

Geometric Crystals and Generalized Young Tableaux

中島 俊樹 (NAKASHIMA Toshiki)

上智大学理工学部数学科
(Sophia University)

1 Introduction

幾何クリスタルの理論は、reductive group に対しては [1] により基礎付けがなされ、[5] において、Kac-Moody group の場合に拡張された。この論説では、unipotent subgroup U^- 上に unipotent crystal の構造が入るための十分条件を与え、semi-simple の場合自然にその条件が満たされることを示した。しかし、affine の場合は不明である。特に、 A_n type の場合に対応する geometric crystal の ultra-discretization は generalized Young tableaux というもので記述できることを示した。

この論説での用語の定義、記号は [5], [6] に従うものとする。

2 Geometric Crystals and Unipotent Crystals

2.1 Geometric Crystals

G (resp. $\mathfrak{g}$) を symmetrizable GCM $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ に associate した Kac-Moody 群 (resp. 代数) とし、 $G \supset B^\pm \supset U^\pm \supset T$ をそれぞれ Borel subgroup, unipotent subgroup, maximal torus とする。(Kac-Moody group については、[3],[7] を参照。) $\Delta := \{\alpha \in t^* | \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq (0)\}$ を root system, $Q = \sum_i \mathbb{Z}\alpha_i$ を root lattice とする。 $Q_+ = \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$, $\Delta_+ := \Delta \cap Q_+$ とおく。Weyl 群 $W = \langle s_i | i \in I \rangle$ (s_i は simple reflection) は $W \cong N_G(T)/T$ となる。 $i \in I$ に対して、homomorphism $\phi_i : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow G$ があって

$$x_i(t) := \phi_i \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp t e_i, \quad y_i(t) := \phi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \exp t f_i \quad (t \in \mathbb{C}).$$

ここで、 e_i, f_i は $\mathfrak{g}$ の生成元。

$w \in W$ に対して

$$R(w) := \{(i_1, i_2, \dots, i_l) \in I^l | w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}\},$$

とおく。ここで、 l は length of w 。

$\text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ (resp. $\text{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$) の元を T の character (resp. co-character) と呼ぶ。simple co-root $\alpha_i^\vee \in \text{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ ($i \in I$) を $\alpha_i^\vee(t) := T_i$ で定義すると、pairing $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ を得る。

X を $\mathbb{C}$ 上の ind-variety, $\gamma : X \rightarrow T$, $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \rightarrow X$ ($i \in I$);

$$\begin{aligned} e_i^c : \mathbb{C}^\times \times X &\longrightarrow X \\ (c, x) &\longmapsto e_i^c(x), \end{aligned}$$

を rational morphisms とする。word $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l) \in R(w)$ ($w \in W$) に対して $\alpha^{(l)} := \alpha_{i_l}$, $\alpha^{(l-1)} := s_{i_l}(\alpha_{i_{l-1}}), \dots, \alpha^{(1)} := s_{i_l} \dots s_{i_2}(\alpha_{i_1})$ とおく。ここで、word $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l) \in R(w)$ に対

して rational morphism $e_i : T \times X \rightarrow X$ を、次で定義する。

$$(t, x) \mapsto e_i^t(x) := e_{i_1}^{\alpha^{(1)}(t)} e_{i_2}^{\alpha^{(2)}(t)} \dots e_{i_l}^{\alpha^{(l)}(t)}(x).$$

Definition 2.1. (i) 上のような 3 つ組 $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ が *geometric crystal* とは $e^1(x) = x$ かつ

$$\gamma(e_i^c(x)) = \alpha_i^\vee(c)\gamma(x), \quad (2.1)$$

かつ、任意の $w \in W$, i と $i' \in R(w)$ に対して

$$e_i = e_{i'}. \quad (2.2)$$

が成立すること。

(ii) $(X, \gamma_X, \{e_i^X\}_{i \in I})$, $(Y, \gamma_Y, \{e_i^Y\}_{i \in I})$ を *geometric crystal* とする。rational morphism $f : X \rightarrow Y$ が *morphism of geometric crystals* とは f が次をみたすこと：

$$f \circ e_i^X = e_i^Y \circ f, \quad \gamma_X = \gamma_Y \circ f.$$

特に、morphism f が *ind-varieties* の birational isomorphism であるとき f は *isomorphism of geometric crystals* という。

次の補題が成り立つ：

Lemma 2.2. (2.2) は次の関係と同値

$$\begin{aligned} e_i^{c_1} e_j^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle &= 0, \\ e_i^{c_1} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\ e_i^{c_1} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -2, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \\ e_i^{c_1} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1^3 c_2} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^3 c_2} e_i^{c_1^2 c_2} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1} & \text{if } \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = -3, \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = -1, \end{aligned}$$

Remark. $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle \geq 4$ のとき e_i と e_j の間には関係なし。

2.2 Unipotent Crystals

以下 U^+ を U と書く。次に Kac-Moody groups に対して unipotent crystals (see [1]) を定義する。

Definition 2.3. X を $\mathbb{C}$ 上の ind-variety, $\alpha : U \times X \rightarrow X$ を $\{e\} \times X$ 上で定義される U -action とする。このとき、pair $\mathbf{X} = (X, \alpha)$ が U -variety とは、 U -varieties $\mathbf{X} = (X, \alpha_X)$ と $\mathbf{Y} = (Y, \alpha_Y)$ に対して rational morphism $f : X \rightarrow Y$ が U -morphism とは U -action と可換となること。

ここで、 $B^- = U^- T$ に U -variety structure を入れる。 B^- は G の ind-subgroup であり、また G における multiplication map は open embedding; $B^- \times U \hookrightarrow G$ を induce するので birational isomorphism であり、その inverse birational isomorphism を

$$g : G \longrightarrow B^- \times U.$$

とする。ここで、rational morphisms $\pi^- : G \rightarrow B^-$ と $\pi : G \rightarrow U$ を $\pi^- := \text{proj}_{B^-} \circ g$ と $\pi := \text{proj}_U \circ g$ で定義し B^- への rational U -action α_{B^-} を

$$\alpha_{B^-} := \pi^- \circ m : U \times B^- \longrightarrow B^-,$$

と定義すると (m multiplication map in G), U -variety $\mathbf{B}^- = (B^-, \alpha_{B^-})$ を得る。

Definition 2.4. (i) $X = (X, \alpha)$ を U -variety, $f : X \rightarrow B^-$ を U -morphism とする。このとき、pair (X, f) を *unipotent G -crystal* と呼ぶ。

(ii) (X, f_X) 及 (Y, f_Y) を unipotent crystals とする。 U -morphism $g : X \rightarrow Y$ が *morphism of unipotent crystals* とは $f_X = f_Y \circ g$ となることであり、特に g が ind-variety の birational isomorphism であるとき *isomorphism of unipotent crystals* という。

unipotent crystal の大きな特徴は crystal base と関係の深い積構造が入ることであるがここでは省略する。文献は [1], [5] を参照。

ここまで定義した unipotent crystal と geometric crystal には以下のような関係がある。

$i \in I$ に対して $U_i^\pm := U^\pm \cap \bar{s}_i U^\mp \bar{s}_i^{-1}$, $U_\pm^i := U^\pm \cap \bar{s}_i U^\pm \bar{s}_i^{-1}$ とおく。実は $U_i^\pm = U_{\pm\alpha_i}$. 半直積

$$U^- = U_{-\alpha_i} \cdot U_-^i,$$

より canonical projection $\xi_i : U^- \rightarrow U_{-\alpha_i}$ を得る。これを用いて U^- 上の関数

$$\chi_i := y_i^{-1} \circ \xi_i : U^- \rightarrow U_{-\alpha_i} \rightarrow \mathbb{C}$$

と定義し、さらに $\chi_i(u \cdot t) := \chi_i(u)$ ($u \in U^-$, $t \in T$) により B^- 上の関数に延長する。unipotent G -crystal (X, f_X) に対して関数 $\varphi_i := \varphi_i^X : X \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\varphi_i := \chi_i \circ f_X,$$

で、また rational morphism $\gamma_X : X \rightarrow T$ を

$$\gamma_X := \text{proj}_T \circ f_X : X \rightarrow B^- \rightarrow T, \quad (2.3)$$

で定義する (proj_T は canonical projection). 今、関数 φ_i は X 上で恒等的に 0 でないとする。このとき、morphism $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \rightarrow X$ を

$$e_i^c(x) := x_i \left(\frac{c-1}{\varphi_i(x)} \right) (x). \quad (2.4)$$

とすると、次を得る：

Theorem 2.5 ([1]). (X, f_X) を unipotent G -crystal とする。任意の $i \in I$ に対して関数 φ_i は X 上で恒等的に 0 でないとする。このとき、rational morphisms $\gamma_X : X \rightarrow T$ と $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \rightarrow X$ を上のよう定義すると $(X, \gamma_X, \{e_i\}_{i \in I})$ は geometric G -crystal の構造を持つ。

2.3 Crystals

“Crystal” とは、crystal bases の持つ組合せ的な性質を抽象化したもの。

Definition 2.6. Crystal B とは次の写像を備えた集合:

$$\text{wt} : B \rightarrow P,$$

$$\varepsilon_i : B \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \quad \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\} \quad \text{for } i \in I,$$

$$\bar{e}_i : B \sqcup \{0\} \rightarrow B \sqcup \{0\}, \quad \bar{f}_i : B \sqcup \{0\} \rightarrow B \sqcup \{0\} \quad \text{for } i \in I,$$

$$\bar{e}_i(0) = \bar{f}_i(0) = 0.$$

これらの maps は任意の $b, b_1, b_2 \in B$ に対して次を満たす：

$$\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle, \quad (2.5)$$

$$\text{wt}(\tilde{e}_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i \text{ if } \tilde{e}_i b \in B, \quad (2.6)$$

$$\text{wt}(\tilde{f}_i b) = \text{wt}(b) - \alpha_i \text{ if } \tilde{f}_i b \in B, \quad (2.7)$$

$$\tilde{e}_i b_2 = b_1 \iff \tilde{f}_i b_1 = b_2 \quad (b_1, b_2 \in B), \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_i(b) = -\infty \implies \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0. \quad (2.9)$$

ここで $\tilde{e}_i$ および $\tilde{f}_i$ は *Kashiwara operators* と呼ばれる。 (L, B) が crystal base ならば、 B は crystal.

2.4 Positive structure and Ultra-discretizations/Tropicalizations

“Positive structure” について思い出す ([1], [4]).

$T = (\mathbb{C}^\times)^l$ を algebraic torus, $X^*(T) \cong \mathbb{Z}^l$ (resp. $X_*(T) \cong \mathbb{Z}^l$) を T の lattice of characters (resp. co-characters) とする。 $R := \mathbb{C}(c)$ とし map v を次で定義する：

$$\begin{aligned} v: R \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ f(c) &\longmapsto \deg(f(c)). \end{aligned}$$

ここで $f_1, f_2 \in R \setminus \{0\}$ に対して次が成立：

$$v(f_1 f_2) = v(f_1) + v(f_2), \quad v\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = v(f_1) - v(f_2) \quad (2.10)$$

$f = (f_1, \dots, f_n): T \rightarrow T'$ を rational morphism ($T = (\mathbb{C}^\times)^m$, $T' = (\mathbb{C}^\times)^n$) とし map $\hat{f}: X_*(T) \rightarrow X_*(T')$ を次で定義：

$$(\hat{f}(\xi))(c) := (c^{v(f_1(\xi(c))), \dots, c^{v(f_n(\xi(c)))}),$$

ここで $\xi(c) := (c^{l_1}, \dots, c^{l_m}) \in X_*(T)$ は T の co-character. v は (2.10) をみたすので, map $\hat{f}$ は additive group homomorphism.

Rational function $f(c) \in \mathbb{C}(c)$ ($f \neq 0$) が *positive* とは f が正係数多項式の商で表示されること。

Remark. $f(c) \in \mathbb{C}(c)$ が *positive* $\Leftrightarrow f(a) > 0$ ($\forall a > 0$) (by M.Kashiwara).

$f_1, f_2 \in \mathbb{C}(c) \subset R$ が *positive* $\Rightarrow$ (2.10) と次が成り立つ：

$$v(f_1 + f_2) = \max(v(f_1), v(f_2)). \quad (2.11)$$

Definition 2.7 ([1]). 2つの algebraic tori T, T' 間の rational morphism. $f = (f_1, \dots, f_n): T \rightarrow T'$ が *positive* とは, 次の2つの条件がみたされること：

- (i) 任意の co-character $\xi: \mathbb{C}^\times \rightarrow T$ に対して, $\text{Im}(\xi) \subset \text{dom}(f)$.
- (ii) 任意の co-character $\xi: \mathbb{C}^\times \rightarrow T$ に対して, 任意の $f_i(\xi(c))$ ($i \in I$) は positive rational function.

$\text{Mor}^+(T, T')$ を T から T' への positive rational morphism の集合とする：

Lemma 2.8 ([1]). 任意の positive rational morphisms $f \in \text{Mor}^+(T_1, T_2)$, $g \in \text{Mor}^+(T_2, T_3)$ に対してその合成 $g \circ f$ が $\text{Mor}^+(T_1, T_3)$ に入る。

Lemma 2.8 により, object が algebraic tori で arrow が positive rational morphism である category $\mathcal{T}_+$ を定義できる：

Lemma 2.9 ([1]). 任意の algebraic tori T_1, T_2, T_3 , と positive rational morphisms $f \in \text{Mor}^+(T_1, T_2)$, $g \in \text{Mor}^+(T_2, T_3)$ に対して、 $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.

この補題により, functor $\mathcal{UD}$ を得る:

$$\begin{aligned} \mathcal{UD}: \quad T_+ &\longrightarrow \text{Set} \\ T &\longmapsto X_*(T) \\ (f: T \rightarrow T') &\longmapsto (\widehat{f}: X_*(T) \rightarrow X_*(T')) \end{aligned}$$

Definition 2.10 ([1]). $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ を geometric crystal, T' を algebraic torus とする。birational isomorphism $\theta: T' \rightarrow X$ が χ 上の positive structure とは、

(i) rational morphism $\gamma \circ \theta: T' \rightarrow T$ が positive.

(ii) 任意の $i \in I$ に対して $e_{i,\theta}(c, t) := \theta^{-1} \circ e_i^c \circ \theta(t)$ と rational morphism $e_{i,\theta}: \mathbb{C}^\times \times T' \rightarrow T'$ を定義すると positive.

θ が positive structure のとき functor $\mathcal{UD}$ を positive rational morphisms $e_{i,\theta}: \mathbb{C}^\times \times T' \rightarrow T'$ と $\gamma \circ \theta: T' \rightarrow T$ に apply すると次を得る:

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &:= \mathcal{UD}(e_{i,\theta}): \mathbb{Z} \times X_*(T) \rightarrow X_*(T) \\ \bar{\gamma} &:= \mathcal{UD}(\gamma \circ \theta): X_*(T') \rightarrow X_*(T). \end{aligned}$$

Theorem 2.11. Geometric crystal $\chi = (X, \gamma, \{e_i\}_{i \in I})$ とその positive structure $\theta: T' \rightarrow X$ に対して得られる $\mathcal{UD}_{\theta, T'}(\chi) = (X_*(T'), \bar{\gamma}, \{\bar{e}_i\}_{i \in I})$ は free W -crystal (see [1, 2.2]).

Functor $\mathcal{UD}$ を “ultra-discretization” と呼ぶ。これは [1] において “tropicalization” と呼んでいたものである。ここでは B を crystal とするとき、 $\mathcal{UD}(T) \cong B$ なる T in T_+ が存在するとき、 T を B の tropicalization と呼ぶ。

3 Geometric crystals on unipotent groups

semisimple algebraic group G の unipotent subgroup U^- 上に geometric/unipotent crystal の構造を入れる。

3.1 Unipotent/Geometric crystal structure on U^-

Borel subgroup B^- と同様にして unipotent subgroup U^- も G の multiplication map m の inverse birational isomorphism $h: G \rightarrow U^- \times B^-$ から induce される U^- -variety の構造をもつ。それを $U^- = (U^-, \alpha_{U^-})$ とかくことにしよう。ここで、 $\pi^{--} := \text{proj}_{U^-} \circ h$ で U^- 上の U^- -action α_{U^-} を

$$\alpha_{U^-} := \pi^{--} \circ m: U \times U^- \rightarrow U^-,$$

で定義する。

U^- 上に unipotent crystal structure を入れるため U^- -morphism $F: U^- \rightarrow B^-$ を構成する。 $h: G \rightarrow U^- \times B^-$ から induce される projection $\pi^0: G \rightarrow T$ とすると、

$$\pi^-(x) = \pi^{--}(x)\pi^0(x) \quad (x \in G). \quad (3.1)$$

次が U^- -morphism F が存在するための十分条件:

Lemma 3.1. $T: U^- \rightarrow T$ を *rational morphism* で次を満たすとする:

$$T(\pi^{--}(xu)) = \pi^0(xu)T(u), \quad \text{for } x \in U \text{ and } u \in U^-. \quad (3.2)$$

このとき *morphism* $F: U^- \rightarrow B^-$ を次で定義すると

$$\begin{aligned} F: U^- &\longrightarrow B^- \\ u &\longmapsto uT(u), \end{aligned} \quad (3.3)$$

F は U -*morphism* $U^- \rightarrow B^-$ となる。

Semisimple な G には 上のような *rational morphism* T が存在することを見よう。

$\Lambda_i \in P_+$ ($i = 1, \dots, n$) を fundamental weight, $L(\Lambda_i)$ を Λ_i を highest weight にもつ irreducible highest weight $\mathfrak{g}$ -module ($\mathfrak{g}$ は G の Lie algebra), u_{Λ_i} (resp. v_{Λ_i}) を highest (resp. lowest) weight vector とする。 $L^*(\Lambda_i)$ を $L(\Lambda_i)$ の contragredient module, $v_{\Lambda_i}^* \in L^*(\Lambda_i)$ を次で定まる元とする:

$$\langle u, v_{\Lambda_i}^* \rangle = \begin{cases} c & \text{if } u = cv_{\Lambda_i}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで関数 $f_i: U^- \rightarrow \mathbb{C}$ ($i \in I$) を次で定義する:

$$f_i(g) = \langle g \cdot u_{\Lambda_i}, v_{\Lambda_i}^* \rangle. \quad (3.4)$$

Morphism $T: U^- \rightarrow T$ を次で定義する:

$$T(u) := \prod_{i \in I} \alpha_i^\vee(f_i(u)^{-1}). \quad (3.5)$$

これを用いて *morphism* $F: U^- \rightarrow B^-$ を次のようにおく:

$$F(u) := u \cdot \prod_{i \in I} \alpha_i^\vee(f_i(u)^{-1}). \quad (3.6)$$

Lemma 3.2. *Morphism* $F: U^- \rightarrow B^-$ は U -*morphism*.

よって次の結果を得る:

Corollary 3.3. G を *semi-simple* とすると, (U^-, F) は *unipotent crystal*.

関数 $\varphi_i: U^- \rightarrow \mathbb{C}$ は恒等的に 0 でないので, Theorem 2.5 で見たように U^- 上の *unipotent crystal* から *geometric crystal* を導出できる。そこで *morphisms* $e_i: \mathbb{C}^\times \times U^- \rightarrow U^-$ と $\gamma_{U^-}: U^- \rightarrow T$ を次で定義する:

$$e_i(c, u) = e_i^c(u) := x_i\left(\frac{c-1}{\varphi_i(u)}\right)(u), \quad \gamma_{U^-}(u) := T(u), \quad (u \in U^- \text{ and } c \in \mathbb{C}^\times), \quad (3.7)$$

Theorem 3.4. G が *semi-simple* ならば, $(U^-, \gamma_{U^-}, \{e_i\}_{i \in I})$ は *geometric crystal*.

4 $SL_{n+1}(\mathbb{C})$ -case

前節の結果を $SL_{n+1}(\mathbb{C})$ -case に適用してみる。

Unipotent subgroup U^- は下三角行列で diagonal part が identity matrix となっているもの全体と同一視する。

まず、morphism $T: \mathcal{U}^- \rightarrow \mathcal{T}$ がどう記述されるか見てみよう。 $u = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1} \in U^-$ に対して $u^{(i)}$ ($i \in I := \{1, \dots, n\}$) を次のような submatrix とする:

$$u^{(i)} := (a_{i,j})_{n-i+2 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq i},$$

つまり

$$u = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \boxed{u^{(i)}} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in U^-$$

そして $m_i(u) := \det(u^{(i)})$ とおく。すると、適当な normalization のもと次が成り立つ。

Lemma 4.1. $f_i \equiv m_i$ on U^- for all $i = 1, \dots, n$.

e_i^α の U^- への作用は次で与えられる:

$$e_i^\alpha(u) = x_i\left(\frac{\varphi_i(u)}{c-1}\right) \cdot u \cdot x_i\left(\frac{1-c}{c\varphi_i(u)}\right) \cdot \alpha_i^\vee(c)^{-1}.$$

ここで、 U^- の open subset B^u 上への e_i^α の作用を見る:

$$B^u := \left\{ Y(a) = \begin{pmatrix} y_n(a_{1,n})y_{n-1}(a_{1,n-1}) \cdots y_1(a_{1,1}) \times \\ \times y_n(a_{2,n}) \cdots y_2(a_{2,2}) \times \\ \cdots \times y_n(a_{n,n}) \end{pmatrix} : a_{i,j} \in \mathbb{C}^\times \right\} \subset U^-. \quad (4.1)$$

次のような同型が存在する:

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} &\xrightarrow{\sim} B^u, \\ a = (a_{i,j}) &\mapsto Y(a). \end{aligned}$$

これは、次の birational isomorphism $\theta: (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow B^u \hookrightarrow U^-$ を induce する。また、次を得る:

Lemma 4.2. $\varphi_i(Y(a)) = \sum_{k=1}^i a_{k,i}$, $f_i(Y(a)) = \prod_{k=1}^i \prod_{j=k}^{n-i+k} a_{k,j}$.

Rational action $e_i^\alpha: B^u \rightarrow B^u$ は次のように具体的に記述される:

Proposition 4.3. $e_i^\alpha Y((a_{k,j})_{1 \leq k \leq j \leq n}) = Y((a'_{k,j})_{1 \leq k \leq j \leq n})$,

$$a'_{k,j} := \begin{cases} C_k^{(i)} a_{k,i-1} & \text{if } j = i-1, \\ \frac{a_{k,i}}{C_{k-1}^{(i)} C_k^{(i)}} & \text{if } j = i, \\ C_{k-1}^{(i)} a_{k,i+1} & \text{if } j = i+1, \\ a_{k,j} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.2)$$

ここで

$$C_k^{(i)} := \frac{\alpha(a_{1,i} + \cdots + a_{k,i}) + a_{k+1,i} + \cdots + a_{i,i}}{a_{1,i} + \cdots + a_{i,i}} \quad (1 \leq k \leq i \leq n).$$

ここで、次のような birational isomorphism を考える：

$$\begin{aligned} \xi : (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} &\longrightarrow (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\ (a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} &\mapsto (A_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} \end{aligned}$$

ここで、

$$A_{i,j} := \frac{a_{i,j} a_{i-1,j-1} \cdots a_{1,j-i+1}}{a_{i-1,j} a_{i-2,j-1} \cdots a_{1,j-i+2}} \quad (1 \leq i \leq j \leq n).$$

Inverse morphism は次：

$$a_{i,j} := \frac{A_{i,j} A_{i-1,j} \cdots A_{1,j}}{A_{i-1,j-1} A_{i-2,j-1} \cdots A_{1,j-1}} \quad (1 \leq i \leq j \leq n).$$

すると次を得る：

$$\begin{aligned} \xi \circ e_i^\alpha \circ \xi^{-1} : (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} &\longrightarrow (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\ (A_{k,j})_{1 \leq k \leq j \leq n} &\mapsto (A'_{k,j})_{1 \leq k \leq j \leq n}, \end{aligned}$$

ここで

$$A'_{k,j} = \begin{cases} A_{k,j} & \text{if } j \neq i, i-1 \\ \alpha_k^{(i)} \cdot A_{k,i-1} & \text{if } j = i-1 \\ \alpha_k^{(i)-1} \cdot A_{k,i} & \text{if } j = i \end{cases}$$

$$\alpha_k^{(i)} = \frac{\alpha \sum_{1 \leq j \leq k} \frac{\prod_{l=1}^j A_{l,i}}{\prod_{l=1}^{j-1} A_{l,i-1}} + \sum_{k < j \leq i} \frac{\prod_{l=1}^j A_{l,i}}{\prod_{l=1}^{j-1} A_{l,i-1}}}{\alpha \sum_{1 \leq j \leq k-1} \frac{\prod_{l=1}^j A_{l,i}}{\prod_{l=1}^{j-1} A_{l,i-1}} + \sum_{j=k}^i \frac{\prod_{l=1}^j A_{l,i}}{\prod_{l=1}^{j-1} A_{l,i-1}}} \quad (4.3)$$

ここで、 $\hat{\theta} := \theta \circ \xi^{-1} : (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} \xrightarrow{\xi^{-1}} (\mathbb{C}^\times)^{\frac{n(n+1)}{2}} \xrightarrow{\theta} U^-$ とおくと

Theorem 4.4. Morphism $\hat{\theta}$ は geometric crystal U^- 上の positive structure を与える。

5 Geometric Crystals on U^- and generalized Young Tableaux

5.1 Crystal structure on Young tableaux

Young tableaux 達の crystal structure について思い出す ([2]). 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ に対して

$$B(\lambda) = \{(B_{i,j}) = \text{Young tableau of shape } \lambda \text{ with entries } 1, 2, \dots, n+1\},$$

とおく。ここで $B_{i,j} := \#\{j \text{ in the } i\text{-th row.}\}$. $B(\lambda)$ の元は次のように表示される：

1			$B_{1,i}$	$B_{1,i+1}$	
2		$B_{2,i}$	$B_{2,i+1}$		
i		$B_{i,i}$	$B_{i,i+1}$		
$i+1$		$B_{i+1,i+1}$			

(5.1)

さて、 $\tilde{e}_i^\beta(B_{k,j})$ ($\beta \geq 0$) を具体的に見よう：

$$\tilde{e}_i^\beta(B_{k,j}) = (B_{k,j} + \beta_{k,j}), \quad \beta_{k,j} = \begin{cases} \beta_k^{(i)} & \text{if } j = i, \\ -\beta_k^{(i)} & \text{if } j = i+1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta_k^{(i)} &= \max \left(\beta + \max_{1 \leq j \leq k} \left(\sum_{l=1}^j B_{l,i+1} - \sum_{l=1}^{j-1} B_{l,i} \right), \max_{k < j \leq i} \left(\sum_{l=1}^j B_{l,i+1} - \sum_{l=1}^{j-1} B_{l,i} \right) \right) \\ &\quad - \max \left(\beta + \max_{1 \leq j < k} \left(\sum_{l=1}^j B_{l,i+1} - \sum_{l=1}^{j-1} B_{l,i} \right), \max_{k \leq j \leq i} \left(\sum_{l=1}^j B_{l,i+1} - \sum_{l=1}^{j-1} B_{l,i} \right) \right) \quad (1 \leq k \leq i), \\ \beta_{i+1}^{(i)} &= 0 \end{aligned}$$

Remark. 上の $\beta_k^{(i)}$ の公式は $B_{i,i}$, $B_{i+1,i+1}$ によらない。

5.2 Generalized Young tableau and its explicit crystal structure

$b \in B(\lambda)$ を (5.1) のような Young tableau としよう。すると $B_{i,j}$ 達は Young tableau であるための条件、たとえば、

$$B_{i,j} \geq 0, \quad \sum_{i \leq j \leq k} B_{i,j} \geq \sum_{i+1 \leq j \leq k+1} B_{i+1,j},$$

などを持つ。

そこで、 $B_{i,j}$ 達の持つこうした条件を忘れた次のようなものを考える：

$$B^\sharp := \{(B_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n+1} \mid B_{i,j} \in \mathbb{Z}\} (= \mathbb{Z}^{\frac{1}{2}n(n+1)}),$$

ここで、 $B^\sharp$ の定義に $B_{i,i}$ が現れていないが、もともと各行の長さが一定なので独立に動けるものは1つ少ない。また、上の remark に述べたように $\beta_k^{(i)}$ は $B_{i,i}$ に依らない。

さて、この $B^\sharp$ に crystal の構造を次のようにして入れる。 $v = (B_{i,j}) \in B^\sharp$ に対して次のようにおく：

$$\begin{cases} b_k^{(i)}(v) := \sum_{1 \leq l \leq k} B_{l,i+1} - \sum_{1 \leq l \leq k} B_{l,i}, \\ \varepsilon_i(v) := \max_{1 \leq k \leq i} \{b_k^{(i)}(v)\}, \\ wt(v) := - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i+1 \leq j \leq n+1}} B_{k,j} \right) \alpha_i, \\ \varphi_i(v) := \langle h_i, wt(v) \rangle + \varepsilon_i(v). \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} m_i &= m_i(v) := \min\{k | 1 \leq k \leq i, b_k^{(i)}(v) = \varepsilon_i(v)\}, \\ M_i &= M_i(v) := \max\{k | 1 \leq k \leq i, b_k^{(i)}(v) = \varepsilon_i(v)\}. \end{aligned}$$

Kashiwara operator $\bar{e}_i, \bar{f}_i$ の $v = (B_{i,j})$ への作用は次：

$$\bar{f}_i : \begin{cases} B_{k,j} \longrightarrow B_{k,i} & \text{if } (k,j) \neq (M_i,i), (M_i,i+1) \\ B_{M_i,i} \longrightarrow B_{M_i,i} - 1 & \text{if } (k,j) = (M_i,i) \\ B_{M_i,i+1} \longrightarrow B_{M_i,i+1} + 1 & \text{if } (k,j) = (M_i,i+1) \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\bar{e}_i : \begin{cases} B_{k,j} \longrightarrow B_{k,i} & \text{if } (k,j) \neq (m_i,i), (m_i,i+1), \\ B_{m_i,i} \longrightarrow B_{m_i,i} + 1 & \text{if } (k,j) = (m_i,i) \\ B_{m_i,i+1} \longrightarrow B_{m_i,i+1} - 1 & \text{if } (k,j) = (m_i,i+1) \end{cases} \quad (5.4)$$

Theorem 5.1. 上の (5.2), (5.3), (5.4) のようにおくと $B^\sharp$ は crystal となる。

Remark. $\bar{e}_i$ の作用は前 subsection の $\bar{e}_i^\beta$ の公式において $\beta = 1$ としたものであり、 $\bar{f}_i = \bar{e}_i^{-1}$ としてある。また、 $B^\sharp$ の crystal graph が connected かどうかは不明。

ここで、crystal $B^\sharp$ の tropicalization が U^- 上の geometric crystal ($\Leftrightarrow U^-$ 上の geometric crystal の ultra-discretization が crystal $B^\sharp$) であることが次の対応により $\alpha_k^{(i)}$ についての (4.3) と $\beta_k^{(i)}$ についての (5.2) を比較することによりわかる：

$$\begin{aligned} A_{l,i} &\longleftrightarrow B_{l,i+1} \\ x \cdot y &\longleftrightarrow x + y \\ x/y &\longleftrightarrow x - y \\ x + y &\longleftrightarrow \max(x, y) \end{aligned}$$

Theorem 5.2. $\mathcal{UD}(U^-) = B^\sharp$.

参考文献

- [1] Berenstein A. and Kazhdan D., Geometric crystals and Unipotent crystals, math.QA/9912105.
- [2] Kashiwara M. and Nakashima T., Crystal graphs for representations of the q -analogue of classical Lie algebra, J.Algebra, 165, No.2, (1994), 295–345.
- [3] Kumar S., Kac-Moody groups, their Flag varieties and Representation Theory, Progress in Mathematics 204, Birkhauser Boston, 2002.
- [4] Nakashima T., Polyhedral Realizations of Crystal Bases and Braid-type Isomorphisms. Contemporary Mathematics 248, 419–435 (1999).
- [5] Nakashima T., Geometric Crystals on Schubert Varieties, (preprint), math.QA/0303087.
- [6] Nakashima T., Geometric crystal, Schubert varieties, Crystals, 数理解析研究所講究録 1310 『組合わせ論的表現論とその周辺』 (2003).
- [7] Slodowy P., On the geometry of Schubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras, Can.Math.Soc.Conf.Proc. on 'Algebraic geometry' (Vancouver) 6, 405–442, (1986).