

Topics in Waring's problem for fourth powers, II.

岩手大学 教育学部 川田 浩一
(Koichi KAWADA)

1. 序 — $g(4)$ をめぐって。

今回報告させていただく結果は, J.-M. Deshouillers, T.D. Wooley 両氏との共同研究で得られたものである。標題に“II”と付けたのは, 前回(1998年10月)の京大数理解析研究所の研究集会でさせていただいた話の続編という意味である([6]参照)。尚, 以下で文献を明記していない論文等については, 例えば, Vaughan[9]やNathanson[8]のBibliographyをご参照いただきたいと思います。

Waring問題に関して広く通用している記号であるが, 2以上の整数 k に対して, 「すべての自然数は高々 s 個の k 乗数の和で表せる」ような最小の s を $g(k)$ で, 「十分大きいすべての自然数は高々 s 個の k 乗数の和で表せる」ような最小の s を $G(k)$ で, それぞれ表す。多くの人達の貢献により, 現在ではすべての $k \geq 2$ に対して $g(k)$ の値は決定されている, といえる。つまり k の値が与えられれば, 簡単なアルゴリズムで $g(k)$ の値を決定できる (Vaughan[9], p.2参照)。この $g(k)$ を決定する研究の中で, 最後まで残っていたのが $g(4)$, 即ち 4 乗数の場合であった。

実際, $g(2)=4$ は有名な Lagrange の定理 (1770年) である。それを受けて同年, Waring が $g(3)=9$, $g(4)=19$ などの結果を記しているが, 証明は書かれていないので, これらは Waring が「予想した」と言うのが適当であろう。それが Waring 問題の研究の出発点となったわけである。

その後, $g(3)=9$ は 1909年に Wieferich が証明を発表し, 1912年に Kempner がその証明の一部に誤りがあることを指摘し, 修正している。いずれにしても $k=2$ および 3 の場合は, 代数的な, それも初等的な方法で $g(k)$ は決定された。しかし, そのような方向で 4 以上の k に対して $g(k)$ の値を決定することは, どうも無理なようで, 1920年頃から猛威をふるう Hardy-Littlewood の Circle method に頼らなくてはならないようである。逆に Circle method を用いれば, ある意味で, k が大きくなる程, 楽に $g(k)$ の値を決定できる, という状況になる。実際, Hardy-Littlewood や Vinogradov らの 1930年代中頃までの大きな仕事達に基づいた Dickson, Pillai, Niven らの貢献により, 6以上の k に対する $g(k)$ の決定は, 第二次世界大戦よりも先に終焉をみた。5 乗数については, それから約 20 年たった 1964年に, Chen が $g(5)=37$ を証明した。

筆者は 1965年の生まれであるから, したがって, 筆者が生まれたときに $g(k)$ の値が未決定であったのは, 4 乗数の場合の $g(4)$ のみ, ということになる。このことを

知ったときには、「俺は $g(4)$ の値を決めるために生まれて来たのではないが。」と思っただけだが、実はそのときにはすでに Deshouillers-Dress により $g(4)=19$ が証明されていたのである。

以下簡略化のため Deshouillers-Dress に倣い、

「高々 s 個の 4 乗数の和として表される自然数」を B_s と呼ぶことにする。

さらに、

「 B_s でない自然数全体の集合」を E_s と書く。

定義から明らかのように、すべての自然数 s に対して $E_s \supset E_{s+1}$ であり、

E_s が空集合となる最小の s が $g(4)$,

E_s が有限集合となる最小の s が $G(4)$,

ということになる。79 以下の 4 乗数は 1^4 と 2^4 しかなく、 $79 = 4 \times 2^4 + 15 \times 1^4$ だから $79 \in E_{18}$ であることがわかる。同様に $31 \in E_{15}$ であり、16 を法とする合同式に関する簡単な考察により、 $\{31 \times 16^m; m \geq 0, m \in \mathbb{Z}\} \subset E_{15}$ 、とくに E_{15} は無限集合となることがわかる。即ち、 $g(4) \geq 19$ および $G(4) \geq 16$ であることは平易にわかるわけである。

このうちの前者に注意すると、 $g(4)$ の決定は本質的には、 $G(4) \leq 19$ を 1925 年に証明した Hardy-Littlewood による、といえる。実際彼らは、

「 C より大きい自然数は全て B_{19} 」

となる定数 C が計算可能であることを示したから、その C の値を実際に求め、 C 以下の自然数をしらみつぶしにチェックすれば、有限な時間内で $g(4)$ の値が決まる（それが 19 であるかどうかは別として）。Auluck は 1941 年に $C = e^{204}$ を得ているが、これは「天文学的数字」などとは当到呼ばないような大きな数であり、つまり $g(4)$ の値は 1925 年に「原理的には」決定できたといえるものの、現実問題としてはまだまだ不可能という状況であった。現実には $g(4)$ の値を決めるには C の値を大幅に小さくしなくてはならないが、この C の巨大さは、Weyl の不等式や Hua の不等式などの Circle method にまつわる基本的な道具の証明に頻りに現れる約数関数の評価の部分に根本的な原因があり、その問題を取り除くことはそう単純なことではない。この C を小さくすることは、単なる作業、といったものではなく、多くの実質的・数学的なアイデアを要求する仕事であった。結局、Thomas, Dress, Balasubramanian, Deshouillers といった人達の数々のアイデアと努力により、 $C = 10^{367}$ とできることが [3] で最終的に証明された（この結果のアナウンスは、Balasubramanian-Deshouillers-Dress により 1986 年になされている）。一方、大きなコンピュータを長時間用いた数値の検査と少々の数学的考察 (greedy algorithm) を合わせて、Deshouillers-Dress [4] は 10^{448} 以下の自然数は全て B_{19} であることを示し、とうとう $g(4)=19$ の証明は 1993 年に完全に発表されたことになった ([1] - [4])。

2. 主結果 — E_{16}, E_{17}, E_{18} の決定

ところで Wooley と筆者は最近の共同研究[7]の中で、ある4次恒等式に気付くことにより、4乗数に関わるいろいろな加法的問題についての成果を得た。その方法はたいへん単純で、かつある種の限られた場面では現在知られている最も強力な手段でもある。[7]のIntroductionの中にも記した通り、その方法が前節で紹介した $g(4)$ にまつわる話題にも大変有効であることは明らかであり、それを実行した結果を報告することが今回の目的である。

実際、当初からの期待通り、[7]にある恒等式(下の(1)の式)は、 $g(4)=19$ の証明を大いに簡略化することができる。とはいえ、それ以前の多くの仕事に依存する部分も少なくないし、また Vinogradov の記号 $\ll$ などを用いずに全ての計算を explicit に実行するわけだから、証明全体がけっこう長いのはいたしかたないところである。

我々はさらに、その証明の簡略化に留まらず、これまで知られていなかった結果も得ることができた。その新しい結果を述べる前に、 $G(4)$ の方に目を移すと、 $G(4) \geq 16$ が平易にわかることは先に記したが、実は $g(4)$ が決定されるよりずっと以前の1939年に、Davenport は既に $G(4)=16$ を証明していた。つまり E_{15} は無限集合で、 E_{16} は (したがって16以上の s に対して E_s は) 有限集合であることは60年前から知られていた。 $g(4)=19$ が証明されたということは E_{19} は空集合であると決定された、ということであるが、これまでは E_{18}, E_{17}, E_{16} については空でない有限集合ということがわらっているに過ぎなかった。我々の新しい結果とは、これらの3つの集合を決定することである。即ち、高々16個 (17, 18個でも同様) の4乗数の和で表せない自然数を全て決定することができた。この仕事のうち、筆者が中心的に関わったのは次の結果の証明である。

定理1 (Deshouillers - Kawada - Wooley)

10^{246} より大きい、16の倍数でない自然数は、16個の4乗数の和として表せる。

この定理1の証明を記述したプレプリント[5]は現在作成中で、2000年の6月頃までには完成すると思われる。

一方、筆者は全く寄与していないが、大きなコンピュータによる検査を基に、Deshouillers - Hennecart - Landreau は次の結論を得た。

定理2 (Deshouillers - Hennecart - Landreau)

次頁の表に現れる96個の自然数は、高々16個の4乗数の和として表せない。

それら96個の数を除いた 10^{245} 以下の自然数は、高々16個の4乗数の和として表せる。

この定理2について記載した論文は、前記の3氏によって現在作成中である。定理2にある B_{16} でない96個の自然数を全て書き下す前に、それら96個のうちの最大数は、

13792 であることを述べておく。したがって定理1および2により B_{16} でない自然数はその96個が全てであることがわかる。それを確認するためには、定理1で除かれている、 10^{216} より大きい16の倍数 N も B_{16} であることをみるだけでよいが、そのような N を $N = 16^m \cdot n$ の形で表す、ただしここで m は正の整数、 n は

「 $n > 10^{216}$ か $16 \nmid n$ 」であるが、または「 $10^{216}/16 < n \leq 10^{216}$ 」

のいずれかをみたすようにできる。前者の場合は定理1により、後者の場合は定理2により、いずれにしても n は B_{16} であることがわかるから、 $N = (2^m)^4 \cdot n$ も B_{16} であることがわかる。つまり次の系を得る。

系 (Deshouillers - Hennecart - Kawada - Landreau - Wooley)

集合 E_{16} は、下の表にある96個の自然数から成る。とくに、13792より大きい自然数は全て B_{16} である。

$E_{16} \supset E_{17} \supset E_{18}$ だから、 E_{16} が決定されれば E_{17} , E_{18} なども決定するのは容易で、実際それらが見易いように次の表を書きたい。それを書くにあたり、見ていただければわかる通り、連続する自然数が現れる場合は、直前の自然数の下に次の自然数を書くことにする。

47, 62, 77, 127, 142, 157, 207, 222, 237, 287, 302, 317, 367, 382, 397, 447, 462, 477,
63, 78, 143, 158, 223, 238, 303, 318, 383, 398, 463, 478,
79, 159, 239, 319, 399, 479,
527, 542, 557, 607, 622, 687, 702, 752, 767, 782, 847, 862, 927, 942, 992, 1007, 1022, 1087, 1102,
543, 558, 623, 703, 783, 863, 943, 1008, 1023, 1103,
559,
1167, 1182, 1232, 1247, 1327, 1407, 1487, 1567, 1647, 1727, 1807, 2032, 2272, 2544, 3552, 3568, 3727
1183, 1248,
3792, 3808, 4592, 4832, 6128, 6352, 6368, 7152, 8672, 10992, 13792.

以上96個の自然数が E_{16} を成すわけだが、ここに現れている自然数 m のうち直前の自然数 $m-1$ が表中に現れていないものは、 B_{16} ではないが B_{17} ではあることがわかる。なぜなら $m-1 \notin E_{16}$ ということは $m-1$ は B_{16} であり、よって $m = (m-1) + 1^4$ は B_{17} となるからである。つまり上表の一番上の段に並んでいる数(47, 62, 77, ..., 477, 527, 542, ..., 1167, 1182, ..., 13792)は B_{17} である。そして実際、確認にはいささかの検査を要することであるが、その逆も真となっている。即ち上表の二、三段目に現れている数は B_{17} でない。そのような

数は31個あり、それらが E_{17} を成す。

同様に $m, m-1$ がともに前頁の表に現れていて $m-2$ が現れていなければ、 $m = (m-2) + 1^4 + 1^4$ は B_{18} である。言い換えると、表の二段目に現れている数(63, 78, ..., 1248)は B_{18} である。さらに少々のチェックでわかる通り、三段目に並んでいる7個の数は B_{18} ではなく、それらが E_{18} を成す。また、前頁の表には四段目はない。このことは全ての自然数が B_{19} であること、つまり $g(4) = 19$ であることを示している。

ところで、 E_{18} を成す7個の数は、80を法とする等差数列を成していて、次のように表示できることを記しておきたい。

$$E_{18} = \{80k-1; k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

これは高々18個の4乗数の和として表せない7個の自然数を記憶するのに、大変役に立つであろう。この80という数は $3^4 - 1^4$ で、 2^4 の倍数でもあり、そういったことが関係している、といえると思う。もう一言加えると、 $m \equiv n \pmod{2}$ かつ $4 \nmid mn$ なら $m^4 \equiv n^4 \pmod{80}$ である。ここではこれ以上深入りはしないが、 E_{16} の元を示した前頁の表に現れる数達には、他にも法80に関するある程度の規則性がみられる。筆者には、16の倍数がやや不規則に現れているように感じられるが、それらを除いて前出の表を眺めれば、その規則性がよりはっきり観察されることと思う。その点に気付けば、 B_{16} でない96個の自然数を全て暗記することは、意味のないことだが、難しいことではない。

—— ところで、 E_{16} が有限集合であることを初めて示したDavenportの方法は、 E_{16} に対する計算可能な上界を与える。つまり1939年のその後の仕事以来、 E_{16} を決定することは、「原理的には」可能であったことになる。もちろん彼の方法に限らず、[7]より前の全ての研究を合わせても、その E_{16} に対する上界として実際に得られる数は巨大すぎて、したがってこれまでは E_{16} などを決定することは「現実には」不可能であったともいえる。とはいえ、我々の定理1に関わる今回の仕事は、否定的に言えば「原理的にやればできるとわかったことを、実際にやっただけ」とも言えるわけで、つまり数学的な仕事としてどれほど評価してもらえるものであるのか、人によって意見の分かれるところなのだろう、と筆者は想像している。個人的には今回の結果をとてき気に入っているので、仮りにあまり評価されることなくとも、それはそれでよいと思っているのだが、いずれにしても、これは非常に多くの時間と深刻な労力を費やした、渾身の力を込めた仕事であったことを、ここに記させていただきたいと思う。

3. 定理1の証明の方針と、その経過

筆者は定理2の証明に関しては全く関係していないので、以下は定理1の証明に関して述べることにしたい。我々の最も基本的な方針は、Kawada-Wooley [7] で用いられた恒等式

$$(1) \quad x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$$

を再び利用することである。いま集合 M を、

$$M = \{m \in \mathbb{N}; \exists x, y \in \mathbb{Z}, m = x^2 + xy + y^2, xy(x+y) \neq 0\}$$

で定義すれば、(1)より明らかのように、 $m \in M$ ならば $2m^2$ は3個の4乗数の和で表せる。一方、

$$(2) \quad 2m_1^2 + x_1^4 + x_2^4 = 2m_2^2 + x_3^4 + x_4^4, \quad 1 \leq m_i \leq P^2 \quad (i=1,2), \quad 1 \leq x_j \leq P \quad (j=1,2,3,4)$$

という形の不定方程式の解の個数について、比較的楽に良い評価が得られることに注目して、適当な自然数 S に対し「大きい自然数 N は、

$$(3) \quad N = 2m_1^2 + 2m_2^2 + x_1^4 + \dots + x_S^4 \quad (m_1, m_2 \in M, x_j \in \mathbb{N} \quad (1 \leq j \leq S))$$

という形に表せる」ということを Circle method で証明してみよう、というのが最初に思い当たる方針になる。 N がそのような形で表されれば、上の注意から、 N は $(6+S)$ 個の4乗数の和で表せることになる。この方針で例えば $g(4)=19$ の証明に寄与しようとするれば、 $S=13$ とすればよいわけである。実際、前節で触れた通り、その方向で $g(4)=19$ の証明を大きく簡略化することができる。

実は今回の仕事は、1998年3月に, Deshouillers, Wooley, 筆者の3人が Oberwolfach で会ったときに話をして具体的に始まったものである。話は速れるが、筆者はこのとき初めて Deshouillers 氏と会ったのだが、それまで彼の名前をどのように発音するのが正しいのか知らなかった。このときに本人に直接尋ねる機会を得て、日本語のカタカナ表記の「デズイエ」というのはかなり真実に近いらしいことがわかった。実はそれ以前にも、彼はどうもデズイエと発音するらしいという説も耳にしたことはあったのだが、あれだけ文字を綴っておいてまさか「デズイエ」ってことはあんめえ、と筆者は疑っていたのである。

それはともかく、初めて相談したときから、上述のような方針で $g(4)=19$ の証明の簡略化や集合 E_{18} の決定ができることはまず間違いないだろう、というのが3人の一致した感想であった。逆に、非常に楽観したとしても、あとで述べるような法16の合同式条件の問題から、今回の我々の方法で到達できる最も深い結果は、 E_{16} の決定であろうというのにも疑いのないところであった。 E_{15} は無限集合だが、そこから16の倍数を全て取り去って得られる集合を E_{15}^* とするとそれは有限集合であることが知られていて(これも Davenport (1939) による)、 $E_{15} = \{16^m \cdot n; n \in E_{15}^*, m \geq 0, m \in \mathbb{Z}\}$ となる。したがって有限集合 E_{15}^* を決定すれば、 E_{15} をきっちり決定できることになる。上述のような意味で、「原理的には」 E_{15}^* を決定することは可能だが、「現実的に」それを可能にする手があるかは、今のところ全くないと言ってよい。

ということでは、とにかく初めは E_{17} を決定できるか計算してみ、うまくいったら E_{16} にも挑戦し、もし E_{16} まで決定できればそれ以上は望めない、という感じであった。16というのは、 $G(4)=16$ でもあるし、ある意味でキリの良いところではある。

一方で、コンピュータを用いて小さい方の自然数についてもチェックしなくてはならない。例えば B_{16} については、「ある自然数 A 以下で、前々頁の表にある96個以外の自然数は全て B_{16} である」

といった形の結果が必要である。これに関し Deshouillers 氏は, Oberwolfach で会った当初, その A の値を 10^{200} 程度まで大きくできることは確実と言っていて, その後 $A = 2 \times 10^{246}$ までとどくことを報告してくれた。もちろん最終的には定理 2 で述べた通り $A = 10^{245}$ までできたとのことである。加えて, 必要ならば A の値を 10^{250} 程度まで大きくすることは可能である, が, 10^{260} までとどくのは無理そうだと報告もあった。

いずれにしても, こういった情報を頭に入れて Circle method に関わる計算をしていたのである。まず E_{17} の決定ができそうかどうか, (3) の形で $s=11$ としてやってみると, かなり余裕で大丈夫そうなのことがわかった。次に E_{16} への挑戦として, (3) において $s=10$ としてやってみると, 大雑把にいて, N が 10^{240} 程度以上ならその形で表現できることが証明できた(その後の改良によれば, その限界は 10^{160} 程度まで小さくできる)。ただし, E_{17} の決定の方はそれで全く問題がないのだが, 後者の方には法 16 に関する合同式条件の問題が発生するので, すぐに E_{16} が決定できる, とはならないのである。

容易にわかることだが, 4 乗数はその偶奇に従って法 16 で 0 か 1 と合同である。整数 x, y について, $x, y, x+y$ の 3 つのうち奇数となるのは 0 個か 2 個だから, M の定義と (1) をみれば, $m \in M$ ならば $2m^2 \equiv 0$ または $2 \pmod{16}$ であることがわかる。ここで, 本当の 3 個の 4 乗数の和は法 16 で 3 と合同となり得るのにに対し, $2m^2$ は, 3 個の 4 乗数の和で表せるが, 法 16 で 3 と合同になり得ないのが, とくに問題なのである。それは $x, y, x+y$ の 3 数が同時には奇数にならないことを反映しているわけだが, この単純な事実が我々の方法の避け難い欠陥を引き起こす場合があるのは, すでに [7] (あるいは [6]) で指摘されている通りである。実際 (3) で $s=10$ とすれば, (3) の右辺は法 16 で 15 と合同になることができないことがわかる。 $N \equiv 15 \pmod{16}$ なら, それが B_{16} であつたとしても, $s=10$ とした (3) の形で N を表すことはできないのである。逆に, (3) で $s \geq 11$ ならそのような問題は現れないので, E_{17} までの決定は問題がなかったのである。また, B_{16} に関して, $N \equiv r \pmod{16}$, $1 \leq r \leq 14$ の場合には, 前に述べた通りの満足のいく結果は得られる。 $r=0$ の場合は, 前節の系を導く過程で触れた通り, 無視してよいが, E_{16} を決定するためには $r=15$ の場合は扱わなくてはならない。先の観察からわかるように, $N \equiv 15 \pmod{16}$ なる N を扱う際には, 恒等式 (1) を 1 回しか使うことが許されない。「 $2m^2$ ($m \in M$)」が 1 回現れるたび法 16 の剰余類を 1 つ失うからである。とすると, 次に思いつく方法は,

$$(4) \quad N = 2m^2 + x_1^4 + \cdots + x_{13}^4 \quad (m \in M, x_j \in \mathbb{N} \ (1 \leq j \leq 13))$$

という表現を扱うことであらう。Deshouillers-Dress [3] による Hua の不等式の explicit version も用いればこういった形を扱うことは可能である。しかし, 非常に楽観的に, 雑に, 計算を実行してみても, N が 10^{290} から 10^{300} くらい大きくなると (4) の形で N が表される, という結論が得られない。コンピューター側の結果と照らし合わせてみれば, 10^{290} というのはまだまだ大きすぎる。よって, この方針でも E_{16} を完全に決定するのは, 少なくとも現在では, 無理なのである。

というあたりが1998年の9月頃までの状況であった。我々は E_{16} に未練を残しながらも、 E_{17} までは決定できたし、 E_{16} についても不完全ながら何がしかのことは言えるのだから、ということで、ここまでの結果を論文として発表しようということになり、その原稿もほぼ完成に近いところまで仕上げた。その原稿を書きながら、あともう一つ新しいア行'アがあれば E_{16} を決定できるだろうに、と思い、たまにあれこれ考えていた。「もう一つの恒等式」に気付いたのは、そういうことであった。

恒等式(1)と似た形の2次恒等式

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2(x^2 + xy + y^2)$$

を思い出し。(Woolley氏はこれと(1)を並べて fortunate coincidence といっている), さらに

$$(z+x)^4 + (z-x)^4 = 2x^4 + 12x^2z^2 + 2z^4$$

に注意すれば、次の恒等式に行き着く。

$$\begin{aligned} (5) \quad & (z+x)^4 + (z-x)^4 + (z+y)^4 + (z-y)^4 + (z+x+y)^4 + (z-x-y)^4 \\ &= 4(x^2+xy+y^2)^2 + 24(x^2+xy+y^2)z^2 + 6z^4 \\ &= 4(x^2+xy+y^2+3z^2)^2 - 30z^4 \end{aligned}$$

これがその「もう一つの恒等式」である。恒等式(1)の効果は、応用上「3つの4乗数を1つの平方数に変換する」と言い表すことができるのだが、この(5)の方は、「6つの4乗数を1つの平方数と1つの4乗数に変換する」ということになっている。後者は形式的にみて、「5つの4乗数」と「1つの平方数」の置き換えになっているから、その意味では(5)は(1)よりも効力が弱い。しかし、(1)と異なり、(5)の左辺にある6つの4乗数は、6つとも同時に奇数となることができる。実際、 x, y が偶数で z が奇数であればよいわけである。これが(5)が(1)よりも優る点である。またここでは詳しくは触れないが、(5)が Hua の不等式よりも有効な mean value estimate を導くことも容易に見抜ける。したがって(5)に気付いた瞬間に筆者は E_{16} も決定できることを確信したのである。

恒等式(5)により、我々は次のような表現の考察に導かれる。

$$(6) \quad N = \underbrace{2m_1^2 + 4m_2^2 + 24m_2z^2 + 6z^4}_{\text{}} + x_1^4 + \dots + x_n^4 \quad (m_1, m_2 \in \mathbb{N}, z, x_j \in \mathbb{N}).$$

恒等式(1), (5)により、下線を付けた部分がそれぞれ3個、6個の4乗数の和に分解することがわかるから、 N が(6)の形で表されれば N は16個の4乗数の和であることがわかる(大したことはないが、(5)に従って分解したときの6個の4乗数がどれも0でないことを保障するには、(6)で m_2 と z についてさらなる条件が必要になるが、そのような細部はここでは省略する)。そして、我々は実際に、 $N > 10^{246}$ かつ $16 \nmid N$ ならば、 N は(6)の形で表されることを示すことができ、それにより定理1を得るのである。

ここでは定理1の証明にこれ以上立ち入るのを止めることにするが、いずれ発表されるであろう論文[5]の§2に、証明の概略についてのより詳しい記述がある。上では基本的な方針についてしか述べなかったが、実際の証明には他にも多くのア行'アや工夫が盛り込まれている。その中から一つだけ、(2)の形の不定方程式の解の個数

に対する有効な評価を得る際などに用いられる次の補題を紹介して、この報告文の結びとしたい。興味をもった読者には、是非この補題の証明を考えてみていただきたい。きっと楽しんでいただけるのではないかと、思う。その証明の一例は、[5]の§9にある。

補題 $\tau(n)$ を約数関数 (n の正の約数の個数) とし, $g(d)$ を, 素数 p のべき p^l ($l \geq 1$) に対して,

$$g(p^l) = \begin{cases} 3 & (l=1, 2) \\ 27 & (l=7, 9, 11) \\ 9 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義されている乗法的関数とする。するとすべての自然数 n に対して,

$$\tau(n) \leq 8 \cdot \sum_{\substack{d|n \\ d < n^{1/4}}} g(d).$$

参考文献

- [1] Deshouillers, Sur la majoration de sommes de Weyl biquadratiques, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 19 (1992), 291-304.
- [2] Deshouillers-Dress, Sommes de diviseurs et structures multiplicatives des entiers, Acta Arith. 49 (1988), 341-375.
- [3] Deshouillers-Dress, Sums of 19 biquadrates: On the representation of large integers, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 19 (1992), 113-153.
- [4] Deshouillers-Dress, Numerical results for sums of five and seven biquadrates and consequences for sums of 19 biquadrates, Math. Comp. 61 (1993), 195-207.
- [5] Deshouillers-Kawada-Wooley, Sums of sixteen biquadrates, (in preparation).
- [6] 川田浩一 (K. Kawada), Topics in Waring's problem for fourth powers (Japanese), 数理解析研究所講究録1091「解析数論と数論諸分野の交流」, 1999年4月, 157-171.
- [7] Kawada-Wooley, Sums of fourth powers and related topics, J. Reine Angew. Math. 512 (1999), 173-223.
- [8] Nathanson, "Additive Number Theory: The Classical Bases", Graduate Text in Math. 164, Springer, 1996.
- [9] Vaughan, "The Hardy-Littlewood Method", 2nd ed., Cambridge Tracts in Math. 125, Cambridge Univ. Press, 1997.