

非直線理論研究専門委員会資料

周期的外力を加えた自励振動系に  
発生する概周期振動

林 千 博，柴 山 廣，上 田 暁 亮

(京都大学工学部) (大阪工業大学) (京都大学工学部)

1961年12月16日

社団法人 電 気 通 信 学 会

## 目 次

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 1. 緒 言 .....                  | 1  |
| 2. 線型復原力をもつ自励振動系 .....        | 2  |
| 2-1. 基本式 .....                | 2  |
| 2-2. 概周期振動 .....              | 7  |
| 2-3. 周期振動と概周期振動相互間の移行 .....   | 10 |
| 3. 非線型復原力をもつ自励振動系 .....       | 14 |
| 3-1. 基本調波周期解とその安定条件 .....     | 14 |
| 3-2. 概周期振動 .....              | 19 |
| 3-3. 基本調波振動と概周期振動相互間の移行 ..... | 20 |
| 4. 結 言 .....                  | 26 |
| 文 献 .....                     | 27 |

# 周期的外力を加えた自励振動系に 発生する概周期振動

## 1. 緒 言

Van der Pol の方程式で表わされるような自励振動系に周期的外力を加えると、外力周波数の或る巾にわたって、自励振動周波数が外力の周波数、その整数倍または整数分の一に同期化して、基本調波振動、高調波振動または分数調波振動を発生する場合がある。<sup>(1),(2)</sup> また、外力の振巾と周波数がこれらの同期振動を発生するような値をとらない場合には、系に発生する振動は概周期振動となる。<sup>(3),(4)</sup> 本論文では、概周期振動の解析法を略述し、また周期振動と概周期振動の関係を明らかにするため、外力の振巾または周波数を変化させて、系の振動が周期振動と概周期振動の相互の間で移行するときの様子について考察を加える。なお本論では、従来考察した系が線形の復原力をもつ系であったのに対し、非線形の復原力をもつ系についても、基本調波振動および基本調波の同期が外れて発生する概周期振動、ならびにこれら相互の間の移行の様子について考察を行なう。

解析の方法としては周期解を求めるために *harmonic balance* 法を用い、その安定性を Hill の微分方程式による判別法<sup>(5),(6)</sup>によって調べた。また系の振動状態を位相面上の動作点で表わし、周期解を特異点に対応させ、過渡状態を積分曲線で表わすと、概周期振動は位相面上のリミット・サイクルで示される。

以上の解析出段によって得た周期振動および概周期振動は、アナログ計算機による結果とも満足すべき一致を示した。

## 2. 線型復原力をもつ自励振動

### 2.1. 基本式

ここでは次のような方程式で表わされる線形復原力をもつ振動系について考察する。

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \varepsilon(1-u^2) \frac{du}{dt} + u = B \cos \nu t + B_0, \quad (2.1)$$

ここに  $\varepsilon$  は 1 に比べて十分小さい正数であり,  $B \cos \nu t + B_0$  は外力を表わす。式(2.1)は  $v = u - B_0$  で表わされる変数  $v$  を用いると, 次の形に書き直すことが出来る。

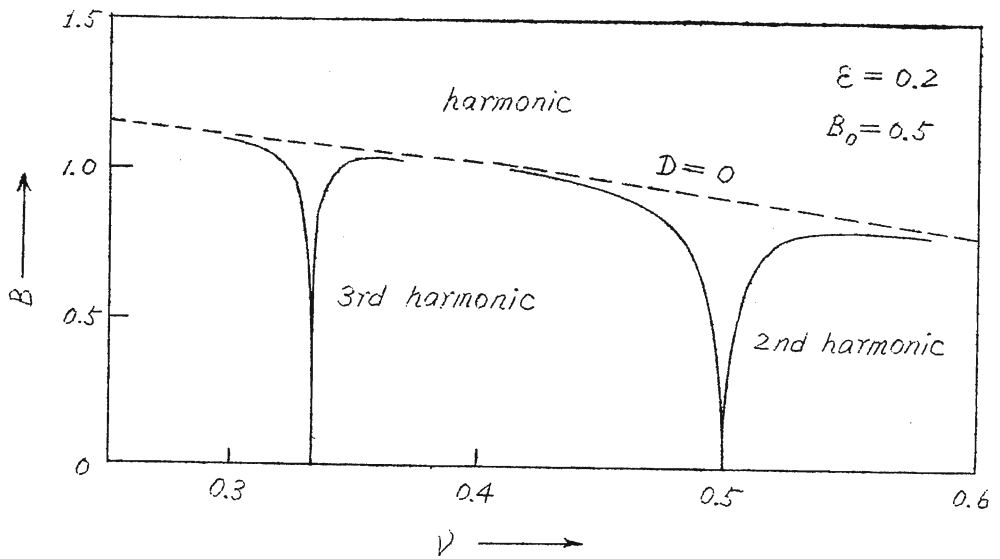
$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dt^2} - \mu(1 - \beta v - \gamma v^2) \frac{dv}{dt} + v &= B \cos \nu t, \\ \mu &= (1 - B_0^2) \varepsilon, \quad \beta = \frac{2B_0}{1 - B_0^2}, \quad \gamma = \frac{1}{1 - B_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式(2.2)が,  $B=0$  のとき自励振動系を表わすためには,  $\mu$  は正数でなければならず, 従って  $B_0^2 < 1$  である。このとき  $\mu$  は  $\varepsilon$  と同程度に小さい正数となる。<sup>(1)~(4)</sup> さきに報告したように, 式(2.1)または(2.2)で表わされる振動系は, 外力の振幅  $B$ , 周波数  $\nu$  の或る範囲の値に対して周期振動を発生し, この場合の振動を近似的に次のように表わすことが出来る。

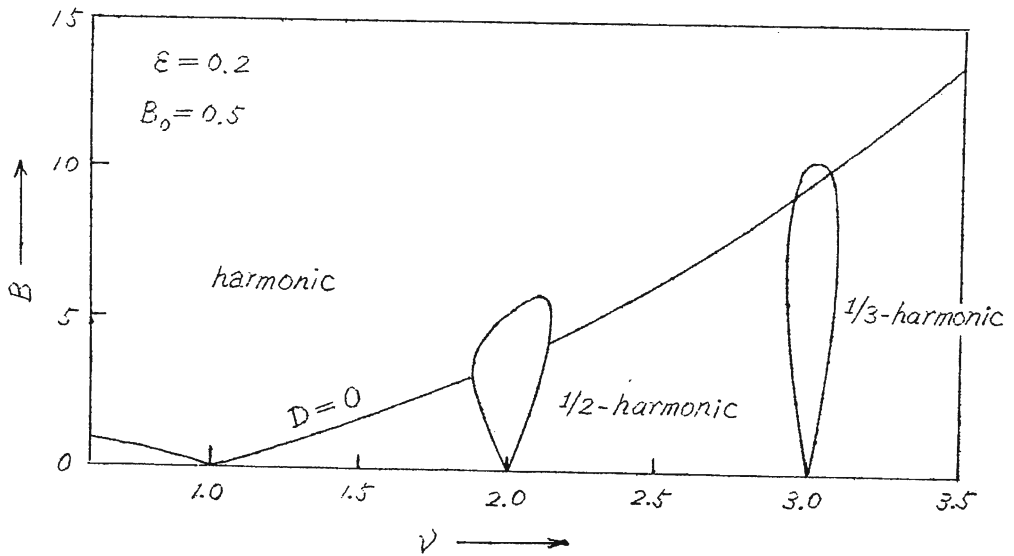
$$\left. \begin{aligned} \text{基本調波振動} : \quad v(t) &= b_1 \sin \nu t + b_2 \cos \nu t, \\ \text{高調波および分数調波振動} : \\ v(t) &= \frac{B}{1 - \nu^2} \cos \nu t + b_1 \sin n \nu t + b_2 \cos n \nu t, \\ n &= 2, 3 \text{ (高調波) および } \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ (分数調波)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

周期振動の発生領域を  $B, \nu$  平面上に表わした 1 例を Fig. 1 に示す。図は振動系のパラメータを式(2.1)において

$$\varepsilon = 0.2, \quad B_0 = 0.5$$



(a) 基本調波と高調波振動



(b) 基本調波と分数調波振動

オ 1 図 周期振動発生領域

と選んだ場合である。従って式(2.2)に対しては、

$$\mu = 0.15, \quad \beta = 4/3, \quad \gamma = 4/3.$$

オ 1 図に示された発生領域の外側では、式(2.3)で表わされるような

周期振動は存在せず、系には概周期振動が発生する。このときは式(2.3)における係数  $b_1, b_2$  はもはや常数とはならない。式(2.2)のパラメータ  $\mu$  が十分小さいとの仮定のもとに  $b_1, b_2$  は時間の経過とともに十分ゆるやかに変化する量であると考えて  $b_1(t), b_2(t)$  の満足すべき方程式を導き、周期振動の同期が外れたときの概周期振動を考察する。

基本調波振動の同期が外れて発生する概周期振動に対しては、(2.3)の1式を(2.2)に代入し、 $\cos vt, \sin vt$  の係数をそれぞれ零とおいて次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= (1-r_1^2)x_1 - \sigma_1 y_1 + \frac{B}{\mu \nu a_0} \equiv X_1(x_1, y_1), \\ \frac{dy_1}{d\tau} &= \sigma_1 x_1 + (1-r_1^2)y_1 \equiv Y_1(x_1, y_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_0}, \quad y_1 = \frac{b_2}{a_0}, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \\ a_0 &= \sqrt{\frac{4}{\gamma}}, \quad \tau = \frac{\mu}{2} t, \quad \sigma_1 = \frac{1-\nu^2}{\mu \nu} : \text{離調度}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

式(2.4)を導くにあたっては、 $b_1(t), b_2(t)$  はともに時間  $t$  の経過に対して十分ゆるやかに変化する量であるとした。従つて  $d^2 b_1/dt^2, d^2 b_2/dt^2$  は微小量であるとして無視し、また  $\mu$  は1に比べて十分小さいとしていたので  $\mu db_1/dt, \mu db_2/dt$  もまた無視した。式(2.4)が基本調波振動の同期が外れたときの概周期振動を考察するための基本式である。

基本調波周期解は式(2.4)において  $dx_1/d\tau = 0, dy_1/d\tau = 0$  とおいて得られ、振巾特性は次式で与えられる。

$$\left[ (1-r_1^2)^2 + \sigma_1^2 \right] r_1^2 = \left( \frac{B}{\mu \nu a_0} \right)^2. \quad (2.6)$$

図2にこの基本調波振巾特性を示す。また図には安定限界も併せ示した。<sup>(1), (2)</sup> 図で実線は安定な周期解を、また点線は不安定な周期解を表わし、太線が安定限界である。

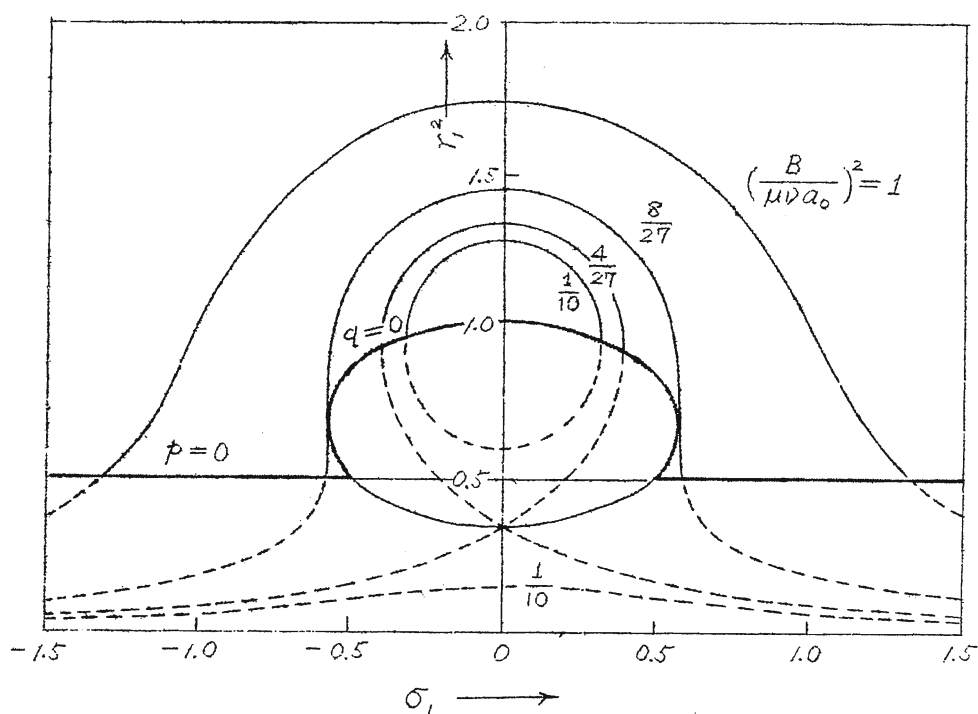


図2 基本調波振動の振巾特性

高調波または分数調波振動の同期が外れたときの概同期振動についても、全く同様にして基本式を導くことが出来る。すなわち、(2.3)式で  $b_1$ ,  $b_2$  を時間  $t$  の函数と見 (2.2) に代入し、式 (2.4) を導いたときと同様の仮定の下に  $\cos nvt$ ,  $\sin nvt$  の係数を零とおいて次式が得られる。

$n=2$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_2}{d\tau} &= (D - r_2^2)x_2 - \sigma_2 y_2 \equiv X_2(x_2, y_2), \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= \sigma_2 x_2 + (D - r_2^2)y_2 - \frac{\beta}{4a_0} A^2 \equiv Y_2(x_2, y_2), \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

$n=3$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_3}{d\tau} &= (D - r_3^2)x_3 - \sigma_3 y_3 \equiv X_3(x_3, y_3), \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_3}{d\tau} = \sigma_3 x_3 + (D - r_3^2) y_3 - \frac{\gamma}{12a_0} A^3 \equiv Y_3(x_3, y_3), \end{aligned} \right\}$$

$n = 1/2$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_{1/2}}{d\tau} &= \left( D - r_{1/2}^2 + \frac{\beta}{2} A \right) x_{1/2} - \sigma_{1/2} y_{1/2} \equiv X_{1/2}(x_{1/2}, y_{1/2}), \\ \frac{dy_{1/2}}{d\tau} &= \sigma_{1/2} x_{1/2} + \left( D - r_{1/2}^2 - \frac{\beta}{2} A \right) y_{1/2} \equiv Y_{1/2}(x_{1/2}, y_{1/2}), \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$n = 1/3$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_{1/3}}{d\tau} &= (D - r_{1/3}^2) x_{1/3} - \sigma_{1/3} y_{1/3} + \frac{2A}{a_0} x_{1/3} y_{1/3} \equiv X_{1/3}(x_{1/3}, y_{1/3}), \\ \frac{dy_{1/3}}{d\tau} &= \sigma_{1/3} x_{1/3} + (D - r_{1/3}^2) y_{1/3} + \frac{A}{a_0} (x_{1/3}^2 - y_{1/3}^2) \equiv Y_{1/3}(x_{1/3}, y_{1/3}), \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \frac{b_1}{a_0}, \quad y_n = \frac{b_2}{a_0}, \quad r_n^2 = x_n^2 + y_n^2, \\ a_0 &= \sqrt{\frac{4}{\gamma}}, \quad A = \frac{B}{1 - \nu^2}, \quad D = 1 - \frac{2A^2}{a_0^2}, \\ \tau &= \frac{\mu}{2} t, \quad \sigma_n = \frac{1 - (n\nu)^2}{\mu n \nu} : \text{ 離調度.} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

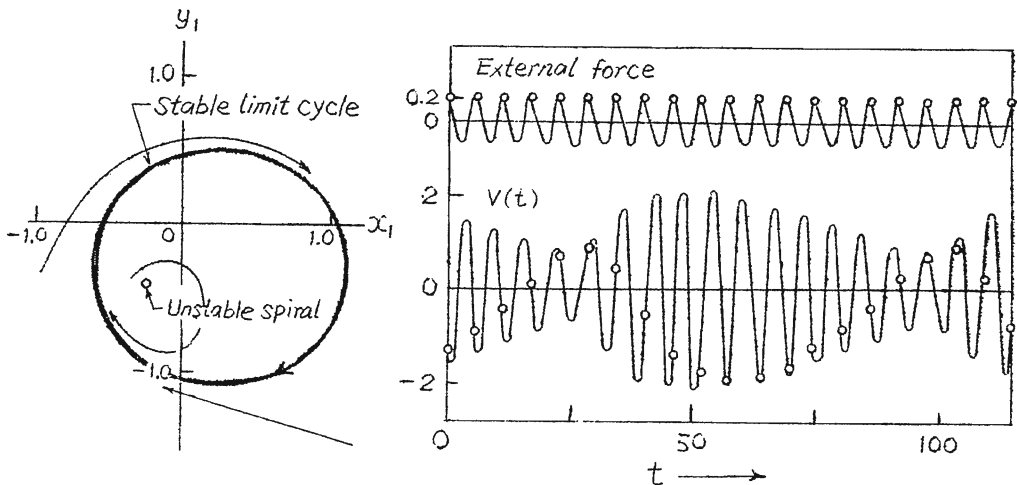
式(2.7)と(2.8)が $\nu = 2$ および $\nu = 3$ 高調波振動の同期が外れたときに発生する概周期振動の係数  $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$  を求めるための基本式である。また式(2.9)と(2.10)が $1/2$ および $1/3$ 調波振動の同期が外れたときに発生する概周期振動解析のための基本式である。またこれらの基本式で、 $dx_n/d\tau = 0$ ,  $dy_n/d\tau = 0$  において  $X_n(x_n, y_n) = 0$  と  $Y_n(x_n, y_n) = 0$  を解くことによって、周波数引込現象を生じたときの高調波と分数調波振動を求めることが出来る。

## 2.2. 概周期振動

式(2.4)で表わされる系を考察するために、式

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{Y_1(x_1, y_1)}{X_1(x_1, y_1)} \quad (2.12)$$

の  $x_1, y_1$  平面上における積分曲線の模様を考察する。外力の振幅  $B$ , 周波数  $\nu$  がオ1図に示した周期振動発生領域の外側の値をとる場合には, オ2図を参照すれば, 式(2.12)は  $\gamma_1^2 < 0.5$  の範囲内にただ1つの不安定特異点をもつことがわかる。しかも式(2.4)において, 十分大きい  $\gamma_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$  の値に対しては, 時間での経過とともに積分曲線がすべて原点方向に向うことも容易にわかので, 安定なリミット・サイクルが存在することを推定出来る。



(a) 概周期振動を表わす  
リミット・サイクル

(b) 概周期振動波形

オ3図 基本調波振動の同期が外れたときに発生する概周期振動  
( $B = 0.2, \nu = 1.1$ )

リミット・サイクルの1例をオ3図(a)に示す。図は等傾曲線群を作図して求めたもので, 系のパラメータはオ1図に用いた値と同じとし, 外

カの  $B$ ,  $V$  には基本調波振動発生領域のすぐ外側の値を選んだ。リミット・サイクルが得られれば、その上を系の動作を表わす点すなわち動作点  $[x_1(\tau), y_1(\tau)]$  が移動するに要する時間を次の線積分によって求め、概周期振動波形を作図することが出来る。

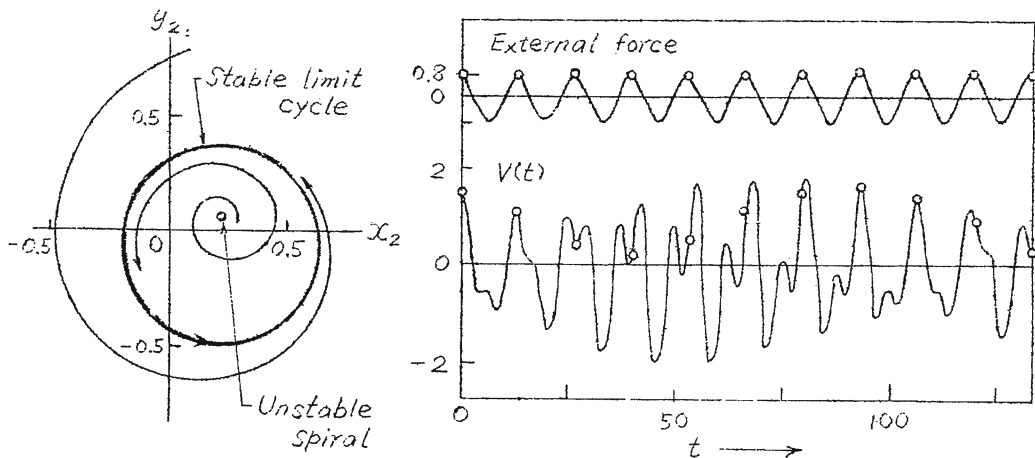
$$\tau = \int \frac{ds}{\sqrt{X_1^2(x_1, y_1) + Y_1^2(x_1, y_1)}} \quad , \quad (2.13)$$

ここに  $ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dy_1)^2}$  : リミット・サイクル上の線要素。

このようにして得られた振動波形を第3図(b)に示す。この場合、リミット・サイクル上を動作点が1周するに要する時間は外力の周期の12.8...倍であつて、式(2.4)を導くにあつて設けた仮定が十分よく満たされていることがわかる。

高調波または分数調波の同期が外れて発生する概周期振動についても同様にして解析を行なうことが出来る。すなわち、このときの基本式は(2.7), (2.8), (2.9) または (2.10)であつて、式

$$\frac{dy_n}{dx_n} = \frac{Y_n(x_n, y_n)}{X_n(x_n, y_n)} \quad , \quad n=2, 3, 1/2 \text{ または } 1/3 \quad (2.14)$$

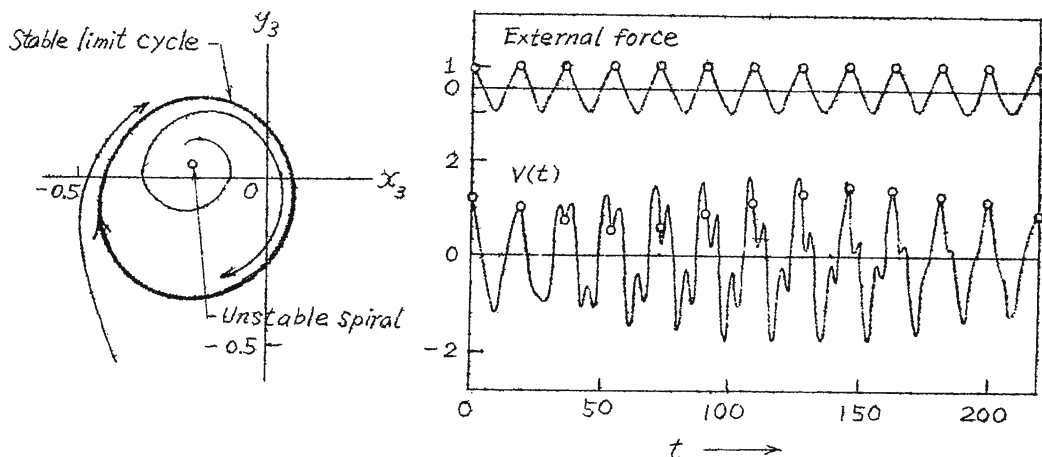


(a) 概周期振動を表わす  
リミット・サイクル

(b) 概周期振動波形

第4図 第2高調波振動の同期が外れたときに発生する概周期振動  
( $B=0.8$ ,  $V=0.47$ )

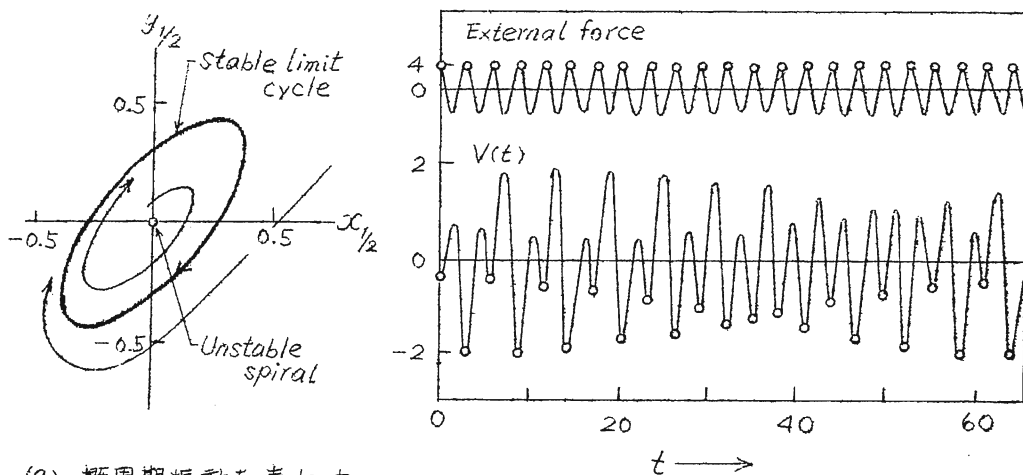
の  $x_n, y_n$  平面上における積分曲線の動きを考察すればよい。系のパラメータの値を  $\bullet 1$  図に対すると同じ値として、外力の振幅  $B$  および周波



(a) 概周期振動を表わす  
リミット・サイクル

(b) 概周期振動波形

$\bullet 5$  図  $\bullet 3$  高調波振動の同期が外れたときに発生する概周期振動  
( $B=1.0, \nu=0.345$ )

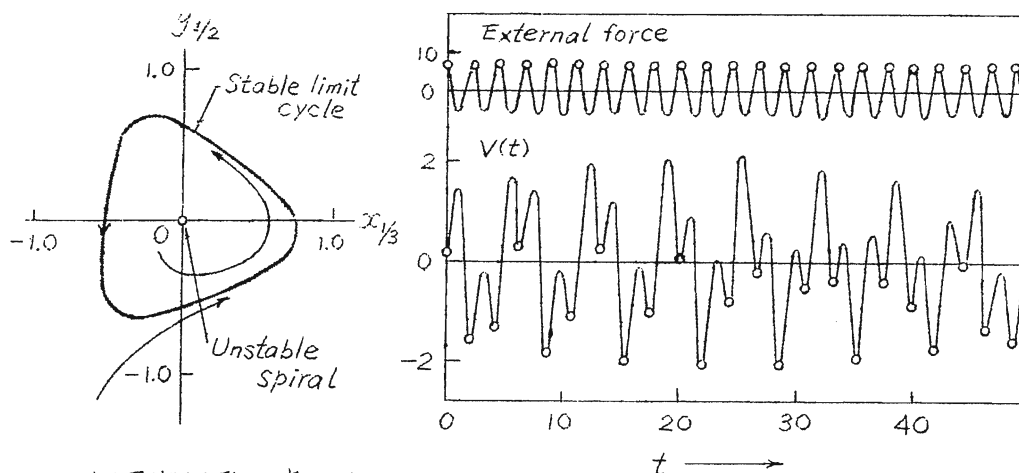


(a) 概周期振動を表わす  
リミット・サイクル

(b) 概周期振動波形

$\bullet 6$  図  $1/2$  調波振動の同期が外れたときに発生する概周期振動  
( $B=4.0, \nu=2.15$ )

数  $\nu$  を変えた場合に得られるリミット・サイクルと振動波形をオ4, 5, 6および7図に示す。これらの図において、動作点がリミット・サイクルを1周するに要する時間はそれぞれ外力の周期の  $7.64 \dots$ ,  $10.4 \dots$ ,  $45.9 \dots$  および  $67.1 \dots$  倍であって、式(2.7)~(2.10)を導くにあたって設けた仮定を十分よく満たしている。



(a) 概周期振動を表わす  
リミット・サイクル

(b) 概周期振動波形

オ7図  $1/3$  調波振動の同期が外れたときに発生する概周期振動  
( $B = 6.7$ ,  $\nu = 2.85$ )

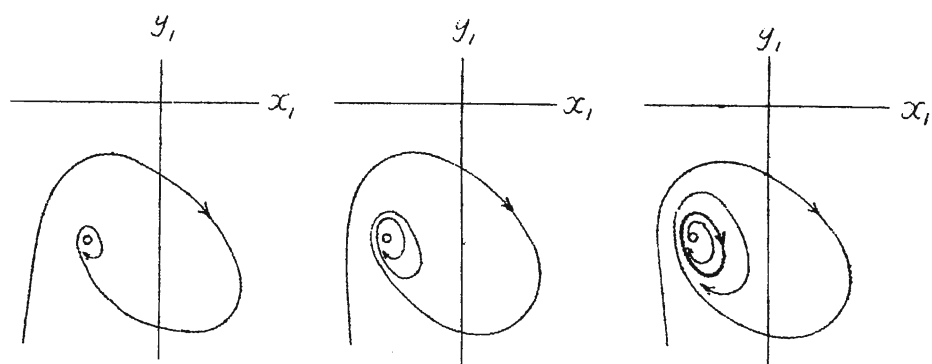
## 2.3 同期振動と概周期振動相互間の移行

外力の振幅  $B$ , 周波数  $\nu$  の値を同期振動発生境界を横切るように変化させると, 同期振動と概周期振動の相互間の移行が起る。先ず基本調波振動と概周期振動の間の移行現象について考察する。オ2図に示した基本調波同期解の安定限界は,  $\nu = 1$  従って  $\sigma_1 = 0$  の附近に対しては次式で表わされる。<sup>(1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} P &\equiv 2r_1^2 - 1 = 0, \\ Q &\equiv (1 - r_1^2)(1 - 3r_1^2) + \sigma_1^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

オ2図に示されているように，(2.15)オ1式は外力の振幅 $B$ ，従つてまた離調度 $\sigma_1$ の絶対値が比較的大きい場合の安定限界を与え，(2.15)オ2式は $B$ ，従つて $\sigma_1$ の絶対値が比較的小さい場合の安定限界を与える。

先ず離調度 $\sigma_1$ の絶対値が比較的大きいとき，式(2.15)の $p=0$ で与えられる境界を横切つて $B$ ， $\nu$ を変化させた場合の振動を検討する。オ2図に示すように， $B$ が比較的大きく，特に $(B/\mu\nu a_0)^2 > \frac{8}{27}$ のときには，式(2.6)で表わされる周期解は常にただ1個存在する。周期解に対応する $x_1, y_1$ 平面上の特異点は，周期振動発生領域内では安定渦状点，領域外では不安定渦状点であり，さらに境界上ではPoincaréの判別法<sup>(7)</sup>によって安定渦状点であることがわかる。境界の近傍に対する積分曲線の代表的な動きをオ8図に示す。図の(a)，(b)と(c)は外力の $B$ ， $\nu$

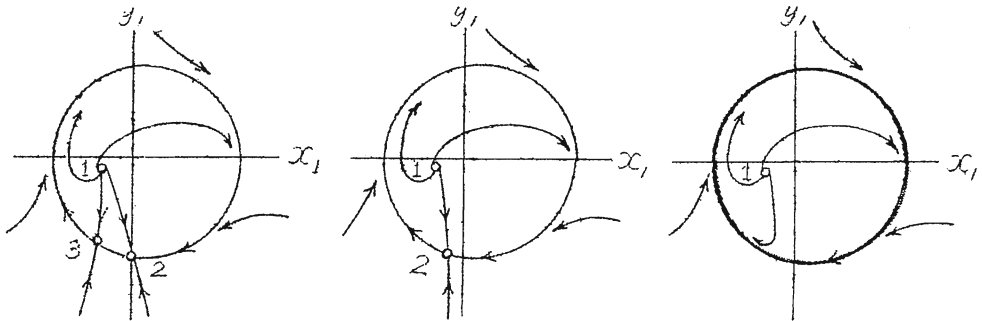


(a) 基本調波振動を表わす特異点  
(b) 境界上での振動を表わす安定渦状点  
(c) 概周期振動を表わすリミット・サイクル

オ8図 離調度が大きい場合の基本調波振動と概周期振動間の移行

がそれぞれ基本調波発生の境界内，境界上および境界外の値をとる場合を示している。(c)に示されたりミット・サイクルは $B$ ， $\nu$ が境界に近い値をとるにつれてその大きさは小さくなり，境界上に到つて1点となる。次に離調度 $\sigma_1$ の絶対値が比較的小さいとき，式(2.15)の $q=0$ で与えられる境界を横切つて $B$ ， $\nu$ を変化させた場合を検討する。オ2図に示すように， $B$ が比較的小さく， $(B/\mu\nu a_0)^2 < \frac{4}{27}$ のときには，

式(2.6)で表わされる周期解は安定限界式(2.15)の $q=0$ の内側では3個あり、これらに対応する $x_1, y_1$ 平面上の特異点は不安定渦状点、安定結節点および鞍形点である。また $q=0$ の外側に対しては不安定な周期解がただ1個あり、これは $x_1, y_1$ 平面上の不安定渦状点に対応する。境界の近傍に対する積分曲線の代表的な動きをFig 9



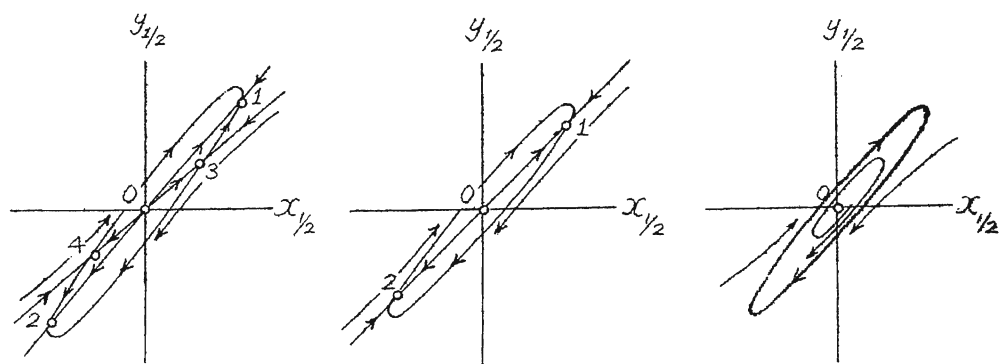
(a) 基本調波振動を表わす特異点 (b) 境界上における特異点の合体 (c) 概周期振動を表わすリミット・サイクル

Fig 9 離調度が小さい場合の基本調波振動と概周期振動間の移行

図に示す。図の(a), (b)と(c)は外力の $B, \nu$ がそれぞれ基本調波発生  
の境界内、境界上および境界外の値をとる場合を示している。(a)図の  
特異点2と3は境界上においては(b)図の特異点2に合体(coalesce)  
する。この特異点はBendixsonの判別法により node-saddle 型  
の高次の特異点であることがわかる。(b)の状態では閉じた積分曲線上  
の動作点は一旦特異点2に到達しても、微小の擾乱によって矢印の方向  
に積分曲線を1周し再び特異点2に向うことになり、以後このような動き  
を繰り返す。(c)のリミット・サイクル上の動作点の動きは $B, \nu$ の  
値が境界に近くなるとともにゆるやかになる。以上の考察の結果、基本  
調波振動と概周期振動の間の移行には2つの異なる場合が存在し、外力  
の振幅 $B$ が比較的大きく、 $\sigma_1$ の絶対値もまた大きいところでは、自励  
振動の振幅が抑制された状態で概周期振動から基本調波振動に移行し、  
また $B$ が小さく $\sigma_1$ の絶対値も小さいところでは、自励振動が優勢のま

ま周波数引込によつて基本調波振動に移行するものと考えられる。

次に、高調波振動とその同期が外れて発生する概周期振動に関しては、基本式(2-7)または(2-8)について上と同様の考察を行なえばよい。しかしこの場合は、式(2-7)、(2-8)に適当な変数変換を施せば式(2-4)と同じ形が得られるので、移行の様子は $\phi$ 8, 9図と同様である。また分数調波振動とその同期が外れて発生する概周期振動についても、基本式(2-9)または(2-10)を用いて同様に解析を行なうことが出来る。 $\phi$ 10, 11図には  $1/2$  調波と  $1/3$  調波振動発生境界付近における代表的な積分曲線の動きを示した。この場合は、 $x_n, y_n$  平面の原点が常に不安定な特異点となる。境界内、または境界上の振動を表わす特異点は、 $1/2$  調波振動に対しては原点のまわりに  $180^\circ$  毎に対称に分布し、 $1/3$  調波振動に対しては原点のまわりに  $120^\circ$  毎に対称に分布する。 $\phi$ 10図(a)の特異点1, 2は安定結節点, 3, 4は鞍形点であり、(b)の特異点1, 2は(a)の1と3および2と4が合体して出来た node-saddle 型である。 $\phi$ 11図(a)では特異点1, 2, 3は安定結節点, 4, 5, 6は鞍形点, (b)では1, 2, 3は node-saddle 型の特異点である。 $\phi$ 9図について述べたと同様 $\phi$ 10, 11図においても、リミット・サイクル上の動作点の動きは外力の $B$ ,  $\nu$ が境界に近い値をとるに従つてその動きがゆるや



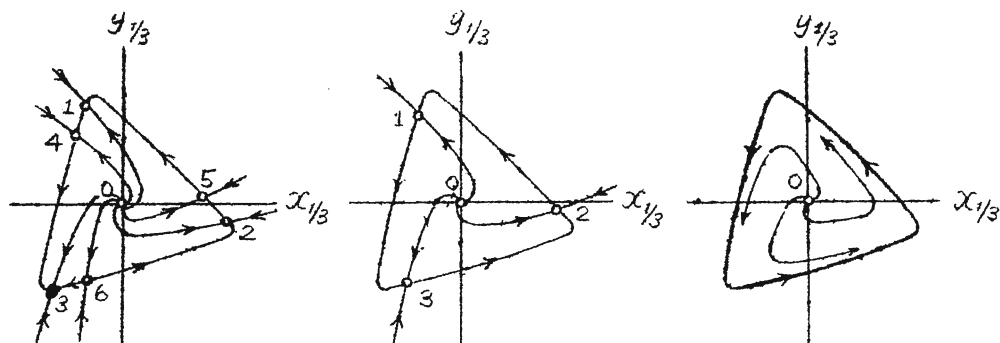
(a)  $1/2$  調波振動を表わす特異点

(b) 境界上における特異点の合体

(c) 概周期振動を表わすリミット・サイクル

$\phi$ 10図

$1/2$  調波振動と概周期振動間の移行



(a)  $1/3$  調波振動を表わす特異点

(b) 境界上における特異点の合体

(c) 概周期振動を表わすリミット・サイクル

※ 11 図

$1/3$  調波振動と概周期振動間の移行

かになる。そして遂に動作点が積分曲線上的特異点に停止すれば、周波数引込によって分数調波振動を発生したことになる。

### 3. 非線型復原力をもつ自励振動系

以下においては次の微分方程式で表わされる振動系について考察する。

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \mu(1 - \gamma v^2) \frac{dv}{dt} + v^3 = B \cos \nu t \quad (3.1)$$

ここに、 $\mu$  は 1 に比べて十分小さい正数で、 $v^3$  は非線型復原力を、 $B \cos \nu t$  は外力を表わす。

#### 3.1. 基本調波周期解とその安定条件

先ず最初に式 (3.1) で  $B=0$  とおいた系、すなわち

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \mu(1 - \gamma v^2) \frac{dv}{dt} + v^3 = 0 \quad (3.2)$$

で表わされる系の自励振動を考察する。この自励振動を

$$v(t) = a_0 \cos \omega_0 t \quad (3.3)$$

とおき、式(3.2)に代入して  $\cos \omega_0 t$ ,  $\sin \omega_0 t$  の係数を夫々零とおくと次式を得る。

$$\mu a_0 \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma}{4} a_0^2\right) = 0, \quad a_0 \left(\omega_0^2 - \frac{3}{4} a_0^2\right) = 0 \quad (3.4)$$

これより自励振動の振幅および周波数は近似的に次のように表わすことが出来る。

$$a_0^2 = \frac{4}{\gamma}, \quad \omega_0^2 = \frac{3}{4} a_0^2 = \frac{3}{\gamma}. \quad (3.5)$$

$\nu \cong \omega_0$  のときには自励振動の周波数が外力周波数に引込まれて基本調波振動を発生する。このような場合に式(3.1)の近似解として次の形を仮定する。

$$v(t) = b_1 \sin \nu t + b_2 \cos \nu t. \quad (3.6)$$

ここに、 $b_1, b_2$  は引込領域近傍における概周期振動に対しては時間的にゆるやかに変化する時間函数であり、引込状態では定数となる。引込によって起る基本調波振動の周期解は *harmonic balance* 法によって容易に求められる。すなわち、式(3.6)を原方程式(3.1)に代入して  $\cos \nu t$ ,  $\sin \nu t$  の係数を夫々零とおけば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (1-r^2)x - \sigma y + \frac{B}{\mu \nu a_0} &= 0, \\ \sigma x + (1-r^2)y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{b_1}{a_0}, \quad y = \frac{b_2}{a_0}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \\ a_0 &= \sqrt{\frac{4}{\gamma}}, \quad \sigma = \frac{\omega_0^2 r^2 - \nu^2}{\mu \nu} : \text{離調度} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{\gamma}}$$

式(3.7)より  $x, y$  を消去すれば基本調波振動の振巾特性を表わす式が得られる。

$$\left[ (1-r^2)^2 + \sigma^2 \right] r^2 = \left( \frac{B}{\mu \nu a_0} \right)^2 \quad (3.9)$$

なお、式(3.7)より振巾  $x, y$  を求めると次の通りである。

$$x = -\frac{\mu \nu a_0}{B} r^2 (1-r^2), \quad y = \frac{\mu \nu a_0}{B} \sigma r^2. \quad (3.10)$$

以上の各式は離調度  $\sigma$  の定義が異なる点を除けば復原力が線型の場合の関係式と同じ形をしている。

式(3.9)および(3.10)で表わされる周期解のうち安定なもののみが実際に存在し得る。この安定度は式(3.9)または(3.10)で表わされる平衡状態に微小の擾乱を与えたときの応答を考察することにより判別出来る。すなわち周期解  $v_0(t)$  からの変分  $\xi(t)$  を考え、この  $\xi(t)$  が時間  $t$  の増加に対して零に収斂すれば周期解は安定であり、反対に  $\xi(t)$  が発散すれば不安定である。変分  $\xi(t)$  を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= v(t) - v_0(t), \\ \text{ここに, } v_0(t) &= a_0 (x \sin \nu t + y \cos \nu t). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

式(3.11)を原方程式(3.1)に代入し、周期解  $v_0(t)$  が式(3.1)を満足すること、ならびに  $\xi(t)$  が十分小さい量であることを考慮し、 $\xi$  の二次以上の微小量を無視すれば、次の変分方程式を得る。

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \mu (1 - \gamma v_0^2) \frac{d\xi}{dt} + \left( 3v_0^2 + 2\mu \gamma v_0 \frac{dv_0}{dt} \right) \xi = 0. \quad (3.12)$$

$$\text{ここで } \xi(t) = e^{-u(t)} \cdot \eta(t), \quad u(t) = -\frac{1}{2} \mu \int (1 - \gamma v_0^2) dt, \quad (3.13)$$

なる変換を式(3.12)に施せば  $\eta(t)$  に関する微分方程式

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \left[ 3v_0^2 + \mu \gamma v_0 \frac{dv_0}{dt} - \frac{1}{4} \mu^2 (1 - \delta v_0^2)^2 \right] \eta = 0, \quad (3.14)$$

を得る。基本調波振動の同期解  $v_0(t) = a_0(x \sin vt + y \cos vt)$  を式(3.13)および(3.14)式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= e^{-u(t)} \cdot \eta(t) \\ u(t) &= \delta t + (\text{periodic terms in } t), \quad \delta = \frac{1}{2} \mu (2r^2 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dt^2} + \left[ \theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos(2nvt - \varepsilon_n) \right] \eta &= 0, \\ \theta_0 &= \frac{3}{2} a_0^2 r^2 - \frac{1}{4} \mu^2 (6r^4 - 4r^2 + 1), \\ \theta_1^2 &= \frac{1}{4} r^4 \left[ \frac{9}{4} a_0^4 + 4\mu^2 v^2 - 3a_0^2 \mu^2 (2r^2 - 1) \right] + O(\mu^4), \\ \theta_2^2 &= O(\mu^4). \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

を得る。式(3.16)は Hill の方程式の形となり、式(3.15)および(3.16)より変分  $\xi(t)$  の安定条件は

$$\delta = \frac{1}{2} \mu (2r^2 - 1) > 0, \quad (3.17)$$

および

$$[\theta_0 - (nv)^2]^2 + 2[\theta_0 + (nv)^2] \delta^2 + \delta^4 > \theta_n^2, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

で与えられる。<sup>(5), (6)</sup>

$n=1$  とおいた式(3.18)に式(3.16)の  $\theta_0, \theta_1$  を代入すれば

$$(1-r^2)(1-3r^2) + \sigma^2 + 2 \frac{\omega_0^2 r^2}{\mu v} \sigma + r^4 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{v^2} \right) > 0,$$

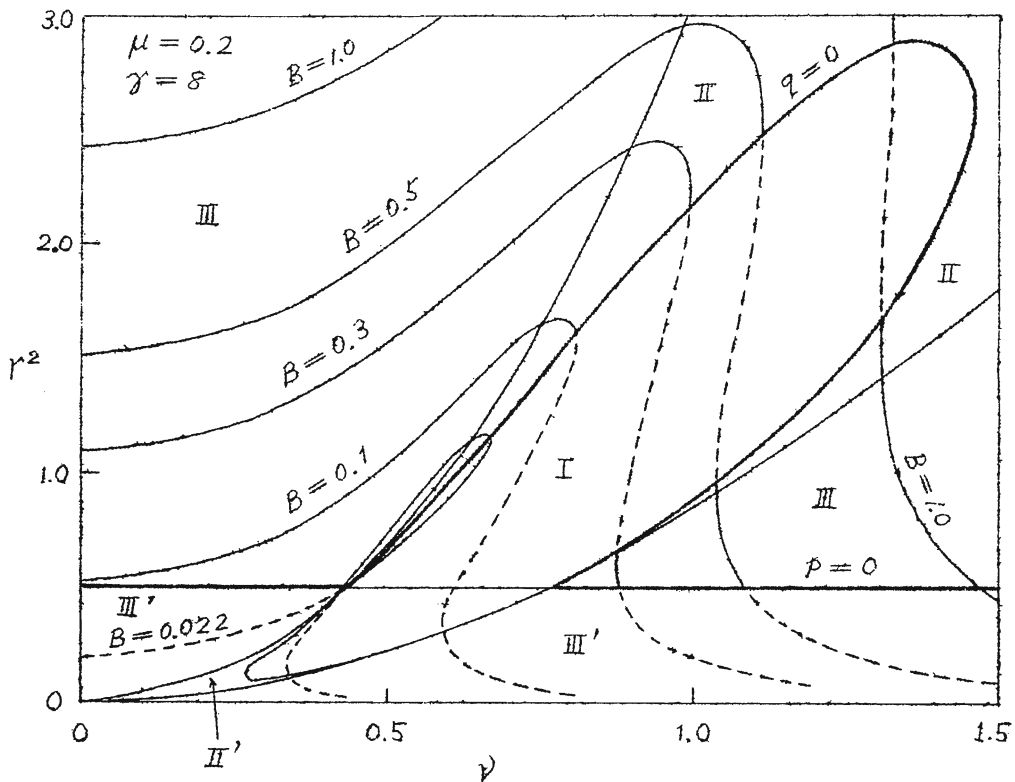
を得る。上式を導くに当って  $\mu^4$  以上の微小量を無視した。外力周波数  $v$  が  $\omega_0$  に近い場合の基本調波振動を考えているので、上式右辺の最後の項を他の項と比べて無視すれば次の安定条件を得る。

$$(1-r^2)(1-3r^2)+\sigma^2+2\frac{\omega_0^2 r^2}{\mu\nu}\sigma > 0 \quad (3-19)$$

$\theta_2^2$  は  $\mu^4$  の微小量であるからこれを無視すれば,  $n=2$  とおいた式 (3-18) の安定条件は常に成立する。従って安定条件として式 (3-17) および (3-19) を考えればよい。すなわち

$$\left. \begin{aligned} p &\equiv 2r^2-1 > 0, \\ g &\equiv (1-r^2)(1-3r^2)+\sigma^2+2\frac{\omega_0^2 r^2}{\mu\nu}\sigma > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

第12図には系のパラメータに



I : 鞍形点    II : 安定結節点    III : 安定渦状点  
III' : 不安定結節点    III'' : 不安定渦状点

第12図 基本調波振動振巾特性

$$\mu=0.2, \quad \gamma=8,$$

なる値を与えたときの、式(3.9)で表わされる振巾特性および式(3.20)で与えられる安定限界を示した。振巾特性のうち実線は安定な周期解を、点線は不安定な周期解を表わす。振巾特性が垂直接線をもつ点の軌跡は安定限界  $\varphi=0$  で与えられる。なお図には周期解を表わす特異点の種類をも併せ記入した。

### 3.2. 概周期振動

基本調波振動の同期が外れて発生する概周期振動に対しては、第2.2節と同様の考察により、 $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$  が時間の経過とともに十分ゆるやかに変化するものと考えて、概周期振動の基本式を導く。すなわち、式(3.6)を原方程式(3.1)に代入し  $\cos Vt$ ,  $\sin Vt$  の係数をそれぞれ零とおけば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (1-r^2)x - \sigma y + \frac{B}{\mu\nu a_0} \equiv X(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= \sigma x + (1-r^2)y \equiv Y(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

ここには、

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{b_1}{a_0}, \quad y = \frac{b_2}{a_0}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \\ a_0 &= \sqrt{\frac{4}{\gamma}}, \quad \tau = \frac{\mu}{2} t, \quad \sigma = \frac{\omega_0^2 r^2 - V^2}{\mu\nu} : \text{離調度}, \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{3}{\gamma}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

式(3.21)を導くにあたっては、 $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$  はともに時間  $t$  の経過に対して十分ゆるやかに変化する量であるとし、 $d^2 b_1/dt^2$ ,  $d^2 b_2/dt^2$  は微小量であるとして無視し、また  $\mu$  は1に比べて十分小さいとしているので  $\mu db_1/dt$ ,  $\mu db_2/dt$  も無視した。

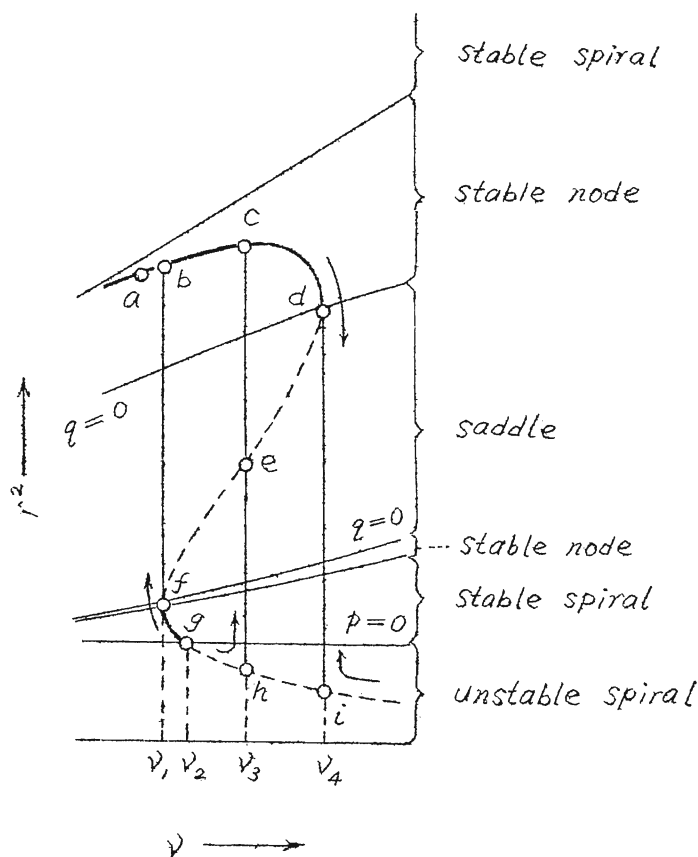
式(3.21)で表わされる系を考察するためには

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \quad (3.23)$$

の  $x, y$  - 位相平面上における積分曲線の模様を考察すればよい。

### 3.3. 基本調波振動と概周期振動相互間の移行

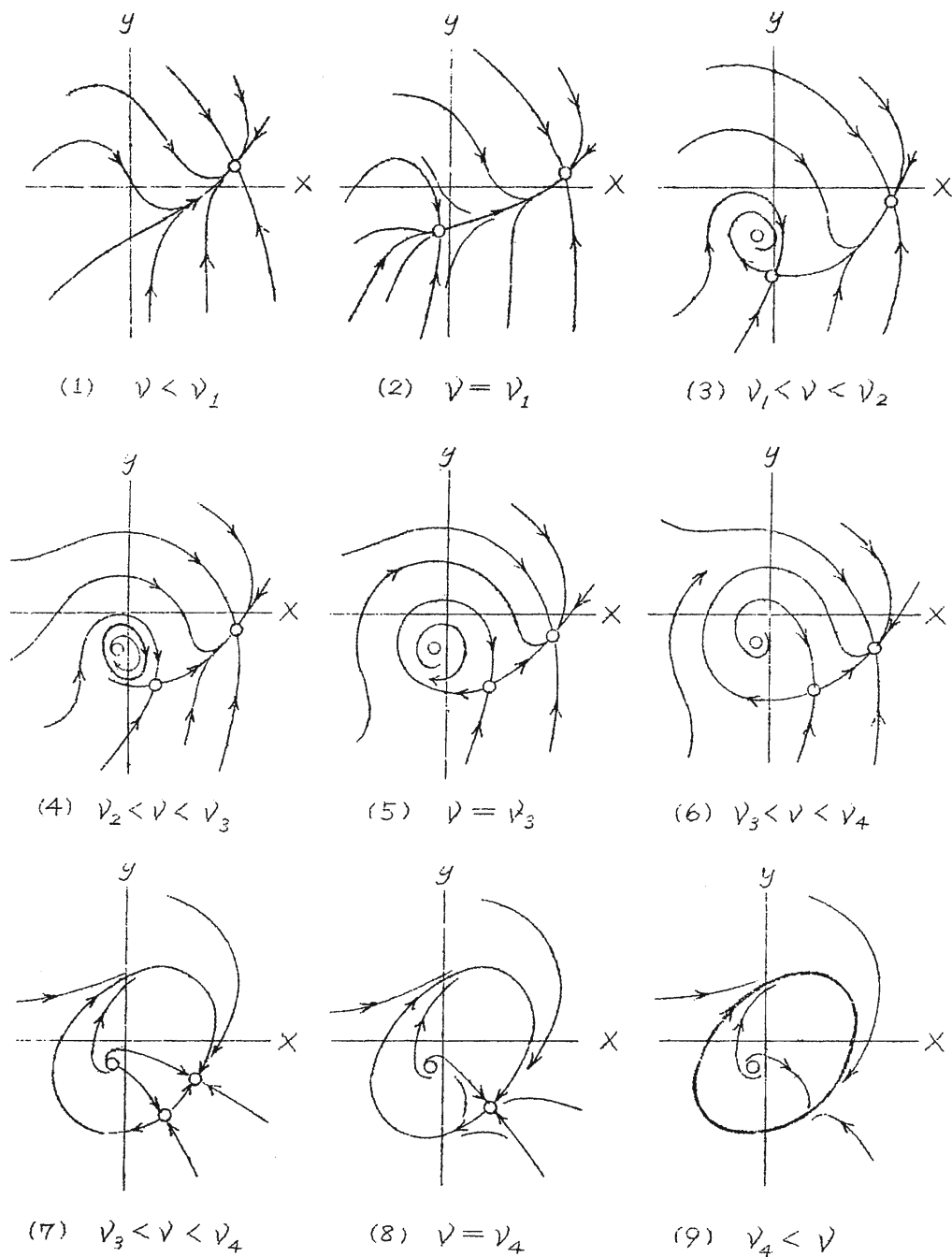
外力の振巾  $B$ ，周波数  $\nu$  を基本調波振動発生領域の境界を横切るように変化させると，基本調波振動と概周期振動の間の移行が起る。才12図の振巾特性の一例として，外力の振巾  $B$  に適当な値（例えば  $B=0.3$ ）を与えた場合の特性を定性的に判り易く書直したものが才13図である。



才13図 外力の振巾  $B$  を一定とした場合の振巾特性の一例

このとき、外力周波数  $\nu$  を変化せしめた場合に起る現象を  $x, y$ -位相面上の積分曲線により考察する。図において周波数  $\nu$  を  $\nu_1$  より小さく選ぶとただ一つの安定な周期振動（たとえば  $a$  点）を発生する。この場合の  $x, y$ -位相面上における積分曲線を図 14 (1) に示した。次に  $\nu = \nu_1$  なる場合の積分曲線を図 14 (2) に示した。ここでは図 13 の点  $b, f$  に対応して安定結節点と *node-saddle* 型の高次の特異点が現われる。 $\nu$  を  $\nu_1 < \nu < \nu_2$  に選ぶと図 13 よりわかるように安定な特異点が二つ存在し、初期値の与え方によりいずれかの周期振動が発生する。このときの積分曲線の様子を図 14 (3) に示した。

$\nu_2 < \nu < \nu_3$  なる場合には、図 14 (4) に示すように振巾の大きい周期振動とリミット・サイクルで表わされる概周期振動が存在し、その何れが発生するかは初期値による。 $\nu = \nu_3$  なる場合の積分曲線を図 14 (5) に示した。鞍形点から出た積分曲線の一つが元の鞍形点に入る特別の場合で、 $x, y$ -位相面上の動作点は最終的に安定結節点におちつき、従って系には振巾の大きい周期振動のみが発生する。図 14 (4) のリミット・サイクルは  $\nu_2 < \nu < \nu_3$  の範囲にのみ存在し、 $\nu$  が  $\nu_3$  に達すれば概周期振動はなくなって、図 13 点  $C$  で表わされる大きな振巾の周期振動に移行する。 $\nu_3 < \nu < \nu_4$  なる場合の積分曲線を図 14 (6), (7) に示した。図 14 (6) は  $\nu$  が  $\nu_3$  に近い場合、(7) は  $\nu_4$  に近い場合である。これらの場合には振巾の大きい周期振動のみが発生する。 $\nu = \nu_4$  になれば図 13 点  $d$  に対応する鞍形点と安定結節点が合体した *node-saddle* 型の高次の特異点が現われ、図 14 (8) に示すようにこれを通る一つの閉じた積分曲線が存在する。この積分曲線上の動作点は時間の経過と共に *node-saddle* 型の特異点に到達しても、実際には微小擾乱によって矢印の方向に動きだし、積分曲線を一周して再びこの特異点に向うことになり、以下このような運動を繰返す。その速度は特異点の近傍では遅く、離れるに従って速くなる。 $\nu$  を  $\nu > \nu_4$  に選ぶと平衡点は不安定渦状点のみとなり、 $\nu = \nu_4$  の場合の閉曲線上の特異点は消失し、図 14 (9) に示したようにこの閉曲線と似た形のリミット・サ

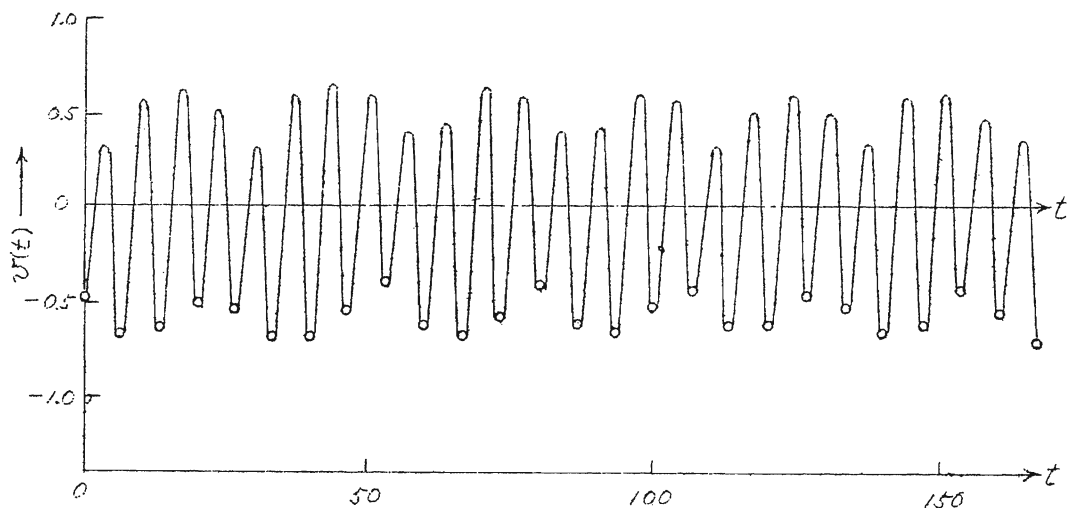


※14図 外力振巾  $B$  を一定とし、周波数  $\nu$  をかえた場合の  
周期振動と概周期振動相互間の積分曲線の模様

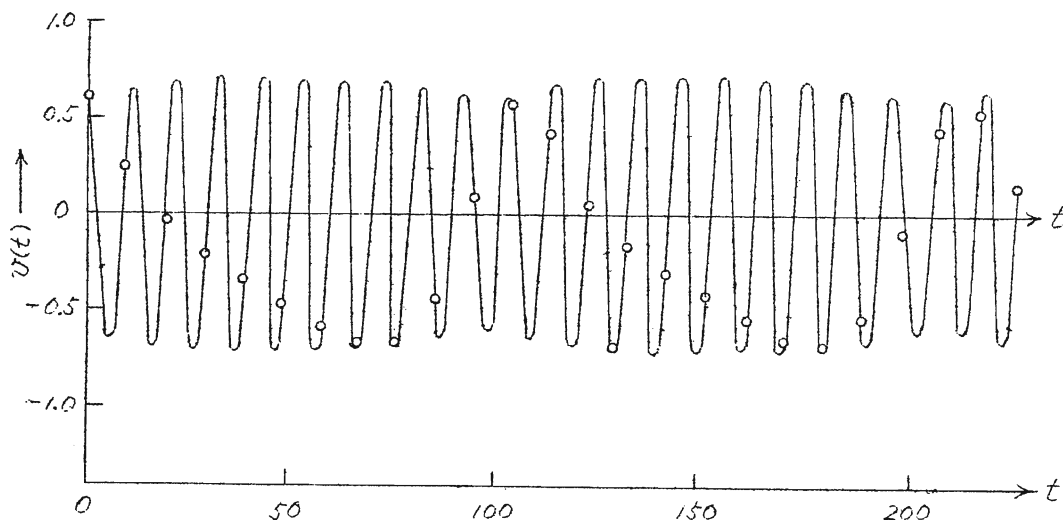
イクルが現われる。次に周波数  $\nu$  を減少せしめる場合を考える。まず  $\nu > \nu_4$  なる場合には概周期振動が起る。 $\nu$  を減少せしめて  $\nu_4$  に達すればリミット・サイクル上の動作点は特異点で停止し周期振動に移行する。第14図(8), (9) 参照。更に周波数を減少せしめると引きつづいて振巾の大きな周期振動が持続する。すなわち第13図において周波数  $\nu = \nu_4$  における周期振動と概周期振動間の移行は可逆的である。また  $\nu$  を  $\nu_2 < \nu < \nu_3$  に与えて、第14図(4) に示すようなリミット・サイクルに相当する概周期振動を発生せしめる事が出来るが、 $\nu$  を下げて  $\nu_2$  に達すればリミット・サイクルは安定な渦状点に収斂し、それ以後周波数が  $\nu_1$  に達するまで小さな振巾の周期振動が持続する。逆に  $\nu$  を  $\nu_2$  を越えて増加せしめると小さいリミット・サイクルに相当する概周期振動を発生する。また  $\nu$  を下げて  $\nu_1$  に達すると振動の振巾は飛躍的に増加し第13図の点bで表わされる振動状態に移行する。

次に外力の振巾  $B$  を比較的小さな値(例えば第12図にて  $B = 0.1$ ) に保ち、その周波数  $\nu$  を最初安定な周期振動の発生する領域に与えこれより  $\nu$  を増加して行くと特性曲線と  $g = 0$  の交点の周波数で引込状態から概周期振動に移り、更に  $\nu$  を増加すると引続き概周期振動を生ずる。逆にこのような概周期振動を発生している状態から  $\nu$  を減少させると再び上と同じ周波数でヒステリシスなれに概周期振動から周期振動に引込まれる。外力の振巾  $B$  を比較的大きな値(例えば第12図にて  $B = 1.0$ ) に保ち外力周波数  $\nu$  を増加させると、最初引込による振巾の大きい周期振動が発生しているが、安定限界すなわち  $g = 0$  の上側の境界まで来ると跳躍現象を起して振巾の小さい周期振動へ移行する。さらに周波数  $\nu$  を増して安定限界  $p = 0$  を越えると周期振動から概周期振動へと移行する。逆にこの概周期振動を発生している状態から  $\nu$  を減少して行くと安定限界  $p = 0$  より振巾の小さい周期振動へと移行し、この振巾の小さい周期振動は安定限界すなわち  $g = 0$  の下側の境界まで存在し、ここから振巾の大きい周期振動へと跳躍する。従つて外力周波数  $\nu$  の増減に伴つて系にヒステリシス現象が起る。なお、振巾

特性が安定限界  $\eta=0$  と交わらない程度にまで大きな  $B$  の値 (例えば  $B=2.0$ ) を与えた場合にはこのような跳躍現象は存在しない。

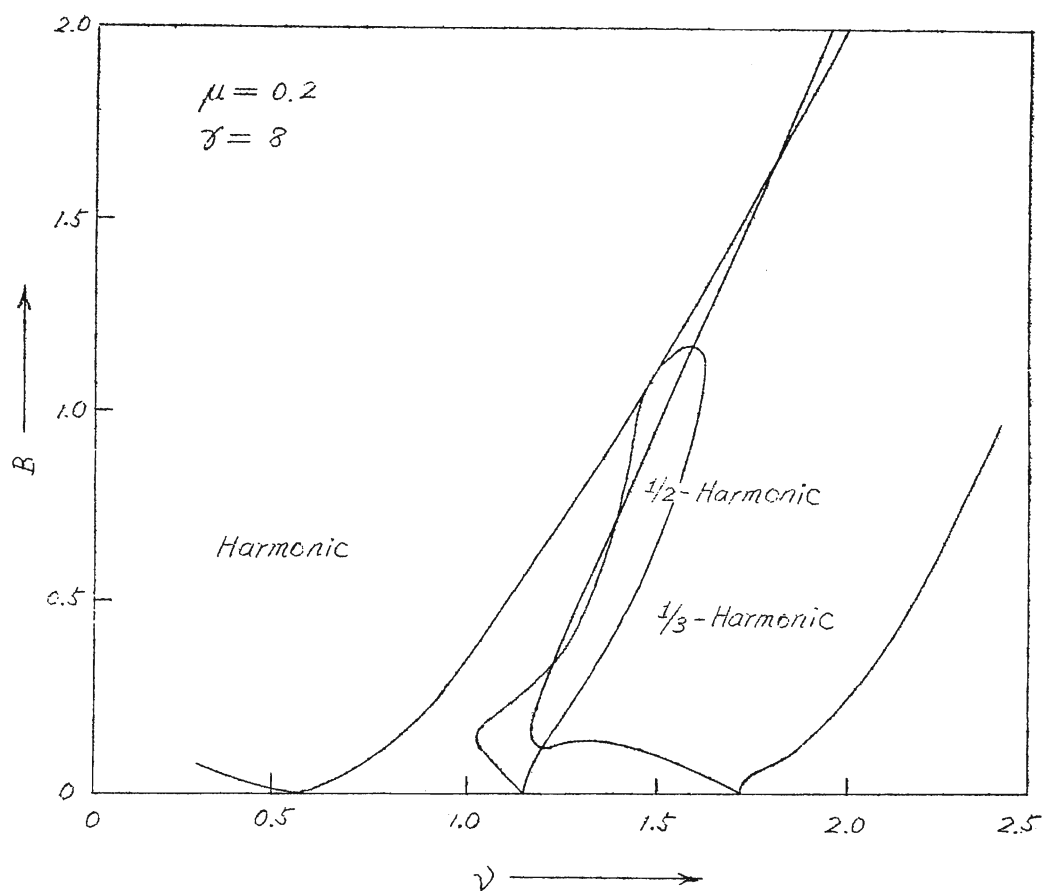


オ15図 (a) 概周期振動波形 ( $B=0.35$ ,  $\nu=0.734$ )  
(オ3.3図(4)に示した様なりミット・サイクルで表わされる概周期振動波形)



オ15図 (b) 概周期振動波形 ( $B=0.02$ ,  $\nu=0.66$ )  
(オ3.3図(9)に示した様なりミット・サイクルで表わされる概周期振動波形)

上述の現象は低速度型アナログ計算機による結果によつても裏づけられた。オ15図に低速度型アナログ計算機により得られた概周期振動波形を示す。オ14図(4), (9)に示すリミット・サイクルに相当する概周期振動波形を夫々オ15図(a), (b)に示した。なお、オ2節の線型復原力をもつ振動系の場合と同様に外力周波数  $\nu$  の値如何によつては、高調波及び分数調波の引込現象が発生する。オ16図は低速度型アナログ計算機を用いてこの様な引込領域を外力の振幅  $B$ 、周波数  $\nu$  を座標とする平面上に求めたものである。非線型復原力のために分数調波引込領域はオ1図の場合よりもかなり複雑な形となっている。



オ16図 低速度型アナログ計算機により得られた各調波振動の引込領域

## 4. 結 言

概周期振動の解析法として従来用いられて来た方法は、これを二つの正弦波振動の和として表わすいわゆる結合振動 (*combination oscillation*)<sup>(9), (10)</sup>の方法である。それぞれの振動は零一次近似計算では自由振動の周波数と外力周波数をもち、その比は一般に無理数となる。この方法によれば概周期振動の波形の包絡線は正弦波的に変化することになるから、引込領域の近傍で発生する概周期振動のように包絡線が正弦波とはいちぢるしく異なつた形をしている場合に対して良い近似を与えない。また周期振動の発生領域と概周期振動の発生領域の境界附近を論じる事が困難である。本論にのべた位相面解析法を用いると引込領域の近傍で発生する概周期振動の模様や周期振動と概周期振動相互間の移行現象を容易に説明する事が出来る。

終りに本研究に協力された西川禪一氏、安陪稔氏、平岡晋氏に感謝の意を表する。

## 文 献

- (1) 林, 柴山 : 周波数引込現象の解析, 電気通信学会非直線理論研究専門委員会資料, 1959年12月.
- (2) C. Hayashi, H. Shibayama, and Y. Nishikawa : *Frequency entrainment in a self-oscillatory system with external force*, IRE Trans. of the professional Group on Circuit Theory, Vol. CT-7, pp. 413-422, 1960.
- (3) 林, 柴山, 上田 : 自励振動系に周期的外力を加えたときの概周期振動, 電気通信学会非直線理論研究専門委員会資料, 1960年10月
- (4) C. Hayashi, H. Shibayama, and Y. Ueda : *Quasi-periodic oscillations in a self-oscillatory system with external force*, International Symposium on Nonlinear Vibrations, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Kiev, September, 1961.
- (5) C. Hayashi : *Stability investigation of the nonlinear periodic oscillations*, J. Appl. Phys., Vol. 24, pp. 344-348, March, 1953.
- (6) C. Hayashi : *Forced oscillations in Nonlinear Systems*, Nippon Printing and Publishing Co., Osaka, Japan, pp. 3-22, 1953.
- (7) H. Poincaré : *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Oeuvres, Tome 1, pp. 95-114, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- (8) I. Bendixson : *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Acta Mathematica, Vol. 24, pp. 1-38, 1901.

- (9) J.J. Stoker : *Nonlinear vibrations*, Interscience Publishers, New York, pp.163-171, 1950.
- (10) W.J. Cunningham : *Introduction to Nonlinear Analysis*, McGraw-Hill book company, Inc. New York Toronto London pp.213-220, 1958.