

楕円型方程式系の境界値問題に対するなめらかな解が一意的に存在するための十分条件

岩崎 敦 久

Ω を $\mathbb{R}^{m+1}$ ($m \geq 1$) の中のなめらかな境界を持つ有界領域とする。 Ω 上での楕円型方程式系の境界値問題を考える。領域内部の方程式を定める偏微分作用素を A , 境界条件を与える偏微分作用素を B で表わす。 A と B は実パラメータ λ を含む Agmon-Douglas-Nirenberg 型の作用素とする。即ち $\text{Pol}(k)$ を $\bar{\Omega}$ 上の C^∞ 函数 $C^\infty(\bar{\Omega})$ を係数とする次数が k 以下の (ξ, λ) に関する多項式 r_i, s_i, t_i を整数, $q_{ij}(\xi, \lambda) \in \text{Pol}(r_j + s_i)$, $b_{ij}(\xi, \lambda) \in \text{Pol}(r_j + t_i)$ とした時 A と B は

$$A = (q_{ij}(\partial, \lambda))_{1 \leq i, j \leq m}, \quad B = (b_{ij}(\partial, \lambda))_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m}}$$

で定義し, 方程式を

$$(1) \quad \begin{cases} Au = f & \text{on } \Omega \\ Bu = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{と定める。}$$

明らかに (A, B) は $C^\infty(\bar{\Omega})$ から $C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\partial\Omega)$ への連続線型写像を定義する。この写像 (A, B) が同型写像となるための十分条件を与えるのがここでの目的である。

A と B がパラメータ λ によってつながれているという関係

を導入する。定義はあとにして

(A, B) がパラメータ λ によって適切につながれているとする。ある λ_0 に対し $\lambda \geq \lambda_0$ の時 (A, B) はあるリボレフ空間の稠密な部分空間上で同型写像となり、特異サポートに関して $\text{sing supp } u = \text{sing supp } f \cup \text{sing supp } g \ (\subset \overline{\Omega})$ なる関係が成り立つ。

A が一階対称型の場合について考えてみる。 B は零階即ち微分より小さなものとする。Lax と Phillips [5] によると、 $\ker B$ が A に対して dissipative な境界条件を定める時 適当なリボレフ空間上での存在と一意性が示される。この場合特異サポートの一致について何が言えるかということ、 A が楕円型であるとの仮定のもとで今まで知られている一般的な条件は B が A に対して coercive である時だけである。今の場合 A と B は常にパラメータ λ でつながれており 上の結果からかならずしも coercive でなくてもそれらが適切につながれていれば十分である。(注、coercive なら適切である。)

一方 A が一般の ADN 型の楕円型作用素 B が A に coercive で正規な境界作用素の時、coercive 評価式が成立することより 特異サポートが一致する。さらにこの写像は有限指数を持つことが知られている。しかし 指数が零、あるいはより強く 同型写像になる (これが言えることはグリーン函

数の構成, 固有函数展開等を進める上で基本的である) 型では, 変分法で解けるもの (例えば Gårding 型と Dirichlet 条件) を除けば Agmon が固有函数展開の話をする時考えた型以外見あたらない。パラメータによってつながれているという条件はこれらの型の境界作用素が正規でないものをもふくんだ十分な拡張と与えると同時に非対称な楕円型作用素の non-coercive な境界値問題のクラスを与えている。

A と B が満たすべき条件について述べる。 (A, B) は常に同値な系で A は高々一階の微分をふくまず B は微分をふくまないものを持つから (A, B) は最初からそのような系とする。又条件は局所的なものであるから局所座標をとって $\Omega = \mathbb{R}_+^{m+1} \ni (x, y)$ とする。cotangent space の元を (ξ, η) で表わす。

$$Q = (q_{\lambda j}^0(\xi, \eta, \lambda)), \quad \beta = (b_{\lambda j}^0(\xi, \eta, \lambda))$$

($q_{\lambda j}^0, b_{\lambda j}^0$ は $q_{\lambda j}, b_{\lambda j}$ の次数 $r_j + s_\lambda, r_j + t_\lambda$ の同次部分)

$$n_0 = ((1 - i\eta)^{r_0 - r_j} \delta_{\lambda j}), \quad n_1 = ((1 - i\eta)^{s_j + r_0 - 1} \delta_{\lambda j})$$

($r_0 = \max_j (r_j)$, ($\delta_{\lambda j}$) Kronecker's δ)

$\det Q \neq 0$ として $\mathcal{S} = (\xi, \lambda) \neq 0$ のとき

$$p = (2\pi)^{-1} \int_{\Gamma} n_0 Q^{-1} n_1 Q_0 d\eta, \quad \mathcal{D} = (2\pi)^{-1} \int_{\Gamma} \beta Q^{-1} n_1 Q_0 d\eta$$

(Γ ; $\det Q = 0$ の虚数部が正の根をなす単純曲線, $Q_0 = Q|_{(0,1,0)}$)

$$H_{\alpha\beta}^1 = \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta D \cdot P, \quad H_{\alpha\beta}^2 = P^* \cdot \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta D^*$$

(P^*, D^* は $P: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, $D: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^l$ の adjoint) とおく。

(A, B) が $(x, y) = 0$ で λ によってつながれているとは 境界上の $x=0$ の近傍で次の条件を満たす時という。

1. $\det Q \neq 0$ ($(\xi, \eta, \lambda) \neq 0$ real)
2. $\det Q$ の次数 $= 2l$
3. $\lambda > 0$ のとき $\text{range } D$ の次元 $= l$

さらに次の条件も満たす時 適切につながれているという。

$$4. \quad \lambda |Pf| \leq c |Df|, \quad |H_{\alpha\beta}^1 f|^2 \leq c |f|^2, \quad |H_{\alpha\beta}^2 g|^2 \leq c |g|^2$$

但し $\lambda \geq 0$, $|\xi|=1$, $|f|=1$ ($f \in \mathbb{C}^m$), $|g|=1$ ($g \in \mathbb{C}^l$) として

$$|\alpha| + |\beta| = 1.$$

(注, 領域内部での A に対する仮定は $\det Q \neq 0$ ($(\xi, \eta, \lambda) \neq 0$ real)

である。) 4の条件は ロパチンスキー行列 D を対象とする境界上の擬微分作用素が $\mathbb{C}^m$ -可解で準楕円型であるための十分条件である。

結論の証明には 領域が半空間 A 及び B が特別な擬微分作用素を介して一階及び零階の作用素の時を特に考察する。

そして一般の場合が領域の単位分解によってこの特別な場合に帰着できることを示すに十分なだけの結果を導き出す。

これは次の様なものである。 $M(x, \xi)$ $m \times m$ matrix, 1 次の正の同次性 $B(x, \xi)$ $l \times m$ matrix 0 次の正の同次性

ζ に關して持ち (x, ζ) に關して C^∞ 函数 ($\zeta \neq 0$) として $|x| \geq R$ では x に關して定数として、

$$(2) \quad \begin{cases} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} + M(x, \partial_x, \lambda) \right\} u(x, y) = f(x, y) & y > 0 \\ B(x, \partial_x, \lambda) u(x, 0) = g(x) & . \end{cases}$$

こゝ $\frac{\partial}{\partial y} + M(x, \partial_x, \lambda)$ と $B(x, \partial_x, \lambda)$ によつてもパラメータ λ によつてつながれてゐるという關係は同様に定義できる。

今 (2) の意味をはつきりさせるため 次の様な作用素 $C(\lambda)$ を定義する。 W_b は $H_m^0(R_+^{n+1}) \times H_m^{-1/2}(R^n)$ の部分空間で

$$(u, v) \in W_b \iff \begin{cases} u, \left\{ \frac{\partial}{\partial y} + M(x, \partial_x, \lambda) \right\} u \in H_m^0(R_+^{n+1}) \\ B(x, \partial_x, \lambda) v \in H_l^{1/2}(R^n) \\ v = u(\cdot, 0) \end{cases}$$

を満すものとする。 $C(\lambda)$ は $U \in W_b$ に対して

$$C(\lambda) U = \begin{pmatrix} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} + M(x, \partial_x, \lambda) \right\} u, 0 \\ 0, B(x, \partial_x, \lambda) v \end{pmatrix} U$$

を対応させる W_b を定義域とする $H_m^0(R_+^{n+1}) \times H_m^{-1/2}(R^n) \rightarrow H_m^0(R_+^{n+1}) \times H_l^{1/2}(R^n)$ の閉作用素とする。この時次の事が言える。

$\frac{\partial}{\partial y} + M(x, \partial_x, \lambda)$ は楕円型で $B(x, \partial_x, \lambda)$ とパラメータ λ で適切につながれてゐるとする。ある λ_0 があって $\lambda \geq \lambda_0$ ならば

$C(\lambda)$ の逆 $R(\lambda)$ が存在する。そしてこの $R(\lambda)$ は $H_m^s(R_+^{n+1}) \times H_l^{s+1/2}(R^n)$ から $H_m^s(R_+^{n+1}) \times H_m^{s-1/2}(R^n)$ への有界作用素で ($s \geq 0$)

$\|R(\lambda)\|_S \leq C_3 \lambda^{-1}$ なる評価式を持つ。

但し $H_m^S(\Omega)$ は $\mathbb{C}$ -値のソボレフ空間で $H^S(R_+^{n+1}) \times H^T(R^n)$ のノルムとして $(\|(\Lambda^1(\lambda) - \frac{\partial}{\partial y})^S u\|^2 + \|\Lambda^T(\lambda)v\|^2)^{1/2}$ を用いている。 $(\Lambda^T(\lambda))$ の標象は $(|\xi|^2 + \lambda^2)^{1/2}$ である。

よりくわしく $\chi \in C_0^\infty(\overline{R_+^{n+1}})$ $\chi^0 = \chi|_{y=0}$ とする時、

$$(f, g) \in H_m^S(R_+^{n+1}) \times H_e^{S+1/2}(R^n)$$

$$(\chi f, \chi^0 g) \in H_m^{S+1/2}(R_+^{n+1}) \times H_e^{S+1}(R^n) \quad \text{が満たれるなら}$$

$$(u, u(0)) \in H_m^S(R_+^{n+1}) \times H_e^{S-1/2}(R^n)$$

$$(\chi u, \chi^0 u) \in H_m^{S+1/2}(R^n) \times H_m^S(R^n) \quad \text{である。}$$

$$\text{但し } C(\lambda)(u, u(0)) = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

$R(\lambda)$ の存在とその性質を示すには (2) の係数の中にくまらる変数 x とパラメータと考える際の逆により擬微分作用素の左右のパラメトリックスを作る。これを $R'(\lambda)$ とすると $R(\lambda)$ が存在するから $R(\lambda) \cdot (I + S(\lambda)) = R'(\lambda)$ $(I + T(\lambda)) \cdot R(\lambda) = R'(\lambda)$ なる関係式を得る。パラメータ λ により適切につながれていると仮定するとこの $S(\lambda), T(\lambda)$ と $R'(\lambda)$ が以下に書く結果が適用し得るような擬微分作用素で表現され特に $I + S(\lambda)$ $I + T(\lambda)$ が可逆的となる。

擬微分作用素については A.P. Calderon and R. Vaillancourt と L. Hörmander の結果を使う Hörmander の結果を精密して次の様な評価を利用する。

X はヒルベルト空間 $BL(X)$ は X 上の線型有界作用素

と $p(x, \xi, \lambda), q(x, \xi, \lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, BL(X))$ λ はパラ

$\lambda - \delta$ とする。

$$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq c_{\alpha\beta} \lambda^{-|\alpha|} (|\xi|/\lambda)^{m_1 + \delta_1|\beta| - \rho_1|\alpha|}$$

$$|q_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq c_{\alpha\beta} \lambda^{-|\alpha|} (|\xi|/\lambda)^{m_2 + \delta_2|\beta| - \rho_2|\alpha|}$$

$\xi = (\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ とする 但し $p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)$ 。

$$K(\lambda) \equiv q(\partial, \lambda) p(\partial, \lambda) - \sum_{|\alpha| < N} (\lambda)^{|\alpha|} (\alpha!)^{-1} q_{(\beta)}^{(\alpha)}(\partial, \lambda) \circ p_{(\alpha)}(\partial, \lambda)$$

とあけは

$0 \leq \delta_1 < \rho_2 \leq 1$ か $0 \leq \delta_2 \leq \rho_1 \leq 1$ ($i=1, 2$) の時

任意の実数 s と m に対して ある整数 N_0 があり $N \geq N_0, \lambda \geq 1$

ならば

$$\|\Lambda^s(\lambda) p(\partial, \lambda) u\| \leq c_s \lambda^{-m_1} \|\Lambda^{s+m_1}(\lambda) u\|$$

$$\|\Lambda^s(\lambda) K(\lambda) u\| \leq c_{sN} \lambda^{-N+s-m+2} \|\Lambda^m(\lambda) u\|$$

但し $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, X)$ 。

さらに 十分大きな α_0 に対して $q_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) \in BL(X, Y)$ (X から Y への有界作用素) ($|\alpha| \geq \alpha_0, |\beta| \geq 0$) と

$$|q_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)|_{XY} \leq c_{\alpha\beta} \lambda (1+|\xi|)^{m_3 + \delta_3|\beta| - \rho_3|\alpha|}$$

ならば 十分大きな N に対して

$$\|K(\lambda) u\|_Y \leq c_{mN\lambda} \|\Lambda^m(\lambda) u\|_X$$

が成り立つ。

例 $\Omega = \mathbb{R}_+^{n+1} \ni (x, y) \quad y \geq 0$

$$\begin{cases} A = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - a_{n+1} \lambda^2 + c \\ B = b_0 \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_{n+1} \lambda + d \end{cases}$$

A, B 実係数. A : elliptic, c, d : 低階.

$$\eta^1 \equiv i \sqrt{\sum a_{ij} \xi_i \xi_j + a_{n+1} \lambda^2} \quad S = (\xi, \lambda)$$

$$\alpha \equiv \min_{S; \sum_{i=1}^n b_i \xi_i = 0} (\eta^1(S)) \quad \gamma_2 < \gamma$$

* $b_0 \geq 0$, $b_0 \alpha > b_{n+1}$, $|b_n|^2 \leq c b_0$ $n=1, \dots, n$

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} b_k \xi_k \right|^2 \leq c \left(b_0 + \left| \sum_{k=1}^n b_k \xi_k \right| \right) \quad : |\xi| = 1$$

最後の条件は十分条件と17は. 次のための必要.

$$\begin{cases} |g \text{grad}_x b_k|^2 \leq c b_0 & \text{ある } k \text{ は} \\ (b_k) = b(\hat{b}_k); \sum |\hat{b}_k|^2 = 1 & \text{とすれば } |g \text{grad } b|^2 \leq c(b_0 + |b|) \end{cases}$$

* 既知である. $\exists \lambda_0$ s.t. $\forall f \in H^0(\Omega), \forall g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$\forall \lambda \geq \lambda_0, \exists 1 u \in H^1(\Omega); Au = f \text{ on } \Omega, B u = g \text{ on } \partial\Omega$

$$\text{sing supp } u = \text{sing supp } f \cup \text{sing supp } g.$$

参考文献

- [1] N. IWASAKI A Sufficient Condition for the Existence and the Uniqueness of Smooth Solutions to Boundary Value Problem for Elliptic Systems.
Publ. RIMS, Kyoto Univ. to appear
- [2] Y. KANNAI Hypocoellipticity of Certain Degenerate Elliptic Boundary Value Problems. to appear
- [3] K. TAIRA On the Oblique Boundary Value Problems for the Laplacian to appear.