

局所体上の 2 次形式の Gross-Keating 不変量について

池田保 (京都大学大学院理学研究科) ikeda@math.kyoto-u.ac.jp
桂田英典 (室蘭工業大学大学院工学研究科) hidenori@mmm.muroran-it.ac.jp

1 Gross-Keating 不変量

Gross-Keating 不変量 (以下では GK 不変量という.) は数論幾何への応用のため, Gross と Keating の共著論文 [3] で導入された. この節では GK 不変量の定義を復習する. 原論文では GK 不変量は $\mathbb{Z}_p$ 上の 2 次形式に対して定義されているが, 一般の標数 0 の局所体の整数環上で考える.

F を標数 0 の局所体, $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_F$ を F の整数環とする. $\mathfrak{o}$ の極大 ideal と剰余体をそれぞれ $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$ とする. $\mathfrak{p}$ の位数を q で表す. q が偶数のとき, F は dyadic であるという. この論説で主として扱うのは F が dyadic の場合である. ϖ を $\mathfrak{o}$ の一つの素元とする. $x \in \varpi^n \mathfrak{o}^\times$ のとき, $\text{ord}(x) = n$ と表す. また $\text{ord}(0) = +\infty$ であると約束する. $F^\times$ の平方元の全体のなす部分群を $F^{\times 2}$ で表す.

環 R に対して, R の元を成分に持つ $m \times n$ 行列の全体を $M_{mn}(R)$ で表す. $m = n$ のときは単に $M_n(R)$ と表す. $b_1, \dots, b_n$ を成分に持つ対角行列を $\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ で表す.

定義 1.1. $B = {}^t B = (b_{ij}) \in M_n(F)$ が半整数対称行列であるとは

$$\begin{aligned} b_{ii} &\in \mathfrak{o} & (1 \leq i \leq n), \\ 2b_{ij} &\in \mathfrak{o} & (1 \leq i, j \leq n). \end{aligned}$$

が成り立つこととする. 半整数対称行列の全体からなる $M_n(F)$ の部分集合を $\mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ で表す.

$B \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ が非退化とは $\det B \neq 0$ なることとする. $\mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ の非退化な元全体のなす部分集合を $\mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ で表す.

二つの行列 $B, B' \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ が同値であるとは $B' = B[U]$ を満たす $U \in \text{GL}_n(\mathfrak{o})$ が存在

するととする。ここで、 $B[U] = {}^tUBU$ である。 B と B' が同値であることを $B \sim B'$ で表す。 B と同値な行列の全体を $\{B\}$ で表す。

$B = (b_{ij}) \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ とするとき、次の2つの条件

$$\begin{aligned} \text{ord}(b_{ii}) &\geq a_i & (1 \leq i \leq n), \\ \text{ord}(2b_{ij}) &\geq (a_i + a_j)/2 & (1 \leq i, j \leq n) \end{aligned}$$

を満たす非負整数の非減少列 $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ の全体を $S(B)$ で表す。また

$$\mathbf{S}(\{B\}) = \bigcup_{B' \in \{B\}} S(B') = \bigcup_{U \in \text{GL}_n(\mathfrak{o})} S(B[U]).$$

とおく。

定義 1.2. 辞書式順序 $\succ$ に関する $\mathbf{S}(\{B\})$ の最大元を $B = (b_{ij}) \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ の GK 不変量 $\text{GK}(B)$ という。 $\text{GK}(B) \in S(B)$ のとき、 B は最適形式 (optimal form) という。

ここで辞書式順序 $\succ$ は、 $(y_1, y_2, \dots, y_n), (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, \dots, y_n) &\succ (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ \iff \\ y_1 = z_1, \dots, y_{j-1} = z_{j-1}, y_j &> z_j \text{ なる } j \leq n \text{ が存在する} \end{aligned}$$

により定義される全順序である。 $\underline{a} \in S(B)$ のとき

$$\min_{1 \leq j \leq n} (\text{ord}(2b_{ij})) \geq a_i/2$$

であるから $a_1 + \dots + a_n \leq 2\text{ord}(\det(2B))$ である。とくに $\mathbf{S}(\{B\})$ は有限集合であり、最大元が存在することがわかる。定義から明らかなように $\text{GK}(B)$ は B の同値類のみによって定まる。 $\text{GK}(B) = (a_1, \dots, a_n)$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= \max_{(y_1, \dots) \in \mathbf{S}(\{B\})} \{y_1\}, \\ a_2 &= \max_{(a_1, y_2, \dots) \in \mathbf{S}(\{B\})} \{y_2\}, \\ &\dots \\ a_n &= \max_{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, y_n) \in \mathbf{S}(\{B\})} \{y_n\}. \end{aligned}$$

である。

$B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ に対して $D_B = (-4)^{[n/2]} \det B$ とおく。

定義 1.3. n は偶数であるとする. $F(\sqrt{D_B})/F$ の判別式を $\mathfrak{D}_B$ で表す. また

$$\xi(B) = \begin{cases} 1 & D_B \in F^{\times 2} \text{ のとき,} \\ -1 & F(\sqrt{D_B})/F \text{ が不分岐 2 次拡大のとき,} \\ 0 & F(\sqrt{D_B})/F \text{ が分岐 2 次拡大のとき} \end{cases}$$

とおく.

$B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ の Clifford 不変量 (たとえば Scharlau [9], p. 333 を参照) を次のように定義する.

定義 1.4. n を偶数 (resp. 奇数) とするとき $B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ の Clifford 代数 (resp. 偶 Clifford 代数) の Hasse 不変量を B の Clifford 不変量といい, $\eta(B)$ で表す.

B が F 上 $\text{diag}(b'_1, \dots, b'_n)$ と同値のとき, (すなわち $B[U] = \text{diag}(b'_1, \dots, b'_n)$ なる $U \in \text{GL}_n(F)$ が存在するとき)

$$\begin{aligned} \eta(B) &= \langle -1, -1 \rangle^{[(n+1)/4]} \langle -1, \det B \rangle^{[(n-1)/2]} \prod_{i < j} \langle b'_i, b'_j \rangle \\ &= \begin{cases} \langle -1, -1 \rangle^{m(m-1)/2} \langle -1, \det B \rangle^{m-1} \prod_{i < j} \langle b'_i, b'_j \rangle & \text{if } n = 2m, \\ \langle -1, -1 \rangle^{m(m+1)/2} \langle -1, \det B \rangle^m \prod_{i < j} \langle b'_i, b'_j \rangle & \text{if } n = 2m + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

である. ここで $\langle , \rangle$ は F の Hilbert 記号である. 本論説で必要になるのは n が奇数の場合だけで, その場合は

$$\eta(B) = \begin{cases} 1 & B \text{ が } F \text{ 上分裂するとき} \\ -1 & B \text{ が } F \text{ 上分裂しないとき} \end{cases}$$

となる.

2 主定理

定義 2.1. $B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ に対して

$$\Delta(B) = \begin{cases} \text{ord}(D_B) & n \text{ が奇数のとき} \\ \text{ord}(D_B) - \text{ord}(\mathfrak{D}_B) + 1 - \xi(B)^2 & n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

とおく.

n が偶数のときは,

$$\Delta(B) = \begin{cases} \text{ord}(D_B) & \text{ord}(\mathfrak{D}_B) = 0 \text{ の場合} \\ \text{ord}(D_B) - \text{ord}(\mathfrak{D}_B) + 1 & \text{ord}(\mathfrak{D}_B) > 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

といっても同じである.

定理 2.1. $B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ に対して $\text{GK}(B) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ とすると

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \Delta(B)$$

が成り立つ.

非負整数の非減少列 $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して,

$$G_{\underline{a}} = \{g = (g_{ij}) \in \text{GL}_n(\mathfrak{o}) \mid a_i < a_j \text{ ならば } \text{ord}(g_{ij}) \geq (a_j - a_i)/2\}$$

とおく. $G_{\underline{a}}$ は $\text{GL}_n(\mathfrak{o})$ の開部分群である.

定理 2.2. $B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ は最適形式で $\text{GK}(B) = \underline{a}$ とする. このとき, $U \in \text{GL}_n(\mathfrak{o})$ に対して, $B[U]$ が最適形式となるためには $U \in G_{\underline{a}}$ が必要十分である.

$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ とするとき, $1 \leq m \leq n$ に対して $B^{(m)} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathcal{H}_m(\mathfrak{o})$ とおく.

定理 2.3. $B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ は最適形式で $\text{GK}(B) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ とする. $a_k < a_{k+1}$ ならば $B^{(k)}$ も最適形式で $\text{GK}(B^{(k)}) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ が成り立つ.

定理 2.4. $B \simeq B_1 \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ であり, B と B_1 はどちらも最適形式であるとする. $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{GK}(B) = \text{GK}(B_1)$ とおく. $a_k < a_{k+1}$, $1 \leq k < n$ と仮定するとき, 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) k が偶数ならば $\xi(B^{(k)}) = \xi(B_1^{(k)})$ が成り立つ.

(2) k が奇数ならば $\eta(B^{(k)}) = \eta(B_1^{(k)})$ が成り立つ.

注意 2.1. F が dyadic でない場合は, $B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ は

$$\text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), \quad \text{ord}(b_1) \leq \text{ord}(b_2) \leq \dots \leq \text{ord}(b_n).$$

という形の対角行列に同値であることが知られている (Jordan 分解). このとき

$$\text{GK}(B) = (\text{ord}(b_1), \text{ord}(b_2), \dots, \text{ord}(b_n))$$

が成り立つ. したがって F が dyadic でない場合には GK 不変量の計算は容易である.

3 2元2次形式の GK 不変量

2元2次形式の GK 不変量は比較的容易に計算できる. まず、半整数対称行列と $\mathfrak{o}$ 上の2次加群との対応について説明する.

L を $\mathfrak{o}$ 上の rank n の自由加群, Q を L 上の2次形式で $\mathfrak{o}$ に値を持つものとする. このような組 (L, Q) を $\mathfrak{o}$ 上の rank n の2次加群という. Q に付随する双線型形式 $(,)_Q$ を

$$(x, y)_Q = Q(x + y) - Q(x) - Q(y), \quad x, y \in L.$$

により定義する. $\underline{\psi} = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ を L の $\mathfrak{o}$ 上の順序づけられた基底とすると, 3つ組 $(L, Q, \underline{\psi})$ を $\mathfrak{o}$ 上の枠付き2次加群という. $(L, Q, \underline{\psi})$ を $\mathfrak{o}$ 上の枠付き2次加群とするとき, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ を

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(\psi_i, \psi_j).$$

によって定義することができる. B を $(L, Q, \underline{\psi})$ に付随する半整数対称行列という. この対応により, $\mathfrak{o}$ 上の rank n の枠付き2次加群の同型類の集合は $\mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ と同一視することができる. $B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ のとき, $(L, Q, \underline{\psi})$ は非退化であるという. B が最適形式のとき, $\underline{\psi}$ は (L, Q) の最適基底であるという.

$(L, Q, \underline{\psi})$ を $\mathfrak{o}$ 上の枠付き2次加群とする. 基底 $\underline{\psi}$ により L を $\mathfrak{o}^n$ と同一視し, $\text{Aut}(L) \simeq \text{GL}_n(\mathfrak{o})$ は L に右から作用しているものとする. このとき $(L, Q, \underline{\psi}U)$ には $B[U] = {}^tUBU$ が対応する. とくに半整数対称行列の同値類と2次加群の同型類は1対1に対応することがわかる. B の GK 不変量 $\text{GK}(B)$ を対応する2次加群 (L, Q) の GK 不変量ともいう.

(L, Q) を $\mathfrak{o}$ 上の2次加群とすると, $\{Q(x) \mid x \in L\}$ で生成される ideal $\mathfrak{n}(L)$ を (L, Q) の norm という.

命題 3.1. $\mathfrak{o}$ 上の2次加群 (L, Q) の GK 不変量を $(a_1, \dots, a_n)$ とすると, $a_1 = \text{ord}(\mathfrak{n}(L))$ が成り立つ.

$\mathfrak{o}$ 上の2次加群 (L, Q) と (L_1, Q_1) が弱同値であるとは, (L, Q) と (L_1, uQ_1) が同値になるような $u \in \mathfrak{o}^\times$ が存在することをいう. 弱同値な2次加群の GK 不変量は相等しい.

(L, Q) と (L_1, Q_1) が原始的であるとは $\mathfrak{n}(L) = \mathfrak{o}$ であることをいう. 古典的な2次形式論と同様に, $\mathfrak{o}$ 上の非退化で原始的な2元2次形式は F の2次拡大の整環 (order) を使って分類することができる.

$B \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ を非退化で原始的な半整数対称行列, B に対応する $\mathfrak{o}$ 上の 2 次加群を (L, Q) とする. $(L \otimes F, Q \otimes F)$ の F 上の偶 Clifford 代数 E を (L, Q) の判別式代数 (discriminant algebra) という. E は F 上の rank 2 の半単純代数で $F[x]/(x^2 - D_B)$ と同型である. すなわち

$$E \simeq \begin{cases} F \oplus F & D_B \in F^{\times 2} \text{ の場合} \\ F(\sqrt{D_B}) & D_B \notin F^{\times 2} \text{ の場合} \end{cases}$$

である. E/F が分岐 2 次拡大のとき, E/F は分岐であるといい, そうでないとき E/F は不分岐であるという. E の極大整環を $\mathfrak{o}_E$ とする. $f \geq 0$ を非負整数とすると, E の導手 $\mathfrak{p}^f$ の整環 $\mathfrak{o}_{E,f}$ を

$$\mathfrak{o}_{E,f} = \mathfrak{o} + \mathfrak{p}^f \mathfrak{o}_E$$

により定義する. E/F の F 上の norm 形式を $N_{E/F}$ で表す. また E/F の判別式を $\mathfrak{D}_E$ で表す. ($E = F \oplus F$ のときは $\mathfrak{o}_E = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}$, $N_{E/F}((x, y)) = xy$, $\mathfrak{D}_E = \mathfrak{o}$ と考える.)

命題 3.2. $B \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ を非退化で原始的な半整数対称行列, B に対応する $\mathfrak{o}$ 上の 2 次加群を (L, Q) とする. $f = (\text{ord}(D_B) - \text{ord}(\mathfrak{D}_E))/2$ とおくと, (L, Q) は 2 次加群 $(\mathfrak{o}_{E,f}, N_{E/F})$ に弱同値である.

命題 3.3. $(\mathfrak{o}_{E,f}, N)$ の GK 不変量は

$$\begin{cases} (0, 2f) & E/F \text{ が不分岐の場合,} \\ (0, 2f + 1) & E/F \text{ が分岐の場合} \end{cases}$$

で与えられる.

次の命題は後で使われないが, 文献中にあまり見られないのでここで書いておく.

命題 3.4. $B \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ を非退化で原始的な 2 元 2 次形式とすると, B が対角行列と同値であるためには $D_B \in 4\mathfrak{o}$ であることが必要十分条件である.

Proof. $B \simeq (b_1) \perp (b_2)$ ならば $D_B = 4b_1b_2 \in 4\mathfrak{o}$ である. 逆に $D_B \in 4\mathfrak{o}$ とする. 命題 3.2 により B の弱同値類は判別式代数と f だけによって定まるので B は $(1) \perp (-D_B/4)$ と弱同値であることがわかる. $\square$

Rank 2 の最適形式は次のように特徴づけられる.

命題 3.5. F は dyadic であるとする. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ で $\underline{a} = (a_1, a_2) \in S(B)$ とするとき, 次が成り立つ.

(1) $a_1 = a_2$ ならば

$$\mathrm{GK}(B) = \underline{a} \iff \mathrm{ord}(2b_{12}) = a_1.$$

(2) $a_2 - a_1 = 2f > 0$, $f \in \mathbb{Z}_{>0}$ ならば

$$\mathrm{GK}(B) = \underline{a} \iff \mathrm{ord}(b_{11}) = a_1, \mathrm{ord}(2b_{12}) = a_1 + f.$$

(3) $a_2 - a_1 = 2f + 1$, $f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば

$$\mathrm{GK}(B) = \underline{a} \iff \mathrm{ord}(b_{11}) = a_1, \mathrm{ord}(b_{22}) = a_2.$$

注意 3.1. F が non-dyadic で $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ で $\underline{a} = (a_1, a_2) \in S(B)$ とするとき, $\mathrm{GK}(B) = \underline{a}$ であるためには

$$\mathrm{ord}(b_1) = a_1, \mathrm{ord}(\det B) = a_1 + a_2$$

が必要十分である.

Example. $F = \mathbb{Q}_2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. B は $F(\sqrt{-1})$ の極大整環に対応するので $\mathrm{GK}(B) = (0, 1)$ である. とくに B は最適形式ではない. B と同値な最適形式としては $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ がとれる.

4 簡約形式

この節では F は dyadic であるとする. (F が non-dyadic のときには議論はずっと簡単になる.)

$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を非負整数の非減少列とする. n の分割 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ を

$$a_{n_1+\dots+n_u} < a_{n_1+\dots+n_u+1} = \dots = a_{n_1+\dots+n_{u+1}}, \quad (u = 0, 1, \dots, r).$$

によって定める. $s = 1, 2, \dots, r$ に対して

$$n_s^* = \sum_{v=1}^s n_v, \quad a_s^* = a_{n_{s-1}^*+1} = \dots = a_{n_s^*}$$

とおき, s 番目のブロック I_s を $I_s = \{n_{s-1}^* + 1, n_{s-1}^* + 2, \dots, n_s^*\}$ により定義する.

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を対合, すなわち $\sigma^2 = \text{id}$ なる置換とする. このとき,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^0 &= \{i \mid 1 \leq i \leq n, i = \sigma(i)\}, \\ \mathcal{P}^+ &= \{i \mid 1 \leq i \leq n, a_i > a_{\sigma(i)}\}, \\ \mathcal{P}^- &= \{i \mid 1 \leq i \leq n, a_i < a_{\sigma(i)}\}, \\ \mathcal{P}^\neq &= \{i \mid 1 \leq i \leq n, i \neq \sigma(i), a_i = a_{\sigma(i)}\}.\end{aligned}$$

とおく. また $s = 1, 2, \dots, r$ に対して $\mathcal{P}_s^+ = I_s \cap \mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}_s^- = I_s \cap \mathcal{P}^-$ とおく.

定義 4.1. 対合 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が正規 $\underline{a}$ -許容的であるとは次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすこととする.

(i) $i \in \mathcal{P}^0$ ならば

$$i = \max\{j \in \mathcal{P}^0 \cup \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^- \mid a_j \equiv a_i \pmod{2}\}$$

が成り立つ. とくに $\mathcal{P}^0$ は高々 2 個の元からなり, $\mathcal{P}^0$ が 2 個の元 i, j を持つ場合には $a_i \not\equiv a_j \pmod{2}$ である.

(ii) $s = 1, 2, \dots, r$ に対して $\mathcal{P}_s^+$ は空集合でなければ I_s の最小元だけからなる. さらに $i \in \mathcal{P}_s^+$ ならば

$$\sigma(i) = \max\{j \in \mathcal{P}_1^- \cup \dots \cup \mathcal{P}_{s-1}^- \mid a_j \equiv a_i \pmod{2}\}$$

である. 同様に $s = 1, 2, \dots, r$ に対して $\mathcal{P}_s^-$ は空集合でなければ I_s の最大元だけからなる. さらに $i \in \mathcal{P}_s^-$ ならば

$$\sigma(i) = \min\{j \in \mathcal{P}_{s+1}^+ \cup \dots \cup \mathcal{P}_r^+ \mid a_j \equiv a_i \pmod{2}\}$$

である.

(iii) $i \in \mathcal{P}^\neq$ ならば i と $\sigma(i)$ は隣接している. すなわち $|i - \sigma(i)| = 1$ である.

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が正規 $\underline{a}$ -許容的な対合ならば $a_i \equiv a_{\sigma(i)} \pmod{2}$ ($1 \leq i \leq n$) であることに注意する.

定義 4.2. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を正規 $\underline{a}$ -許容的な対合とする. $B = (b_{ij}) \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ が GK-type $(\underline{a}, \sigma)$ の簡約形式であるとは次の条件 (1), (2), (3), (4) が成り立つことをいう.

(1) $\underline{a} \in S(B)$.

(2) $i \notin \mathcal{P}^0$, $j = \sigma(i)$ ならば $\text{ord}(2b_{ij}) = \frac{a_i + a_j}{2}$ である.

(3) $i \in \mathcal{P}^0 \cup \mathcal{P}^-$ ならば $\text{ord}(b_{ii}) = a_i$ である.

(4) $j \neq i, \sigma(i)$ ならば $\text{ord}(2b_{ij}) > \frac{a_i + a_j}{2}$ である.

定理 4.1. $B \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ が GK type $(\underline{a}, \sigma)$ の簡約形式であれば B は最適形式であり, $\text{GK}(B) = \underline{a}$ が成り立つ.

1 節で定義された群 $G_{\underline{a}}$ の部分群 $G_{\underline{a}}^{\Delta}$ を

$$G_{\underline{a}}^{\Delta} = \{g = (g_{ij}) \in G_{\underline{a}} \mid g_{ij} = 0, \text{ if } a_i > a_j.\}$$

により定義する.

定理 4.2. $B \in \mathcal{H}_n^{\text{nd}}(\mathfrak{o})$ が最適形式で $\text{GK}(B) = \underline{a}$ とする. このとき正規 $\underline{a}$ -許容的な対合 σ と $U \in G_{\underline{a}}^{\Delta}$ で, $B[U]$ が GK type $(\underline{a}, \sigma)$ の簡約形式となるようなものが存在する.

定理 2.1, 定理 2.3, 定理 2.4 は, 定理 4.2 を使って簡約形式に帰着することにより証明される.

定理 4.3. B_1, B_2 を GK type がそれぞれ $(\underline{a}_1, \sigma_1), (\underline{a}_2, \sigma_2)$ の簡約形式とする. このとき $(\underline{a}_1, \sigma_1) \neq (\underline{a}_2, \sigma_2)$ であれば B_1 と B_2 は同値ではない.

注意 4.1. 上の定理 4.3 は F が non-dyadic のときには成り立たない.

例. $F = \mathbb{Q}_2$ とする.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

とおけば, これらは GK -type がそれぞれ $((0, 2, 2), \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}), ((0, 2, 2), \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix})$ の簡約形式である. とくにこれらは同値ではない.

本論説で述べた定理の証明は [4] にある. 半整数対称行列 B の Siegel 級数は $\text{GK}(B)$, $\xi(B^{(k)}), \eta(B^{(k)})$ を用いて計算することができる. これについては [5] を参照されたい.

参考文献

- [1] *ARGOS seminar on Intersections of Modular Correspondences*, Astérisque **312** (2007).

- [2] I. I. Bouw, *Invariants of ternary quadratic forms*, Astérisque **312** (2007) 121–145.
- [3] B. Gross and K. Keating, *On the intersection of modular correspondences*, Inv. Math. **112** (1993) 225–245.
- [4] T. Ikeda and H. Katsurada, *On the Gross-Keating invariant of a quadratic form over a non-archimedean local field*, preprint, arXiv:1504.07330
- [5] T. Ikeda and H. Katsurada, *Explicit formula of the Siegel series of a quadratic form over a non-archimedean local field*, in preparation.
- [6] H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121** (1999) 415–452.
- [7] S. Kudla, M. Rapoport, and T. Yang, *Modular Forms and Special Cycles on Shimura Curves*, Princeton university press, (2006).
- [8] O. T. O'Meara, *Introduction to Quadratic Forms*, Springer, (1973).
- [9] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms* Springer (1985)
- [10] G. Shimura, *Euler products and Eisenstein series*, AMS, (1997).
- [11] T. Yang, *Local densities of 2-adic quadratic forms*, J. Number Theory **108** (2004) 287–345.
- [12] T. Wedhorn, *Calculation of representation densities* Astérisque **312** (2007) 185–196.