

既約複素シンプレクティック多様体に 対する大域トリ問題の反例

並河 良典

単連結なコンパクトケーラー多様体 X は、次の性質をもつとき 既約複素シンプレクティック多様体とよばれる。

X 上に至る所非退化な正則 2 型式 Ω が存在して、 $H^0(X, \Omega_X^2) = \mathbb{C}[\Omega]$ 。

定義から X の (複素)次元は偶数である。

正則 2 型式 Ω と

$$\int_X (\Omega \bar{\Omega})^l = 1, \quad 2l = \dim X.$$

このように正規化しておき、 $H^2(X, \mathbb{R})$ 上の 対称 2 次型式 g_X と

$$g_X(\alpha) := \frac{l}{2} \int_X (\Omega \bar{\Omega})^{l-1} \alpha^2 + (1-l) \int_X \Omega^l \bar{\Omega}^{l-1} \alpha \int_X \Omega^{l-1} \bar{\Omega}^l \alpha$$

によって定義する。正の実数 c を適当にとると、 $c g_X$ は、

$H^2(X, \mathbb{Z})$ 上の ($\mathbb{Z}$ に値をもつ) 対称 2 次型式を定めることができる。このような c の中で、最小のものを c_0 とし、

$$Q_X := c_0 g_X$$

と置く。

Q_X は Beauville-Bogomolov 型式とよぶ。
 一方、 X は ケーラー多様体なので、 $H^2(X, \mathbb{Z})$ には、
 重さ 2 の ホッジ構造が入る。

もし、既約複素シンプレクティック多様体 X, Y が
 互いに 双有理同値ならば、自然な同型射

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq H^2(Y, \mathbb{Z})$$

が存在し、 Q_X, Q_Y に関して isometry になる。さらに
 この同型射は、両辺のホッジ構造を保つ。

Debarre [De] は、双有理同値ではあるが、同型で
 はないような 2 つの既約複素シンプレクティック多様体
 X, Y を構成した。したがって、次の問題に対する
 反例を与える：

双正則トレリ問題： X, Y を同じ次元の既約
 複素シンプレクティック多様体で、ホッジ isometry

$$\phi : (H^2(X, \mathbb{Z}), Q_X) \simeq (H^2(Y, \mathbb{Z}), Q_Y)$$

が存在したと仮定する。このとき X と Y は同型か？

$\dim X = 2$ の場合は、周知のように、上の問題は
 肯定的である。(K3 曲面に対するトレリ定理)

Debarre の構成した例は 4次元である。

Debarre の反例により、トレリ型問題で期待される最善の形は、次の2つである。

双有理トレリ問題 : X, Y を同じ次元の既約複素シンプレクティック多様体で、ホッジ isometry

$$\phi: (H^2(X, \mathbb{Z}), Q_X) \simeq (H^2(Y, \mathbb{Z}), Q_Y)$$

が存在すると仮定する。このとき X と Y は双有理同値か？

偏極トレリ問題 :

$(X, L), (Y, M)$ を偏極構造を持った既約複素シンプレクティック多様体とする。もし、ホッジ isometry

$$\phi: (H^2(X, \mathbb{Z}), Q_X) \simeq (H^2(Y, \mathbb{Z}), Q_Y)$$

で $\phi([L]) = [M]$ となるものが存在すれば、 (X, L) と (Y, M) は偏極多様体として同型か？

$\dim \geq 2$ の場合、2つの問題はやはり肯定的である。小論文では、4次元の場合に上記のトレリ型問題に対する反例を与える。高次元の場合にも同様の方法で反例が作れることを注意しておく。

(i) クンマー多様体.

T を 2次元複素トーラス. $\text{Hilb}^{n+1}(T)$ を T 上の $n+1$ 個の点をパラメータ付けする Douady 空間 とする. 自然な射 (Hilbert-Chow 射)

$$h: \text{Hilb}^{n+1}(T) \longrightarrow \text{Sym}^{n+1}(T)$$

が存在する. ここで, $\text{Sym}^{n+1}(T)$ は, T の $n+1$ 次 対称積 $T^{n+1}/\mathcal{S}_{n+1}$ を表わす.

$\text{Sym}^{n+1}(T)$ の点 z は T 上の $n+1$ 個の点からなる 0-サイクル $[P_1, \dots, P_{n+1}]$ とみなす. $[P_1, \dots, P_{n+1}]$ と $P_1 + \dots + P_{n+1} \in T$ に対応させることによる

射

$$\alpha: \text{Sym}^{n+1}(T) \longrightarrow T$$

が定義できる. $2n$ 次元クンマー多様体 $K^n(T)$ とは, $(\alpha \circ h)^{-1}(0)$ のことである. $\bar{K}^n(T) := \alpha^{-1}(0)$ と置くと, 自然な双有理射

$$h_0: K^n(T) \longrightarrow \bar{K}^n(T)$$

が h により 導かれる. $K^n(T)$ は, 既約複素シンプレクティック多様体になる.

$n=1$ のときは, よく知られたクンマー曲面に他ならない.

我々がここで用いるのは, $n=2$ の場合である.

さて. $h_0: K^2(T) \rightarrow \overline{K}^2(T)$ の例外集合と E と置く. E から $\overline{K}^2(T)$ の特異点集合 Σ に自然な全射がある. Σ は, T と同型で, 3 torsion point に対応する 81 点, 以外のところでは, A_1 -型特異点になる. $E \rightarrow \Sigma$ の一般ファイバーは $\mathbb{P}^1$ と同型である. E は, $K^2(T)$ の既約因子であり, E の特異点解消を F とすると, $F \rightarrow \Sigma$ は, F のアルバネース射に一致する. すなわち

$$T \simeq \text{Alb}(F)$$

である.

(ii) Beauville-Bogomolov 型式

$n \geq 2$ とする. このとき T のホッジ isometry が存在する

$$(H^2(K^n(T), \mathbb{Z}), Q) \simeq (H^2(T, \mathbb{Z}), \langle, \rangle) \oplus \mathbb{Z}\delta$$

(但し, $\delta^2 = -2(n+1)$ であり, 右辺のホッジ構造は

$$H^{2,0} := H^{2,0}(T)$$

$$H^{1,1} := H^{1,1}(T) \oplus \mathbb{C}\delta$$

$$H^{0,2} := H^{0,2}(T)$$

で与えられる. このホッジ isometry によって 既約例外因子 E のクラス $[E]$ は, 2δ に送られる.

$n=1$ の場合 $(H^2(K(T), \mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle^Q)$ は、このように単純な直和分解を持たない。

(iii) 双対トラス :

T を複素トラスで次元を 2 とする。 $\hat{T}$ を T の双対トラスとする。 Poincaré 双対と、 $\hat{T}$ が T の双対であることから身す。

$$\alpha_T : H^2(T, \mathbb{Z}) \simeq H_2(T, \mathbb{Z}) = H^2(\hat{T}, \mathbb{Z})$$

を得る。 α_T は、カップ積に関して ホッジ isometry になる (塩田)。この観察が反例を構成するときの鍵になる。

(iv) 反例の構成 :

T を アーベル曲面で次の性質を持つものとする。

(a) T は $\hat{T}$ と同型ではない

(b) Néron-Severi 群 $NS(T)$ は、

豊富な直線束 H , $H^2=6$ で生成される

$$NS(T) = \mathbb{Z} \cdot H$$

$\hat{H} = \alpha_T(H)$ とおくと、 $\hat{H} \in H^2(\hat{T}, \mathbb{Z})$ はやはり

豊富類 (アンプル類) になる。

そこで 整数 $m > 0$ を十分大きくとり

$$L := mH - \delta$$

$$M := m\hat{H} - \hat{\delta}$$

が各々 $K^2(T)$, $K^2(\hat{T})$ 上の豊富な直線束になるようにする.

命題 $X := K^2(T)$, $Y := K^2(\hat{T})$ と置く

(1) ホム $\hat{=}$ isometry $\phi: (H^2(X, \mathbb{Z}), Q_X) \xrightarrow{\sim} (H^2(Y, \mathbb{Z}), Q_Y)$
 して $\phi(L) = M$ となるものが存在する

(2) X と Y は互いに双有理同値ではない.

証明. (1): (ii)より 2つの lattice

$$(H^2(T, \mathbb{Z}), \langle, \rangle) \oplus \mathbb{Z}\delta \quad \text{と} \quad (H^2(\hat{T}, \mathbb{Z}), \langle, \rangle) \oplus \mathbb{Z}\hat{\delta}$$

の間には ホム $\hat{=}$ isometry を作ればよいが. $\phi := \alpha_T \oplus j$
 $(T \rightarrow \hat{T}, j: \mathbb{Z}\delta \rightarrow \mathbb{Z}\hat{\delta}, j(\delta) = \hat{\delta})$ と置けば
 $\phi(L) = M$ も満たされる.

(2): もし 双有理射 $f: Y \dashrightarrow X$ が存在すれば
 ホム $\hat{=}$ isometry

$$f^*: (H^2(X, \mathbb{Z}), Q_X) \xrightarrow{\sim} (H^2(Y, \mathbb{Z}), Q_Y)$$

がある。

特に f^* は, Néron-Severi 群の間の射

$$NS(X) \xrightarrow{\sim} NS(Y)$$

をひきおこす。仮定 (b) より $NS(X) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}\delta$,
 $NS(Y) = \mathbb{Z}\hat{H} \oplus \mathbb{Z}\hat{\delta}$ である。

f^* が isometry であること。 $H^2 = 6$, $\hat{H}^2 = 6$, $\delta^2 = -6$, $\hat{\delta}^2 = -6$

を用いると

$$f^*(H) = \begin{cases} \hat{H} & \text{or} \\ -\hat{H} \end{cases}$$

$$f^*(\delta) = \begin{cases} \hat{\delta} & \text{or} \\ -\hat{\delta} \end{cases}$$

がわかる。

X, Y が $\mathbb{C}$ -ラ-多様体であることより。 $f^*(H) = \hat{H}$,

$f^*(\delta) = \hat{\delta}$ であることわかる。特に $[E] = 2\delta$, $[\hat{E}] = 2\hat{\delta}$ なの。
 $f^*([E]) = [\hat{E}]$ 。

$h^0(X, \mathcal{O}_X(E)) = h^0(Y, \mathcal{O}_Y(\hat{E})) = 1$ なの。双有理射
 f は $\hat{E}$ から E への双有理射と等しく。

$E, \hat{E}$ の特異点解消を各々 $F, \hat{F}$ と置くと。

$F \simeq \hat{F}$ は双有理同値となり。両者のアルバネーセ
 多様体は同型: $\text{Alb}(F) \simeq \text{Alb}(\hat{F})$ 。

とこの $\bar{\pi}$ (i) において $\text{Alb}(F) \simeq T$, $\text{Alb}(\hat{F}) \simeq \hat{T}$
 であるから. $T \simeq \hat{T}$ となり 仮定 (a) に矛盾
 する □

注意 1

T は アーベル曲面 $\hat{T}$ の性質を持つものとする.

(a) T は $\hat{T}$ と同型でない

(b) $\text{Ns}(T) = \mathbb{Z} \cdot H$, $H^2 = 4$.

このとき, フーリエ変換を用いて同型射

$$\phi: K^2(\hat{T}) \xrightarrow{\sim} K^2(T)$$

を作ることもできる. $(\phi^*(H) = 5\hat{H} - 4\hat{\delta},$

$\phi^*(\delta) = 6\hat{H} - 5\hat{\delta})$ によって反例を構成するとき

H^2 として何をとりかは重要になる.

注意 2

T は アーベル曲面, $\hat{T}$ は T の双対アーベル曲面とする.

$X := K^2(T)$, $Y := K^2(\hat{T})$ と置く.

$D(X)$ は X 上の 連接層の bounded derived category, $D(Y)$ は Y 上のそれとする.

$$N := \{(x, y, z) \in T \times T \times T \mid x + y + z = 0\}$$

と置くと. N には 対称群 $\mathfrak{S}_3$ の置換によって作用する. $G = \mathfrak{S}_3$ に対して. $G\text{-Hilb}(N) :=$

$\{ Z \subset N \mid Z \text{ は } N \text{ の } G\text{-不変 } 0\text{-次元部分概型} \}$
 $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ は G -正則表現

と定義する.

$G\text{-Hilb}(N)$ の free-orbit と含む既約成分は
 X に一致する (Haiman). 図式

$$\begin{array}{ccc} X & & N \\ & \searrow & \swarrow \\ & N/G & \end{array}$$

に Bridgeland, King, Reid の定理と適用すると
 圏同値

$$D(X) \simeq D^G(N)$$

の存在がわかる. (但し $D^G(N)$ は G -連接層の
 bounded derived category である. 同様にして
 圏同値

$$D(Y) \simeq D^G(\hat{N}),$$

$\hat{N} := \{ (x, y, z) \in \hat{T} \times \hat{T} \times \hat{T} \mid x + y + z = 0 \}$ も得る.

$\hat{N}$ は N の双対アール多様体なので, フーリエ変換
 (G -equivariant 版) により 圏同値

$$D^G(N) \simeq D^G(\hat{N})$$

が存在する. (1) に従って $D(X)$ と $D(Y)$ は圏同値である.

他に知られている既約複素シンプレクティック多様体として、K3曲面 S 上の n 点とパラメータ付けする Douady 空間 $\text{Hilb}^n(S)$ がある。これらの系列の多様体に対しては、双有理トリ、偏極トリ) とともに反例は知られていない。ここでは、これらの予想を支持する例を紹介する。

例 (Beauville-Donagi, Voisin)

$V \subset \mathbb{P}^5$ を 3 非特異 3 次超曲面とする。

$$F := F(V) = \{ \ell \subset V \mid \ell \text{ は } V \text{ に含まれる直線} \}$$

のことは V の フリノ型 とよぶ。

F は、 $\text{Hilb}^2(S)$ (S : K3 曲面) と変形同値な既約複素シンプレクティック多様体になる。

$P := \{ (\ell, v) \in F \times V \mid v \in \ell \}$ を F の上の 普遍族 とする：

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{q} & V \\ p \downarrow & & \\ F & & \end{array}$$

$\alpha := p_* q^* : H^4(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(F, \mathbb{Z})$ を アーベル・ヤコビ写像 とよぶ。

$h \in H^2(V, \mathbb{Z})$ を 超平面切断類,

$g \in H^2(F, \mathbb{Z})$ を 有理数

$$F \hookrightarrow \mathrm{Gr}(2, 6) \xrightarrow[\text{Plücker 埋め込み}]{\text{Plücker}} \mathbb{P}^{14}$$

に対する超平面切断類とする. $\alpha(h^2) = g$ である.

$$H^4(V, \mathbb{Z})_0 := \{x \in H^4(V, \mathbb{Z}) \mid x \cdot h = 0\}$$

$$H^2(F, \mathbb{Z})_0 := \{x \in H^2(F, \mathbb{Z}) \mid x \cdot g^3 = 0\}$$

とあくと. α は, $(-1, -1)$ 型のホッジ同型射 $\tilde{\tau}$

$$\alpha_0 : H^4(V, \mathbb{Z})_0 \xrightarrow{\sim} H^2(F, \mathbb{Z})_0$$

を導き, 次の性質をもつ.

① α_0 は $(-1, -1)$ 型のホッジ同型射

② F の Beauville-Bogomolov 型式 Q_F に対して

$$Q_F(\alpha_0(x), \alpha_0(y)) = -x \cdot y \\ x, y \in H^4(V, \mathbb{Z})_0$$

非特異 3 次超曲面 に対しては 次の定理が知られている.

定理: V, V' を $\mathbb{P}^5$ 中の非特異 3 次超曲面として.

ホッジ isometry $\phi : (H^4(V, \mathbb{Z})_{\text{up 種}}) \xrightarrow{\sim} (H^4(V', \mathbb{Z})_{\text{up 種}})$
 $\tilde{\tau} \phi(h^2) = h'^2$ となるものが存在すると仮定する.

このとき $(V, \mathcal{O}_V(1))$ と $(V', \mathcal{O}_{V'}(1))$ は偏極多様体として同型である. ここで $\mathcal{O}_V(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)|_V$, $\mathcal{O}_{V'}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)|_{V'}$ である.

系

$(F, g), (F', g')$ を $\mathbb{P}^5$ の 3 次超曲面に対応する
 ファノ型と. その上の $G(2, 6) \hookrightarrow \mathbb{P}^{14}$ によって決まる
 偏極構造とする. ホッジ isometry

$$\phi: (H^2(F, \mathbb{Z}), \mathcal{Q}_F) \simeq (H^2(F', \mathbb{Z}), \mathcal{Q}_{F'})$$

で $\phi(g) = g'$ となるものが存在すれば, (F, g) と (F', g')
 は偏極多様体として同型である.

証明: α により ϕ は, ホッジ同型

$$\varphi: H^4(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^4(V', \mathbb{Z})$$

を定める. $F = F(V)$, $F' = F(V')$ とする.

φ が isometry であることは $\varphi_{\mathbb{Q}}: H^4(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(V', \mathbb{Q})$ が isometry であることと見做す.

$$H^4(V, \mathbb{Q}) = H^4(V, \mathbb{Q})_0 \oplus \mathbb{Q}h^2, \quad H^4(V', \mathbb{Q}) = H^4(V', \mathbb{Q})_0 \oplus \mathbb{Q}h'^2$$

であることに注意する.

$$H^2(F, \mathbb{Z})_0 = \{x \in H^2(F, \mathbb{Z}) \mid \mathcal{Q}_F(g, x) = 0\}, \quad H^2(F', \mathbb{Z})_0 = \{x \in H^2(F', \mathbb{Z}) \mid \mathcal{Q}_{F'}(g', x) = 0\}$$

であることがわかる.

$$\varphi_{\mathbb{Q}}(H^4(V, \mathbb{Q})_0) = H^4(V', \mathbb{Q})_0, \quad \varphi_{\mathbb{Q}}(h^2) = h'^2$$

がわかる.

ゆえに φ_Q は isometry, すなわち φ は isometry.

以上から $(F(V), g) \simeq (F(V'), g')$ である. $\square$

現段階で. 一般の 既約複素シンプレクティック多様体
に対して 意味があるのは. 次の問いであろう. (注意2
を参照)

問題. : X, Y と同じ次元の 既約複素シンプレクティック
多様体で. ホッジ isometry

$$\phi: (H^2(X, \mathbb{Z}), \mathcal{Q}_X) \simeq (H^2(Y, \mathbb{Z}), \mathcal{Q}_Y)$$

が存在しなくてはならない. このとき $D(X)$ と $D(Y)$ は
同値になるか?

文献

[Be] Beauville, A.: Variétés Kähleriennes dont
la première classe de Chern est nulle,
J. Diff. Geom. 18, 755-782 (1983)

[B-K-R] Bridgeland, T., King, A., Reid, M.: The McKay
correspondence as an equivalence of derived
categories, J. Amer. Math. Soc. 14 (3), 535-554
(2001)

- [Be-Do] Beauville, A., Donagi, R.: The variety of lines of a cubic fourfold, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1, 301, 703-706 (1985)
- [De] Debarre, J.: Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser 1, 299, 681-684 (1984)
- [Ha] Hai man, M.: Hilbert schemes, polygraphs and MacDonal positivity conjecture, J. Amer. Math. Soc. 14 (4), 941-1006 (2001)
- [Huy] Huybrechts, D.: Compact hyper-Kähler manifolds: basic results, Invent. Math. 135, 63-113 (1999)
- [Mu] Mukai, S.: Moduli of vector bundles on K3 surfaces, and symplectic manifolds, Sugaku Exposition 1, 139-174 (1988)
- [Yo] Yoshioka, K.: Moduli spaces of stable sheaves on Abelian surfaces, math AG/0009001

- [Vo] Voisin, C. : Théorème de Tonelli pour les cubiques de $\mathbb{P}^5$, Invent. Math. 86 577-601 (1986)
- [Na] Namikawa, Y. : Counter-example to global Tonelli problem for irreducible symplectic manifolds, preprint
- [Sh] Shioda, T. : The period map of abelian surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA. 25, 47-59 (1978)