

Cauchy's Functional Equation in
Number Theory.

C. N. R. S., 早大 J.-L. Maucclair
明治学院大 村田 玲吾

この集会は、特殊関数方程式——特定の形の関数等式と満たす関数を求める問題——と様々な分野からながめよ)との主旨であったので、我々は整数論、特に数論的関数の解析的研究の立場から参加した。ここで、数論的関数とは、 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 上で定義された複素数値関数のこと(という)。 $\mathbb{N}$ という離散的な集合上で定義されている為、同じく関数方程式 $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ といったものを考えても f が $\mathbb{R}$ 上の連続関数である場合とは違ったところがある必要になる。

本稿では、関数方程式 $f(mn) = f(m) + f(n)$, 或は $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ によつて数論的関数の形がどの程度まで決定できるか? という方向の問題をとりあつかう。

ここに書く内容、特に §2 は、1981年12月に、この数解

研で「数論的関数の特徴付けの問題」という題名で我々が話したものと、かなり重なり合うので、ここでは証明は省き、結果を中心に書いてやりたい。証明等について興味のある方は文献[8]を参照して頂きたい。

§1. 加法的関数.

上記の問題の発端は、以下に挙げる Shannon の結果である。Shannon は確率論的、或は情報理論の研究から次の定理を得た ([1]) :

定理 (Shannon) 数論的関数 $f(n)$ が、条件

$$(*) \quad f(mn) = f(m) + f(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

を満たし、更に $f(n+1) \geq f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(1) \geq 0$

であるなら、 $f(n) = c \cdot \log n$ (c : positive constant).

さて、この定理の中に現われた関数等式(*)を満たす数論的関数は、「各素数に於る f の値を決めてやれば、 $f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) がすべて決まってしまう」性質を持つている。度々整数の数論的性質と結びつき、解析数論の一つの重要な研究対象となっている。そこで次の定義を置く。

定義 1 $(*)$ の性質を持つ数論的関数を 完全加法的 といふ。

定義 2. $m, n \in \mathbb{N}$ が $(m, n) = 1$ であれば常に (*), 即ち $f(mn) = f(m) + f(n)$ をみたす時, f のことを 加法的 といふ。ただし (m, n) は m, n の最大公約数の意。

完全加法的な f の例として上の $C \times \log$ の他にも沢山あって, 例えば n の素因数分解を $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ とする時 $\Omega(n) = e_1 + \cdots + e_r$ によつて $\Omega(n)$ を定義すればこの $\Omega(n)$ は完全加法的である。又, $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ の時 $\omega(n) = r$ によつて $\omega(n)$ を定義すれば, この $\omega(n)$ は加法的であつて, 完全加法的ではない。

1946年に Erdős は [2] の中で, Shannon の結果と大中に振つて, 次の結果を得た。

定理 (Erdős) 加法的関数 $f(n)$ が次の 1°) 或は 2°) を満たすならば $f(n) = C \times \log n$ となる。

$$1^\circ) \quad f(n+1) \geq f(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$2^\circ) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f(n+1) - f(n)) = 0.$$

Erdős は, 同じ論文の中で, この問題に関連していくつかの予想を提出している。 $f(n)$ が加法的である事は仮定しておいて, 更に

予想 1 : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n+1) - f(n)| = 0$ ならば $f = C \times \log$.

予想2 : $f(n+1) - f(n) = O(1)$ なら $f(n) = \log n + O(1)$.

この2つの予想は Katai [3], Wirsing [4] によつて共に肯定的に解決された。これらの結果を更に精密化したものもいくつか知られている (例えば Maueclair [5])。上記の 1°), 2°), 予想1 は、いずれも、「加法的関数としての $\log$ を特徴付ける」結果である。この3つの定理の証明を見ればいずれも証明を2つの steps に分ける事が出来る。

1st step : 与えられた条件から $f(n)$ が完全加法的であることを導く。

2nd step : $f(n) = c \log n$ と書ける事を示す。

このうち、1st step の方が比較的易しいが、両者で全く違う方法を使わねばならず、色々な工夫が必要である。

§ 2. 乗法的関数

この§では、乗法的 (multiplicative) と呼ばれる別の種類の数論的関数について述べる。§1 の定義 1, 2 と極めて似た形の次の定義を置く。

定義3. 数論的関数 $f(n)$ が、条件

$$(**) \quad f(mn) = f(m) \cdot f(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

を満たす時、この f のことを、完全乗法的 であるという。

定義 4. $m, n \in \mathbb{N}$ が $(m, n) = 1$ とみえたら常に
 (**) が成り立つ時, f のことを 乗法的 という。

加法的と乗法的との違いは, (*) と (**) の違いである。
 従って, $\exp(\text{加法的関数}) = \text{乗法的関数}$ になる。(か
 し, $\log$ の多価性がある為, この逆は一般には言えない。又,
 乗法性の為, 乗法的関数の値のバラツキは, 加法的関数に
 比べるとかなり激しい。こうした事情を反映して, 乗法的関
 数に対しては, 加法的関数の場合の様な「特徴付け問題」が
 殆んど研究されていない。我々がこの問題に関して得た結果
 は, 主に次の2つである。

定理 1 (cf. [6]) S を密度 0 である様な $\mathbb{N}$ の部
 分集合とする (S の密度が 0 とは, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{n; n \in S, n \leq x\} = 0$
 の意味)。この時, $f(n)$ が乗法的, かつ $|f(n)| = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

更に $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \notin S}} |f(n+1) - f(n)| = 0$ であるなら,

f は完全乗法的である。

定理 2 (cf. [7]) f を乗法的関数とする。次の条
 件 I), II), III) を満たす, 早調増加な正値関数 $g(x)$ が存
 在するとする:

$$\text{I)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty, \quad g(2x) = O(g(x)).$$

$$\text{II)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)^{-1} \sum_{n \leq x} |f(n+1) - f(n)| = 0,$$

$$\text{III)} \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} g(x)^{-1} \left| \sum_{n \leq x} f(n) \right| > 0.$$

この時、 $f(n)$ は完全乗法的で、更に適当な $\lambda \geq -1$ を用いて、 $|f(n)| = n^\lambda$ と書く事が出来る。

この定理 2 の系として、次の結果を得る (cf [7]).

系. f は乗法的とし、次の I'), II'), III') をみたす、単調増加・正値関数 $g(x)$ が存在するとする。

$$\text{I')} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(dx)}{g(x)} = h(d) \text{ or } \forall d \in \mathbb{N} \text{ に対し存在する。}$$

$$\text{II')} \quad (\text{定理 2 の II) と同じ})$$

$$\text{III')} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)^{-1} \left(\sum_{n \leq x} f(n) \right) = M \text{ が存在し, } M \neq 0.$$

この時、 $f(n)$ の形は完全に決り、 $f(n) = n^\lambda$, $\lambda \geq -1$.

乗法的関数の特徴付けの問題を考える際には、加法的関数の場合の事も考え合わせ、 n^c ($c \in \mathbb{C}$) の特徴付けが最初の問題となる。この問題を考える時にも、§1 の末尾に書いたように、問題を 2 steps に分けて考える方がよい。ただその際、問題なのは、2nd step で解かぬばならない、

「 $f(n) = n^c$ と書ける事を示す」部分に、良い方法がない事である。この為、我々の2つの定理は、いずれも、1st stepの段階までしか達していない。定理2の系では、I'), III)によつて、 $f(n)$ が正値である事が証明でき、従つて $\log$ とつて加法的関数の理論に帰着できるのである。

ここで、我々の解に残した問題を3つ挙げておく。いずれも、2nd stepの形を決める段階に属する問題である。

問題 1 f を乗法的とし、 $|f(n)| = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)、更に

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n+1) - f(n)| = 0 \quad \text{であるなら,}$$

$$f(n) = n^{it} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{である.}$$

問題 2 S は定理1に挙げてたものとする。 f が加法的で

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \notin S}} |f(n+1) - f(n)| = 0 \quad \text{であるなら,}$$

$$f(n) = c \log n \quad \text{である.}$$

問題 3 $a \in 2$ 以上の自然数, $\varepsilon \in +1$ または -1 のいずれかにと、2 固定する。 f が加法的関数で、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(an+\varepsilon) - f(n) - f(a)| = 0$$

$$\text{であるなら, } f(n) = c \log n \quad \text{である.}$$

最後に、上記の定理 2, 及びそのあとの系で用いた仮定に関連して、2, 3 註を付けおきたい。

註 1. $g(x)$ に関する仮定 I'), $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(dx)}{g(x)} = h(d) \quad (\forall d \in \mathbb{N})$, について。

$g(x)$ の他の性質, $g(x) \nearrow$, $g(x) \geq 0$, $g(x) \rightarrow +\infty$ 等を用いるとこの I') から,

$$g\left(\frac{u}{v}x\right) = \left\{ \frac{h(u)}{h(v)} + o(1) \right\} \cdot g(x) \quad (\forall u, v \in \mathbb{N}^*)$$

を得る。従って、 $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ に対し $h(\lambda)$ を定義する事が出来る。

$$g(\lambda x) = \{h(\lambda) + o(1)\} g(x) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}^+),$$

即ち,

$$\frac{\log g(\lambda x)}{\log g(x)} = 1 + o(1) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}^+).$$

ここに現われた条件, $\frac{G(\lambda x)}{G(x)} \sim 1$, を満たす関数のことを slowly-oscillating function と呼び、こうした関数については、かなり詳しい事が分っている (例えば [9])。

註 2. やはり条件 I') について。

ここでは、 $\forall d \in \mathbb{N}$ に対し $\lim_{x \rightarrow \infty} g(dx)/g(x)$ の存在を仮定したが、これは次の様にやめる事が出来る。

I') 乗法的に独立な^(或る)2つの自然数 $a, b \geq 2$ に対し

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(ax)/g(x) = h(a), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(bx)/g(x) = h(b) \text{ が存在}$$

する。(こゝで、 a と b とが乗法的に独立であるとは、
 $\log a$ と $\log b$ とが $\mathbb{Z}$ 上-一次独立なことをいう。)

註 3 定理 2 の条件 I) について。

$g(2x) = O(g(x))$ とは、 $|g|$ が余り極端に大きくならぬ事
 を保証する為の仮定である。この仮定より直ちに、

$$\exists x_0, \text{ a.t. } \forall x \geq x_0 \text{ で } g(2x) \leq M \cdot g(x)$$

なる $M > 0$ の存在が言えるが、この M を用いて、上の仮
 定より 次が導ける。

$$|g(x)| \leq C \cdot x^\alpha, \quad \alpha = \log M / \log 2, \quad C > 0.$$

(以上)

References.

- [1]. A. Renyi: Probability Theory, North-Holland Applied Mathematics and Mechanics Vol. 10, Chap. IX.
- [2]. P. Erdős: On the distribution function of additive functions, Ann. of Math., Vol. 47, No. 1 (1946) pp. 1 - 20
- [3]. I. Katái: On a problem of P. Erdős, Journal of Number Theory, Vol. 2 (1970) pp. 1 - 6
- [4]. E. Wirsing: A characterization of $\log n$ as an additive arithmetical function, Symposia Mathematica, Vol IV pp. 45 - 57 (1968/69)
- [5]. J.-L. Mauc laire: Sur certaines fonctions arithmétiques, Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU, (1976/77) No. 26, 7 P.

- [6]. Mauclaire-Murata: On the regularity of arithmetic multiplicative functions. I, Proc. of the Japan Acad. Vol. 56 Ser. A, No. 9 (1980) pp. 438 - 440
- [7]. Mauclaire-Murata: _____. III, ibid. Vol. 57 Ser. A, No. 6 (1981) pp. 335 - 336
- [8]. Mauclaire, Murata: 数論的関数の特徴付けの問題, 数理解析研究所講究録 Vol. 456, pp. 111 - 122
- [9]. J.Korevaar, T.van Aardenne-Ehrenfest, N.G.de Bruijn: A note on slowly oscillating functions, Nieuw Arch. Wiskunde (2), Vol. 23 (1949) pp. 77 - 86