

ある Dirichlet 級数の関数等式について

岡山理大教養部 船倉武夫 (Takeo Funakura)

(1) Dirichlet 級数展開で定義され,

(2) 関数等式 $\zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}} = \zeta(1-s)\Gamma(\frac{1-s}{2})\pi^{-\frac{1-s}{2}}$
を満足し,

(3) $s=1$ で 1 位の極を持つ以外は全平面で正則であり,

(4) Euler の無限積の表示を持つ,

などが複素関数として, Riemann の ζ 関数の保有する基本的性質である。逆にこれらの性質によつて, Riemann の ζ 関数を特徴付ける問題に Hamburger [3] が最初に有意な結果を与えた。

定理 (Hamburger) $f(s)$ が以下の (1) ~ (3) の条件を総て, 満足するならば,

$$f(s) = a_1 \zeta(s)$$

となる。

(1) Dirichlet 級数展開

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

が可能である。

(2) 関数等式

$$f(s) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = g(1-s) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}}$$

が成立つ。ここで、 $g(1-s)$ は $\operatorname{Re}(s) \ll 0$

で Dirichlet 級数で定義された関数とする。

(3) $G(s)$ を全平面で正則な関数、 $P(s)$ を多項式として、

$$f(s) = \frac{G(s)}{P(s)}$$

と表示できる。

さて、この定理の証明は Siegel [9] において簡易化されている。Hamburger は Dirichlet の L 関数に対しても、興味を持ち、同様な議論を展開している。彼の研究を継承して、周期的係数を持つ Dirichlet 級数達の中で、Dirichlet の L 関数の特徴付けを関数等式を使って考察してみる。別の視点からの特徴付けを Turán [10] が行なっている。なお、Hecke はいわゆる Hecke 理論を Hamburger の 14 年後に [4]

で発表している。この拙論の内容とも、一部抵触するが、それには触れないことにする。

周期 n の arithmetical 関数 f に対して、

$$L(s, f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s}$$

と定義する。正数 $a(f)$ と、実数 $b(f)$ を任意に与え、それらを固定して、

$$\Lambda(s, f) = a(f)^s \Gamma\left(\frac{s+b(f)}{2}\right) L(s, f)$$

とおく。

f を剰余群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の関数と看做したときの、Fourier 変換 $\hat{f}$ は

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^n f(m) e^{-\frac{2\pi i x m}{n}}$$

で与えられる。さて、次の定理が成立つ。

定理 1. f, g の基本周期が共に n であると仮定する。このとき、関数等式

$$\Lambda(1-s, f) = \Lambda(s, g)$$

が成立するための必要十分条件は次の (a) ~ (d) が満足するこ

とである。

(i) f, g とともに奇関数あるいは偶関数である。

$$(ii) \quad a(f)a(g) = \frac{n}{\pi}$$

$$(iii) \quad b(f) = b(g) = \begin{cases} 1 & f: \text{奇関数} \\ 0 & f: \text{偶関数} \end{cases}$$

$$(iv) \quad \hat{f} = i^{b(g)} \sqrt{\frac{\pi}{n}} a(g) g$$

Hurwitz の方法 (Zeitschrift für Math. und Phys. 27 (1882) 86-101, あるいは, Whittaker-Watson [11] の 13 章) に従い, Schnee [8] は周期的係数を持つ Dirichlet 級数の満足する関数等式を与えた。彼の結果を整理すれば, (i) ~ (iv) の十分性を得る。この十分性の証明を仔細に見直すことによつて, 必要性が判明する。

従つて, これから,

(i) f の基本周期を n

(ii) f は奇関数または偶関数

$$(iii) \quad a(f) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

$$(iv) \quad b(f) = \begin{cases} 1 & f: \text{奇関数} \\ 0 & f: \text{偶関数} \end{cases}$$

であることを常に仮定することにする。定理 1 から次の系

を獲得する。

系 ω を絶対値が 1 の複素数とする。このとき、
関数等式

$$\Lambda(1-s, f) = \omega \Lambda(s, \bar{f})$$

が成立し、かつ

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{n} \lambda^{b(f)}} \sum_{m=1}^n f(m) e^{\frac{2\pi i m}{n}}$$

となるための必要十分条件は、

$$\hat{f} = \omega \bar{f}$$

$$f(1) = 1$$

が成立つことである。

各 ω に対して、 $L(s, f)$ が無限に存在することが分るので、関数等式のみで、Dirichlet の L 関数を特徴付けることは不可能である。ところで、 ω の絶対値が 1 でなければ、系の要請を満足する $L(s, f)$ は存在しない。

$s \rightarrow 1$ の極限に関しては、Chowla [2] 以降に、多くの研究成果がある。我々の考察の範囲では、

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s, a) - \frac{1}{s-1} \right) = - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

であるから, $\lim_{s \rightarrow 1} L(s, f)$ が収束するための必要十分条件は $\hat{f}(n) = 0$ である。系の要請を仮定するもとでは, これは

$$f(n) = 0$$

と同値である。更に, Dirichlet の L 関数の場合と同様に,

$$L(1, f) = - \frac{\hat{f}(1)}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^n \overline{f(m)} \log \left(1 - e^{-\frac{2\pi i m}{n}} \right)$$

と計算できる。もし f が奇関数であれば, $\hat{f} = \hat{f}(1) \overline{f}$ および $\hat{f}(n) = 0$ を用いて,

$$L(1, f) = - \frac{\pi}{2n} \sum_{m=1}^{n-1} f(m) \cot \frac{m\pi}{n}$$

と変形できる。Okada [5] によって一般化された Chowla [2] の定理

$$\left\{ \cot \frac{m\pi}{n} ; 1 \leq m \leq \left[\frac{n}{2} \right], (m, n) = 1 \right.$$

は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である由

を適用すれば, 次の定理が証明できる。

定理 2. n と $\varphi(n)$ が互いに素であると仮定する。このとき,

$$(i) \quad \hat{f} = \hat{f}(1) \bar{f}$$

$$(ii) \quad (m, n) = 1 \text{ に対して, } \hat{f}(m) = 0$$

(iii) f は 奇関数

(iv) f の値域は $q(n)$ 次の $\mathbb{Q}$ 分体に包含

を総て満足するならば,

$$L(1, f) \neq 0, \infty$$

である。

ところで, Baker-Birch-Wirsing [1] によれば, (i) の仮定なしに, 定理 2 は成立する。更に, また

(iii)' f は 偶関数

の場合, (i), (iv) は

$$(i)' \quad \hat{f}(m) = 0$$

(iv)' f の値域は有理数体の代数的閉包に包含

と条件を弱めても, 定理 2 は成立つ。なお, $L(1, f) = 0$

となる f の構成問題に関しては, 例えば, Okada [6] などを参照せよ。

最後に, 条件として強過ぎて, 面白味に欠ける感があるが, Euler の無限積を仮定してみる。これに関連して, Ryavec [7]

の研究がある。このとき、 f は乗法的関数である上に、周期が n であることより、

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad (x, n) = (y, n) = 1$$

が成立つ。故に、 $L(s, f)$ は n の素因子に対応する因子を無視すれば、関数等式を仮定するまでもなく、 $L(s, f)$ は Dirichlet の L 関数と一致する。それにもかからず、次の反例がある。

例 p を奇素数とし、 χ を法 p の非自明な Dirichlet 指標とする。 γ を絶対値が 1 である任意の複素数とし、 $n = p^2$ とおく。このとき、

$$f(x) = \chi(x) \quad (x, n) = 1$$

$$f(p) = \gamma\sqrt{p}$$

$$f(p^2) = 0$$

で基本周期 n の乗法的関数を定義する。 f は完全乗法的ではないので、 $L(s, f)$ は Dirichlet の L 関数と一致しない。一方、 $L(s, f)$ は Euler の無限積の表示を持つ上に、関数等式

$$\Lambda(1-s, f) = \gamma W(\chi) \Lambda(s, \bar{f})$$

を満足する。ここで

$$W(\chi) = \frac{1}{\sqrt{p}} i^{b(\chi)} \sum_{m=1}^{p-1} \chi(m) e^{\frac{2\pi i m}{p}}$$

しかも、 $L(1, f) \neq 0, \infty$ でもある。

直接, f に適当な条件を附加するならば, このような反例を棄却することは容易である。例えば, 定理2の(ii)の条件を仮定すれば, $L(s, f)$ が Euler の無限積の表示を持つことと $L(s, f)$ が Dirichlet の L 関数と一致することは同値であることは明らかである。ところが, 定理2の(ii)と関数等式の双方を仮定しても, $L(s, f)$ が Dirichlet の L 関数と一致しない例は無限に存在する。要するに, Euler の無限積より弱い適切な条件を探ることが, 今後の課題である。

最後に, 次の定理を述べて, この拙論を締め括る。

定理3. n を square free な自然数とする。このとき,

(1) $L(s, f)$ は基本周期 n の Dirichlet 級数展開が出来る。

(2) 関数等式

$$\Lambda(1-s, f) = \omega \Lambda(s, \bar{f}) \quad \exists \omega \in \mathbb{C}$$

が成立つ。

(3) $\lim_{s \rightarrow 1} L(s, f)$ は4収束する。

(4) Euler の無限積の表示を持つ。

以上の条件をすべて満足するならば, $L(s, f)$ は Dirichlet の L 関数と一致する。

n が square free でない場合, このままでは定理は成立しない。更に

$$(5) \quad |f(m)| \leq 1 \quad \forall m$$

を追加すれば, 定理が成立する。

文 献

- [1] A. Baker - B. J. Birch - E. A. Wirsing: On a problem of Chowla, J. Number Theory, 5 (1973), 224-236.
- [2] S. Chowla: The nonexistence of nontrivial linear relations between the roots of certain irreducible equation, J. Number Theory, 2 (1970), 120-123.
- [3] H. Hamburger: Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ -Funktion, Math. Z. 10 (1921), 240-254; ibid. 11 (1921), 224-245; ibid. 13 (1922), 283-311.
- [4] H. Hecke: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Ann. 112 (1936), 644-699.

- [5] T. Okada : On a theorem of S. Chowla,
Hokkaido Math. J. 6 (1977), 66-68.
- [6] T. Okada : Dirichlet series with periodic
algebraic coefficients, J. London Math. Soc.
33 (1986), 13-21.
- [7] C. Ryavec : Riemann's functional equation,
Rocky Mountain J. Math. 5 (1975), 623-627.
- [8] W. Schnee : Die Funktionalgleichung der Zeta-
funktion und der Dirichletschen Reihen mit
periodischen Koeffizienten, Math. Z. 31
(1930), 378-390.
- [9] C. L. Siegel : Bemerkungen zu einem Satz von
Hamburger über die Funktionalgleichung der
Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 86
(1922), 276-279.
- [10] P. Turán : On a characterization of Dirichlet's
L-function, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös
Sect. Math. 8 (1965), 65-69.
- [11] E. T. Whittaker - G. N. Watson : A Course of Modern
Analysis, 4th ed., Cambridge, 1927.