ なる斉次素イデアルに対して, $(M_{>r+1})_P \neq 0$ ならば $\text{depth}_{S_P}(M_{>r+1})_P \geq 2$ であるという条件が, ここでは重要であることが分かる. これは, Serre の S_2 条件より弱い条件である ($\text{Ass}(M)$ の元の高さが揃っていれば, もちろん同値). 次の結果を示すのも, 難しくない.

系 2.4 I を S の斉次イデアルとする. もし S/I (resp. S/I^{sat} , ここで $I^{\text{sat}} := \bigcup [I : m^n]$) が Serre の S_2 条件を満たすならば, すべての $r \geq 0$ (resp. $r \geq 1$) に対して,

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I + (f)) = \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(I)$$

が成立する. $\text{Ass}(S/I)$ の元が全て同じ高さを持てば, 逆も正しい.

本研究集会中に, 都立大の 川崎健氏からも御指摘があったように, S_2 条件を満たす局所環は, (よほど特異な例でもない限り) 等次元かつ埋込素因子を持たない, つまり 0-イデアルの素因子による剰余環は全て同じ次元をもつ (S_1 ならば 埋込素因子を持たない事は ほぼ自明なので, 等次元を示す部分が本質的. この結果は良く知られたもののようで, [4] 等に紹介されているが, 私が調べた範囲では証明が見当たらなかったもので, 以下に証明を与えておく). よって特に, S/I が S_2 条件を満たせば, すべての $r < \dim S/I - 1$ に対し, $\text{arith-deg}_r(I) = 0$ である.

命題 2.5 (本稿の大筋とはあまり関係ありません) (A, m) を *catenary* な ネーター局所環で S_2 条件を満たすものとする. このとき A は等次元である. すなわち, 任意の 極小素因子 P に対し, $\dim A/P = \dim A$ である.

証明. 背理法で示す. つまり, $\text{Min}(A) \neq \text{Assh}(A)$ を仮定して矛盾を導く.

$0 = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ を, 0 イデアルの最短の準素分解とする.

$$I := \bigcap_{\sqrt{Q_i} \in \text{Assh}(A)} Q_i, \quad J := \bigcap_{\sqrt{Q_i} \notin \text{Assh}(A)} Q_i$$

と置く. 仮定より, J は真のイデアルであり, $I \cap J = 0$, $\dim A/J < \dim A/I$ である. $I+J$ の任意の極小素因子は, I や J を含むが, それらの極小素因子ではない. 従って, $\text{ht}(I+J) \geq 2$ である (I の極小素因子と $I+J$ の極小素因子の間の素イデアル鎖を考えよ. A が catenary であることに注意).

$I+J$ の極小素因子で A を局所化して, $I+J$ が m -準素イデアルと仮定して良い. $\dim A \geq 2$ かつ $\text{depth } A \geq 2$ である (S_2 より). A/I や A/J は作り方から depth が正であり, 一方, $A/(I+J)$ は depth が 0 である. 短完全列

$$0 \rightarrow A \rightarrow A/I \oplus A/J \rightarrow A/(I+J) \rightarrow 0$$

に, いわゆる “depth lemma” を用いると (何となれば, local cohomology の長完全列を考えると), $\text{depth } A = 1$ となり, 仮定に反する. $\square$

例 2.6 (i) $I \subset S$ が素イデアル, $f \notin P$, $r \geq 1$ であっても,

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I + (f)) > \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(I)$$

となる例は多い. このとき f は, $(S/I)_P$ が Cohen–Macaulay でないような斉次素イデアル P に含まれる.

非常に簡単な例を挙げると, $X \subset \mathbf{P}^n$ を Cohen–Macaulay でない特異点 p を持つ既約かつ被約な曲面とした時, $\mathbf{P}^n$ の超曲面 F が X と正規交叉しても, F が p を含めば $X \cap F$ は p を必ず embedded component に持ってしまう, $X \cap F$ の 0 -次の arithmetic degree は 0 ではない (p における重複度が現れる). しかし, X 自身の 1 -次の arithmetic degree は 0 である.

(ii) $S = k[x, y, z]$, $I = (x) \cap (x^2, y)$ とおく. 言うまでもなく S/I は S_2 を満たさず, よって Cohen–Macaulay でもないが, $(S/I)_{>1} \simeq k[y, z]$ なので, 系 2.2 から, $f \in S$ が S/I -正則ならば常に,

$$\text{arith-deg}_{r-1}(I + (f)) = \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(I)$$

が全ての r について成立. つまり, (i) での現象の “逆” は一般には (特に, $\text{Ass}(S/I)$ の元の高さが揃ってない場合には) 正しくない.

(iii) 上の (ii) のような状況で, 1 次元 (Krull 次元では 2 次元) の既約成分が, いわゆる “double line” ならば等号は成立しない. $S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ とし, 斉次イデアル $Q =$

$(x_0x_3 - x_1x_2, x_0^2, x_1^2, x_0x_1)$ を考える. Q は (x_0, x_1) -準素イデアルであり, “double line” の定義イデアルである. $I = Q \cap (x_0^2, x_1, x_2)$ とおく. I は 埋込成分であるような閉点を持った double line の定義イデアルである. *Macaulay* でも計算できるが, $\text{codim}(\text{Ext}_S^3(S/I, S)) = 3$ かつ $\deg \text{Ext}_S^3(S/I, S) = 1$ である. よって, $\text{arith-deg}_0(I) = 1$ (埋込成分の閉点の寄与がカウントされている). しかし, さらに計算を進めると $\text{Ass}(\text{Ext}_S^3(S/I, S)) \ni (x_0, x_1, x_2, x_3)$ (これを見る為には $\text{Ext}_S^4(\text{Ext}_S^3(S/I, S), S)$ を計算して, 命題 1.2 を用いると良い). よって, 系 2.2 より, $f \in (x_0, x_1, x_2, x_3) \setminus (x_0, x_1, x_2)$ なる全ての斉次元 f に対し,

$$\text{arith-deg}_{-1}(I + (f)) > \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_0(I)$$

であって, 等号は成立しない. これは, $(S/I)_{>1} = S/Q$ の depth が 1 である事からも分かる.

定理 2.1 の証明の概略. まず,

$$\begin{aligned} & \text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) - \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M) \\ &= \text{arith-deg}_{r-1}([0 : f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M, S)}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0 : f]_M) \end{aligned}$$

であるが, 命題 1.2 に注意しながら Ext の長完全列を繰り返し扱う事で, 割と機械的に示せるので省略する.

次に, $[0 : f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M, S)}$ の P における length multiplicity が, $H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P)$ の S_P 加群としての長さに等しい事をいう (この証明を通じて, P は $\dim S/P = r$ なる斉次素イデアルとする). 命題 1.2 から分かるように, $\dim [0 : f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M, S)} \leq r$ であるから, この P に於ける length multiplicity は, $[0 : f]_{\text{Ext}_S^{n-r}(M, S)} \otimes S_P$ の S_P 加群としての長さに等しい. ところが, 局所双対性より,

$$\text{Ext}_S^{n-r}(M, S) \otimes S_P \simeq \text{Ext}_{S_P}^{n-r}(M_P, S_P) \simeq (H_P^1(M_P))^\vee.$$

ここで $(-)^\vee$ は, 局所環 S_P の Matlis dual である. よって, 主張は Matlis dual の基本的な性質から従う.

次に, $H_P^1(M_P)/fH_P^1(M_P) \simeq H_P^1((M_{>r+1})_P)/fH_P^1((M_{>r+1})_P)$ を示す. $P \notin \text{Ass}(M_{>r+1})$ であるから, $H_P^0((M_{>r+1})_P) = 0$. また, $\dim_{S_P}(M_{\leq r+1})_P \leq 1$ であるから, $H_P^2((M_{\leq r+1})_P) = 0$ である. 一方, 注意 1.3 及び f に関する条件から, 積写像

$$\text{Ext}_{S_P}^{n-r}((M_{\leq r+1})_P, S_P) \xrightarrow{f} \text{Ext}_{S_P}^{n-r}((M_{\leq r+1})_P, S_P)$$

は単射であり, 局所双対性より,

$$H_P^1((M_{\leq r+1})_P) \xrightarrow{f} H_P^1((M_{\leq r+1})_P)$$

は全射となる. よって, 短完全列

$$0 \rightarrow M_{\leq r+1} \rightarrow M \rightarrow M_{> r+1} \rightarrow 0$$

から, 図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H_P^1((M_{\leq r+1})_P) & \rightarrow & H_P^1(M) & \rightarrow & H_P^1((M_{> r+1})_P) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cdot f & & \downarrow \cdot f & & \downarrow \cdot f \\
 0 & \rightarrow & H_P^1((M_{\leq r+1})_P) & \rightarrow & H_P^1(M) & \rightarrow & H_P^1((M_{> r+1})_P) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & \text{Coker} & \simeq & (\text{Coker})' \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

が得られ, 求める同型が証明された.

最後に,

$$\begin{aligned}
 & \text{arith-deg}_{r-1}(M/fM) - \deg(f) \cdot \text{arith-deg}_r(M) \\
 &= \text{arith-deg}_{r-1}(M_{> r+1}/fM_{> r+1}) + \text{arith-deg}_{r-1}([0:f]_M)
 \end{aligned}$$

を証明する. これまでに証明した事から, $M_{> r+1}/fM_{> r+1}$ の P に於ける length multiplicity が, N/fN の S_P 加群としての長さに等しい事をいえば充分である (ただし, $N := H_P^1((M_{> r+1})_P)$ と置いた). ここで N 自身 S_P 加群として長さ有限であるから, N/fN の長さは, $[0:f]_N$ の長さに一致する事に注意. $(M_{> r+1})_P \neq 0$ でさえあれば, この S_P 加群としての depth は必ず 1 以上であるから,

$$0 \rightarrow (M_{> r+1})_P \rightarrow (M_{> r+1})_P \rightarrow (M_{> r+1}/fM_{> r+1})_P \rightarrow 0$$

に $H_P^*(-)$ を施せば, 求める結論が得られる. □

3 双対化複体と 超平面切断の既約成分

$\text{Ass}(M)$ と $\text{Ass}(M/fM)$ との関連も, $\text{Ext}_S^*(M, S)$ からの情報で見ることが出来る. 一般に f を M -正則 ($M/H_m^0(M)$ 正則でも良い) であるような斉次元とすると,

$$\text{Ass}(M/fM) \supset \bigcup_{P' \in \text{Ass}(M)} \text{Min}(S/P' + (f))$$

が成り立つ事に注意. 我々は, いつ等号が成立するかを, 具体的に知ることが出来る.

定理 3.1 f を M -正則であるような斉次元とする.

$$\text{Ass}(M/fM) = \bigcup_{P' \in \text{Ass}(M)} \text{Min}(S/P' + (f))$$

となる為の必要充分条件は, f が, 全ての $0 \leq i \leq n$ に対し $\text{Ext}_S^i(M, S)$ の高さ $i+1$ の極小素因子に含まれない事である. さらに強く,

$$\begin{aligned} \text{Ass}(M/fM) \setminus \bigcup_{P' \in \text{Ass } M} \text{Min}(S/P' + (f)) \\ = \{P \mid P \text{ は } \text{Ext}_S^{\text{ht}(P)-1}(M, S) \text{ の極小素因子で } f \in P \text{ なるもの}\}. \end{aligned}$$

上の定理の後者の条件を, 系 2.2 の (iii) ふう読み換えると, f が, $\dim S/P = r$, $(M_{\leq r+1})_P = 0$, $(M_{>r+1})_P \neq 0$ なおかつ $\text{depth}_{S_P}(M_{>r+1})_P = 1$ であるような斉次素イデアル P に含まれないという事である.

次の結果 (の後半部分) は, H. Flenner からの “private communication” という形で, [6] で既に紹介されていた (彼の有名な “local Bertini” の論文に登場する手法からも証明できるらしい).

命題 3.2 f を $M/H_m^0(M)$ -正則であるような斉次元とする.

$$\text{Ass}(M/fM) \setminus \{m\} \subset \bigcup_{P' \in \text{Ass}(M)} \text{Min}(S/P' + (f)) \quad (**)$$

となる為の必要充分条件は, f が 全ての $0 \leq i \leq n-1$ に対し $\text{Ext}_S^i(M, S)$ の高さ $i+1$ の極小素因子に含まれない事である. 特に, 一般の f に対しては (**) が成立.

証明は 3.1, 3.2 と, 命題 1.2 を機械的に用いるだけであり, 難しくない.

例 3.3 (i) $S = k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$, $I := (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4)$ と置く. Macaulay でも計算できるが, $\text{Ext}_S^2(S/I, S)$ は高さ 3 の素因子を持たず, $\text{Ext}_S^4(S/I, S) = 0$, かつ $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\} = \text{Ass}(\text{Ext}_S^3(S/I, S))$ である. よって S/I に関して, 定理 3.1 の等号が成立する為の必要充分条件は, f が (x_1, x_2, x_3, x_4) に含まれない事である. (幾何的に言えば, $X := \text{Proj}(S/I)$ は, $\mathbf{P}^4$ の中の, 一点 p ((x_1, x_2, x_3, x_4) に対応した閉点) で交わる二つの平面である. $\mathbf{P}^4$ の超曲面 F は, たとえ X の各既約成分 (二つの平面) と正規交叉しても, $p \in F$ ならば, p は $X \cap F$ の埋込成分である.

(ii) 例 2.6 (iii) に於いて, $\text{Ext}_S^3(S/I, S)$ は, (x_0, x_1, x_2, x_3) を素因子に持つが, これは 極小素因子ではないので, 定理 3.1 に於ける等号は常に成立する.

双対化複体 $D^\bullet$ を持ったネーター局所環 (A, m) に対しても, 上記の結果と同様な事が成り立つ.

双対化複体の基本的性質から, 一般に, ある整数 n が存在して,

$$\mathrm{Hom}^i(A/m, D^\bullet) = \begin{cases} A/m & i = n \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる. $n = 0$ のとき, $D^\bullet$ を正規化された (normalized) 双対化複体と呼ぶ. 双対化複体の添字をずらしたのも, また双対化複体であるから, 一度双対化複体が存在すれば, 正規化されたものも存在する.

$D^\bullet$ を正規化された双対化複体とし, 有限生成 A -加群 M に対して,

$$\mathrm{Ext}_A^i(M, D^\bullet) := H^i(\mathrm{Hom}(M, D^\bullet))$$

と置くと, 局所双対性より,

$$\mathrm{Ext}_A^{-i}(M, D^\bullet) = (H_m^i(M))^\vee,$$

である. ここで, $(-)^\vee$ は, A に於ける Matlis dual を表す. とくに, A が標準加群 ω_A を持った d -次元 Cohen-Macaulay 環の時は,

$$\mathrm{Ext}_A^{-i}(M, D^\bullet) = \mathrm{Ext}_A^{d-i}(M, \omega_A)$$

である. $\mathrm{Ext}_A^*(M, D^\bullet)$ に対しても, 命題 1.2 と同様な事が成り立っている.

命題 3.4 (c.f., [8]) (A, m) をネーター局所環, $D^\bullet$ を正規化された双対化複体, M を有限生成 A -加群 とする. 任意の $i \geq 0$ について $\dim(\mathrm{Ext}_A^{-i}(M, D^\bullet)) \leq i$ である. また, $\dim(\mathrm{Ext}_A^{-i}(M, D^\bullet)) = i$ となる為の必要充分条件は, M が $\dim A/P = i$ なる素因子 P を持つ事である. さらに, $\dim A/P = i$ なる A の斉次素イデアル P に対し, $P \in \mathrm{Ass}(M)$ と $P \in \mathrm{Min}(\mathrm{Ext}_A^{-i}(M, D^\bullet))$ は同値.

これを用いて, 次が言える.

定理 3.5 命題 3.4 と同じ条件下で, $f \in m$ を M -正則であるとする.

$$\mathrm{Ass}(M/fM) = \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{Min}(A/P' + (f))$$

となる為の必要充分条件は, f が, 全ての $1 \leq i \leq n$ に対し $\mathrm{Ext}_A^{-i}(M, S)$ の次元 $i-1$ の極小素因子に含まれない事である. さらに強く,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ass}(M/fM) \setminus \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass} M} \mathrm{Min}(S/P' + (f)) \\ = \{P \mid P \text{ は } \mathrm{Ext}_A^{-\dim A/P-1}(M, D^\bullet) \text{ の極小素因子で } f \in P \text{ なるもの.}\} \end{aligned}$$

参考文献

- [1] D. Bayer and D. Mumford, What can be computed in algebraic geometry?, Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra (ed. D. Eisenbud and L. Robbiano), pp. 1-48, Cambridge University Press 1993.
- [2] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry, Springer-Verlag, (1995).
- [3] D. Eisenbud, C. Huneke and W. Vasconcelos, Direct methods for primary decomposition, Invent. Math. **110** (1992), 207-235.
- [4] R. Hartshorne, Complete intersections and connectedness, Amer. J. Math. **84** (1962), 497-508.
- [5] R. Hartshorne, Connectedness of Hilbert scheme, Publications Math. I.H.E.S. **29** (1966), 261-304.
- [6] C. Miyazaki and W. Vogel, Towards a theory of arithmetic degrees, to appear in Manuscripta Math.
- [7] C. Miyazaki, W. Vogel and K. Yanagawa, Associated primes and arithmetic degrees, Preprint.
- [8] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, Springer-Verlag, 1986.
- [9] B. Sturmfels, N.V. Trung and W. Vogel, Bounds on degrees of projective schemes, Math. Ann. **302** (1995), 417-432.
- [10] W. Vasconcelos, The reduction number of an algebra, to appear in Compositio Math.