

二重複体と可解多様体の幾何学

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻 糟谷 久矢

Hisashi Kasuya

Department of Mathematics Tokyo Institute of Technology

1 背景

1.1

$(C^{*,*}, \partial, \bar{\partial})$ を $\mathbb{C}$ -係数上の有界な二重複体とする。二重複体 $(C^{*,*}, \partial, \bar{\partial})$ には、各コホモロジー $H_{\partial}^{*,*}(C)$, $H_{\bar{\partial}}^{*,*}(C)$ およびトータルコホモロジー $H^*(\text{Tot}C)$ の他にも次のような不変量が定義できる

- (スペクトル列の退化数) 二重複体 $(C^{*,*}, \partial, \bar{\partial})$ に対して、スペクトル系列 $E_s^{*,*}$ で $E_1^{*,*} \cong H_{\bar{\partial}}^{*,*}(C)$ かつ $H^*(\text{Tot}C)$ に収束するものが存在する。この時、

$$r(C) = \min\{r \in \mathbb{N} | \forall s \geq r, d_s = 0\}$$

と定義する。ここで、 d_s はスペクトル系列の E_s -タームの微分とする。

- (Bott-Chern コホモロジー)

$$H_{BC}^{*,*}(C) = \frac{\ker \partial \cap \ker \bar{\partial}}{\text{im } \partial \bar{\partial}}$$

と定義する。

1.2

(M, J) をコンパクト複素多様体とし、その上の二重複体 $A^{*,*}(M), \partial, \bar{\partial})$ を考える。上記の定義に関して、 $H_{BC}^{*,*}(M) = H_{BC}^{*,*}(A(M))$ 、 $r(M) = r(A(M))$ と書く。 (M, J) がケーラー構造を持つと仮定すると次が成り立つ。

- $r(M) = 1$
- 定義より得られる自然な写像 $H_{BC}^{*,*}(M) \rightarrow H^*(M, \mathbb{C})$ は同型射である。 $(\partial\bar{\partial}$ -レンマ [3])

注意: 自然な写像 $H_{BC}^{*,*}(M) \rightarrow H^*(M, \mathbb{C})$ が同型射ならば $r(M) = 1$ であるが逆は成り立たない。

1.3

G を単連結可解リー群とする。 G はコンパクトな離散部分群 Γ を持つとする。コンパクト等質空間 G/Γ を可解多様体と呼ぶ。 G が冪零の時 G/Γ を冪零多様体と呼ぶ。次のことが知られている。

- G を単連結複素冪零リー群で Γ に適合する (rational) 左不変複素構造を持つものと仮定する。この時、左不変微分形式のなす二重複体 $\wedge^{*,*} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ の埋め込みはコホモロジーの同型

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(G/\Gamma) \cong H_{\bar{\partial}}^{*,*}(\mathfrak{g}),$$

$$H_{BC}^{*,*}(G/\Gamma) \cong H_{BC}^{*,*}(\mathfrak{g})$$

- G を単連結複素冪零リー群と仮定すると、 $r(G/\Gamma) \leq 2$ 。 ([2])
- 任意の整数 n に対して、左不変な複素構造を持つ冪零多様体 G/Γ で $n \leq r(G/\Gamma)$ を満たすものが存在する。 ([8])
- 複素構造を持つ冪零多様体 G/Γ で自然な写像 $H_{BC}^{*,*}(M) \rightarrow H^*(M, \mathbb{C})$ が同型射であるものはトーラスに限る。 ([4])

1.4

G を単連結可解リー群とする。 G はコンパクトな離散部分群 Γ を持つとする。次のいずれかの条件を満たすと仮定する。

1. $G = \mathbb{C}^n \ltimes_{\phi} N$ 、 N は単連結冪零リー群で左不変複素構造 J をもち、作用 $\phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \text{Aut}(N)$ は半単純かつ J と可換。また、 $\Gamma = \Gamma' \ltimes \Gamma''$ 、 Γ' と Γ'' はそれぞれ、 $\mathbb{C}^n$ と N のコンパクトな離散部分群。
2. G は複素リー群。

この時、 $A^{*,*}(G/\Gamma)$ の部分 2 重複体 $B^{*,*}$ で、同型

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(G/\Gamma) \cong H_{\bar{\partial}}^{*,*}(B)$$

を導くものを著者は [5], [6] にて構成した。

2 結果

2.1 スペクトル系列 ([7])

- 可解多様体 G/Γ は 1.4 における仮定 1. を満たすとする。この時、 $r(N/\Gamma'') = 1$ ならば不等式

$$r(G/\Gamma) \leq 2$$

が成り立ち、 $r(N/\Gamma'') > 1$ ならば不等式

$$r(G/\Gamma) \leq r(N/\Gamma'')$$

が成り立つ。

- 可解多様体 G/Γ は 1.4 における仮定 2. を満たすとする。このとき、不等式

$$r(G/\Gamma) \leq 2$$

が成り立つ。

2.2 Bott-Chern コホモロジー ([1])

- 可解多様体 G/Γ は 1.4 における仮定 1. または 2. を満たすとする。[5], [6] にて構成した部分 2 重複体 $B^{*,*}$ に対して、 $C^{*,*} = B^{*,*} + \overline{B^{*,*}}$ と置く。この時、埋め込み $C^{*,*} \subset A^{*,*}(G/\Gamma)$ は同型

$$H_{BC}^{*,*}(C) \cong H_{BC}^{*,*}(G/\Gamma)$$

を与える。

- ケーラーではない複素可解多様体 G/Γ で自然な写像 $H_{BC}^{*,*}(M) \rightarrow H^*(M, \mathbb{C})$ が同型射となるものが存在する。

参考文献

- [1] D. Angella, H. Kasuya, Bott-Chern cohomology of solvmanifolds, arxiv 1212.5708.
- [2] L. A. Cordero, M. Fernández, A. Gray, The Frölicher spectral sequence for compact nilmanifolds. Illinois J. Math. **35** (1991), no. 1, 56–67.
- [3] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan, Real homotopy theory of Kähler manifolds. Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 245–274.
- [4] K. Hasegawa, Minimal models of nilmanifolds. Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 1, 65–71.
- [5] H. Kasuya, Techniques of computations of Dolbeault cohomology of solvmanifolds. Math. Z. **273**, (2013), 437–447.
- [6] H. Kasuya, de Rham and Dolbeault Cohomology of solvmanifolds with local systems. arXiv:1207.3988
- [7] H. Kasuya, The Frölicher spectral sequence of certain solvmanifolds, to appear in J. Geom. Anal..
- [8] S. Rollenske, The Frölicher spectral sequence can be arbitrarily non-degenerate. Math. Ann. **341** (2008), no. 3, 623–628.