

Silver Machine について

イリノイ大 竹内 外史

名大理 篠田 弄一

Jensen によって証明された Covering Theorem は, fine structure theory の大きな成果の一つであるが, その証明は必ずしも分かり易いものではなかった. この証明を分析する事により, Silver は L -machine の概念を得, 定理の証明を極めて簡単化する事に成功した. L -machine を用いた Covering Theorem の証明を紹介しようというのが小論の目標である. $\neg 0^\#$ により「 L から L への nontrivial な Σ_1 elementary embedding は存在しない」という命題を表わすことにすると, 定理 (Covering Theorem) $\neg 0^\#$ を仮定すると,

$$\forall X \subseteq On \ [|X| > \omega \rightarrow \exists Y \in L (X \subseteq Y \ \& \ |X| = |Y|)]$$

これから cardinal の簡単な計算により,

系 λ が singular cardinal ならば,

$$2^\lambda = \begin{cases} 2^\lambda & \text{if } \exists \tau < \lambda \ 2^\tau = 2^\lambda \\ (2^\lambda)^+ & \text{otherwise} \end{cases}$$

§1. class A の元の有限列全体を A^{ω} で表わすことにする.

定義 1.1. $\mathcal{A} = \langle A, F_i \rangle_{i \in I}$ が algebra とは, 各 F_i が A^{ω} から A への部分関数であることをいう. $X \subseteq A$ が $\forall i \forall \vec{x} \in X^{\omega} [F_i(\vec{x}) \rightarrow F_i(\vec{x}) \in X]$ なる条件を満たすとき, X を $\mathcal{A}$ の subalgebra という. $X \subseteq \mathcal{A}$ に対して X により生成される subalgebra を $\mathcal{A}(X)$ で表わす.

定義 1.2. algebra $\mathcal{A} = \langle A, F_i \rangle_{i \in I}$ から algebra $\mathcal{B} = \langle B, G_i \rangle_{i \in I}$ への 1:1 写像 π が $\pi(F_i(\vec{x})) = G_i(\pi(\vec{x}))$ ($i \in I$) を満たすとき, π を monomorphism という. ただし, $\pi(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) = \langle \pi(x_1), \dots, \pi(x_n) \rangle$.

定義 1.3. algebra $\mathcal{A} = \langle A, F_i \rangle_{i < \omega}$ が machine とは,

(i) $A = O_n$ または $A \in O_n$

(ii) $F_0(\langle \alpha, \beta \rangle) = 0$ if $\alpha < \beta$; $F_0(\vec{x}) \uparrow$ otherwise.

$\mathcal{A} = \langle A, F_i \rangle_{i < \omega}$ を一つの machine とする.

定義 1.4. $\xi \in A$ に対して $\mathcal{A}^{\xi} = \langle \xi, F_i^{\xi} \rangle_{i < \omega}$ を次の様な machine とする:

$F_i^{\xi}(\vec{x}) = F_i(\vec{x})$ if $\vec{x} \in \xi^{\omega}$ & $F_i(\vec{x}) < \xi$; $F_i^{\xi}(\vec{x}) \uparrow$ otherwise

定義 1.5 $\pi: \xi \rightarrow \eta$ が strong $\mathcal{A}$ -map とは, π が $\mathcal{A}^{\xi}$ から $\mathcal{A}^{\eta}$ への monomorphism である事という. $\pi: \xi \rightarrow \eta$ が medium $\mathcal{A}$ -map とは $\exists \delta \leq \eta$ [$\pi: \xi \rightarrow \delta$ is a strong $\mathcal{A}$ -map] なる事という.

定理 1.6. $\pi_1: \xi_1 \rightarrow \eta$, $\pi_2: \xi_2 \rightarrow \eta$ が medium $\mathcal{O}$ -maps で $\text{rng}(\pi_1) \subseteq \text{rng}(\pi_2)$ ならば, $\pi_2^{-1} \circ \pi_1: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ は medium $\mathcal{O}$ -map である.

定理 1.7 $\pi: \xi \rightarrow \eta$ が strong $\mathcal{O}$ -map で, $X \subseteq \xi$ ならば,

$$\pi^* \mathcal{O}^\xi(X) = \mathcal{O}^\eta(\pi^* X)$$

集合 $X \subseteq \mathcal{O}_\eta$ に対し, その order type を $o(X)$ で表わす.
 $\xi = o(X)$ から X への unique order isomorphism を X の collapsing map ということにする.

定義 1.8 $\mathcal{O}$ が collapsing property をもつとは, $\mathcal{O}^\eta$ の かつた subalgebra X に対し, X の collapsing map $\pi: \xi \rightarrow \eta$ ($\xi = o(X)$) が strong $\mathcal{O}$ -map になることをいう.

定義 1.9 $\mathcal{O}$ が finiteness property をもつとは,

$$\forall \eta \in A \exists H_\eta: \text{finite} \subseteq \eta \quad \forall X \subseteq \eta [\mathcal{O}^{\eta+1}(X \cup \{\eta\}) \subseteq \mathcal{O}^\eta(X \cup H_\eta) \cup \{\eta\}]$$

をみたすことをいう.

定理 1.10 κ は limit ordinal, $\eta = \min\{\eta \geq \kappa \mid \exists \alpha < \kappa \exists P: \text{finite} \subseteq \eta \quad o(\mathcal{O}^\eta(\alpha \cup P)) \geq \kappa\}$ とする. このとき, $\mathcal{O}$ が finiteness property をもてば, η は limit ordinal である.

(証明) $\eta = \nu + 1$ と仮定する.

$$\mathcal{O}^{\nu+1}(\alpha \cup P) \subseteq \mathcal{O}^\nu(\alpha \cup (P \cap \nu) \cup H_\nu) \cup \{\nu\}$$

となる有限集合 $H_v \subseteq V$ が存在する. $o(\mathcal{O}^\eta(\alpha \cup P)) \geq \kappa$ ならば, κ は limit ordinal だから $o(\mathcal{O}^\eta(\alpha \cup (P \cap V) \cup H_v)) \geq \kappa$.
これは η の最小性に反する. $\square$

$\langle I, \leq \rangle$ を directed set とする. $\xi_i \in \mathcal{O}_n$ および order preserving map $\pi_{ij}: \xi_i \rightarrow \xi_j$ ($i \leq j \in I$) からなる direct system $\Pi = \langle \xi_i, \pi_{ij} \rangle_{i \leq j \in I}$ を考える. Π の direct limit $\varinjlim_I \Pi$ は linearly ordered set になるが, well-ordered set になるとは限らない. $\varinjlim_I \Pi$ が well-ordered set になるとき, Π を well-founded system ということにする.

定理 1.11 Π が well-founded になるためには次のような列 $\langle i_n \mid n < \omega \rangle$, $\langle \sigma_n \mid n < \omega \rangle$ が存在しないことが必要十分である:

$$i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq \dots, \quad i_n \in I,$$

$$\sigma_n \in \xi_{i_n}, \quad \pi_{i_n i_{n+1}}(\sigma_n) > \sigma_{n+1}.$$

定義 1.12 $\mathcal{O}$ が direct limit property をもつとは, かつて Π を well-founded direct limit system $\Pi = \langle \xi_i, \pi_{ij} \rangle_{i \leq j \in I}$ (π_{ij} は strong $\mathcal{O}$ -map (又は medium $\mathcal{O}$ -map)) に対して, $\pi_{i\infty}: \xi_i \rightarrow \xi_\infty$ が strong $\mathcal{O}$ -map (又は medium $\mathcal{O}$ -map) になることをいう. ここで $\varinjlim_I \Pi$ とその order type ξ_∞ を同一視している.

§2. この § では L -machine を定義する準備として, pairing machine を定義し, それが collapsing property, finiteness property, direct limit property をもつことを証明する. そのために先づ On^{ω} 上に well-ordering $<$ を入れることにする.

定義 2.1 $\vec{\alpha} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle, \vec{\beta} = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle \in On^{\omega}$ に対して,
 $\vec{\alpha} < \vec{\beta} \Leftrightarrow (1) \max(\vec{\alpha}) < \max(\vec{\beta})$

or (2) $\max(\vec{\alpha}) = \max(\vec{\beta})$ & $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m \rangle < \langle \beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n \rangle$; $\alpha_i = \max(\vec{\alpha}) = \max(\vec{\beta}) = \beta_j$

or (3) $\vec{\beta}$ は $\vec{\alpha}$ の順序を変えたもので、辞書式順序に関して $\vec{\alpha} < \vec{\beta}$.

定義 2.2 $J: On^{\omega} \rightarrow On$ を order isomorphism とし, C_i を

$$\begin{cases} C_i(\langle \alpha \rangle) = \beta_i & \text{if } J(\langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \rangle) = \alpha \text{ \& } i < n \\ C_i(\vec{\alpha}) \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する. machine $P_{<} = \langle On, F_0, J, C_i \rangle_{i < \omega}$ を pairing machine という.

J, C_i に関して、次の性質は明らかであろう.

定理 2.3 (1) $\max(\vec{\alpha}) \leq J(\vec{\alpha})$

(2) $C_i(\langle \alpha \rangle) \leq \alpha$ if $C_i(\langle \alpha \rangle) \downarrow$

以下に $P_{<}$ が collapsing, finiteness, direct limit properties

をもつことを示す。紙数の都合で証明はアウトラインだけを述べる。

定理 2.4 $\mathcal{P}_\omega$ は collapsing property をもつ

(証明) $X \subseteq \eta$ を $\mathcal{P}_\omega^\eta$ の subalgebra, $\pi: \xi \rightarrow X$ を X の collapsing map とする。今 $Z = \{\vec{\alpha} \in \mathcal{O}_n^\omega \mid J(\vec{\alpha}) \in X\}$ とおくと, $Z \subseteq X^\omega$ かつ Z は X^ω の initial segment になる。 $J \upharpoonright Z: Z \rightarrow X$ は order isomorphism であるから, Z の order type は ξ である。

$\pi: \xi \rightarrow X$ は自然に order isomorphism $\pi: \xi^\omega \rightarrow X^\omega$ をひきおこす。すると $\pi^{-1}Z$ は ξ^ω の initial segment でその order type は ξ となる。これより

$$\pi(J^{\xi}(\vec{\alpha})) \simeq J^{\eta}(\pi(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \xi^\omega$$

がいえる。また、これから直ちに

$$\pi(C_i^{\xi}(\vec{\alpha})) \simeq C_i^{\eta}(\pi(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \xi^\omega \quad \square$$

定理 2.5 $\mathcal{P}_\omega$ は finiteness property をもつ。

(証明) η をかつてた ordinal とし, $J(\langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1} \rangle) = \eta$ となる $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ をとる。 $H_\eta = \{\beta_i \mid \beta_i \neq \eta \text{ \& } i < n\}$ とすれば, 定理 2.3 により $H_\eta \subseteq \eta$ 。 $X \subseteq \eta$ に対し $Y = \mathcal{P}_\omega^\eta(X \cup H_\eta) \cup \{\eta\}$ とすると, 容易に分かるように Y は $\mathcal{P}_\omega^{\eta+1}$ の subalgebra となる。従って $Y \supseteq \mathcal{P}_\omega^{\eta+1}(X \cup \{\eta\})$ $\square$

定理 2.6 $P_<$ は direct limit property をもつ

(証明) $\Pi = \langle \eta_i, \pi_{ij} \rangle_{i \leq j \in I}$ を well-founded direct system とする. ($\pi_{ij}: \eta_i \rightarrow \eta_j$ は strong $P_<$ -map).

$\pi_{i\infty}: \eta_i \rightarrow \eta_\infty$ が strong $P_<$ -map であることをいう.

$J^{\eta_i}(\vec{\alpha}) \simeq \beta$ とすると $J(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha}))$ に関する帰納法により,

$J(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) = \pi_{i\infty}(\beta)$ を示すことができる. また $J^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha}))$ が定義されていれば, $J^{\eta_i}(\vec{\alpha})$ も定義されていることが簡単な計算によって分かる. したがって

$$\pi_{i\infty}(J^{\eta_i}(\vec{\alpha})) \simeq J^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \eta_i^\omega$$

これより,

$$\pi_{i\infty}(C_n^{\eta_i}(\vec{\alpha})) \simeq C_n^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \eta_i^\omega$$

よって $\pi_{i\infty}: \eta_i \rightarrow \eta_\infty$ は strong $P_<$ -map になる.

同様に, 各 $\pi_{ij}: \eta_i \rightarrow \eta_j$ が medium $P_<$ -map ならば, $\pi_{i\infty}: \eta_i \rightarrow \eta_\infty$ も medium $P_<$ -map になる. $\square$

§3. 次のような ramified language L を考える:

variables: $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$

relation symbols: $\in, =$

propositional connectives: $\neg, \vee$

quantifiers: $\exists^\alpha$

abstraction operators: $\wedge_\alpha$

parenthesis : (,)

定義 3.1 $g(\exists^\alpha) = 2\alpha + 1$, $g(\hat{\alpha}) = 2\alpha + 2$. $\mathcal{L}$ の記号列 Δ に対して, Δ に現われる $\exists^\alpha$, $\hat{\alpha}$ に対する $g(\exists^\alpha)$, $g(\hat{\alpha})$ の最大値を $g(\Delta)$ で表わす.

定義 3.2 (1) t_1, t_2 が constant terms か variables であるとき, $(t_1 = t_2)$, $(t_1 \in t_2)$ は formulas である.

(2) φ, ψ が formulas ならば, $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\exists^\alpha x_i \varphi)$ は formulas である.

(3) $\varphi(x_i)$ が x_i 以外の自由変数を含まない formula で, $g(\varphi(x_i)) < g(\hat{\alpha})$ をみたせば, $(\hat{x}_i^\alpha \varphi(x_i))$ は constant term である.

定義 3.3 $T_\alpha = \{t \mid t \text{ は } (\hat{x}_i^\beta \varphi) \text{ なる形の constant term, } \beta < \alpha\}$. $T = \bigcup_{\alpha \in On} T_\alpha$.

$\mathcal{L}$ の記号および記号列を順序数により, 次のようにコードする.

定義 3.4 $\ulcorner \epsilon \urcorner = J(\langle 0, 0 \rangle)$, $\ulcorner = \urcorner = J(\langle 0, 1 \rangle)$, $\ulcorner \neg \urcorner = J(\langle 0, 2 \rangle)$, $\ulcorner \vee \urcorner = J(\langle 0, 3 \rangle)$, $\ulcorner (\urcorner = J(\langle 0, 4 \rangle)$, $\urcorner \urcorner = J(\langle 0, 5 \rangle)$, $\ulcorner x_i \urcorner = J(\langle 0, 6+i \rangle)$, $\ulcorner \exists^\alpha \urcorner = J(\langle 0, \omega + \alpha \rangle)$, $\ulcorner \hat{\alpha} \urcorner = J(\langle 0, \omega + \alpha, \omega + \alpha \rangle)$. また記号列 $\delta_1 \cdots \delta_n$ に対し, $\ulcorner \delta_1 \cdots \delta_n \urcorner = J(\langle 1, \ulcorner \delta_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \delta_n \urcorner \rangle)$

以後, L の formula あるいは term と, そのコードとを同一視する. したがって formula あるいは term は順序数である. コードに関して次の性質がある.

(1) $\pi: \xi \rightarrow \eta$ が medium P_κ -map で, φ が formula ならば, $\pi(\varphi)$ は φ に現われる $\exists^\alpha, \wedge^\alpha$ を $\exists^{\pi(\alpha)}, \wedge^{\pi(\alpha)}$ に置き換えて得られる formula である. term についても同様.

(2) $\exists^\alpha x_i \varphi(x_i)$ が sentence で, $t \in T_\alpha$ ならば, $\varphi(t) < (\exists^\alpha x_i \varphi)$, $t < (\exists^\alpha x_i \varphi)$.

(3) $\hat{x}_i^\alpha \varphi(x_i)$ が constant term で, $t \in T_\alpha$ ならば, $\varphi(t) < (\hat{x}_i^\alpha \varphi)$ かつ $t < (\hat{x}_i^\alpha \varphi)$.

(4) $\varphi < (\neg \varphi)$, $\varphi < (\varphi \vee \psi)$, $\psi < (\varphi \vee \psi)$

(5) $t_i < (t_1 = t_2)$ ($i=1,2$), $t_i < (t_1 \in t_2)$ ($i=1,2$)

定義 3.5 $D(\varphi)$, $D(t)$ を次のように定義する.

(1) $D(t_1 = t_2) \leftrightarrow D(t_1) = D(t_2)$

(2) $D(t_1 \in t_2) \leftrightarrow D(t_1) \in D(t_2)$

(3) $D(\neg \varphi) \leftrightarrow \neg D(\varphi)$

(4) $D(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow D(\varphi) \vee D(\psi)$

(5) $D(\exists^\alpha x_i \varphi(x_i)) \leftrightarrow \exists t \in T_\alpha D(\varphi(t))$

(6) $D(\hat{x}_i^\alpha \varphi(x_i)) \leftrightarrow \{D(t) \mid t \in T_\alpha \ \& \ D(\varphi(t))\}$

$L_\alpha = \{D(t) \mid t \in T_\alpha\}$, $L = \bigcup_{\alpha \in O_n} L_\alpha$.

定義 3.6 L -machine $M = \langle O_n, F_0, J, C_i, T, K \rangle_{i < \omega}$:

(1). $P_\omega = \langle O_n, F_0, J, C_i \rangle_{i < \omega}$ は pairing machine

(2). φ が $\mathcal{L}$ の sentence ならば,

$$T(\langle \varphi \rangle) = 1 \text{ if } D(\varphi); \quad T(\langle \varphi \rangle) = 0 \text{ otherwise}$$

(3). $\exists^\alpha x_i \varphi(x_i)$ が $\mathcal{L}$ の sentence で, $D(\exists^\alpha x_i \varphi(x_i))$ ならば,

$$K(\langle \exists^\alpha x_i \varphi(x_i) \rangle) = \min \{ t \in T_\alpha \mid D(\varphi(t)) \}$$

(4). (2), (3) により定まらない $T(\vec{\alpha})$, $K(\vec{\alpha})$ の値は, undefined.

L -machine M が collapsing, finiteness, direct limit の各性質をもつことを示そう.

定理 3.7 M は collapsing property をもつ.

(証明) X を M^η の subalgebra とし, $\pi: \bar{\eta} \rightarrow X$ を X の collapsing map とする. 定理 2.4 により $\pi: \bar{\eta} \rightarrow \eta$ は strong P_ω -map である. $\bar{\varphi} < \bar{\eta}$ を $\mathcal{L}$ の sentence に対して,

$$D(\bar{\varphi}) \longleftrightarrow D(\pi(\bar{\varphi}))$$

がいえる. これより $\pi(T^{\bar{\eta}}(\vec{\alpha})) \simeq T^\eta(\pi(\vec{\alpha}))$ がいえる. また,

$\exists^\alpha x_i \bar{\theta}(x_i) < \bar{\eta}$ ならば, $\pi(\exists^\alpha x_i \bar{\theta}(x_i)) = \exists^\alpha x_i \theta(x_i)$ となり

$\bar{t} = K(\langle \exists^\alpha x_i \bar{\theta}(x_i) \rangle)$ とすると, $\pi(\bar{t}) = K(\langle \exists^\alpha x_i \theta(x_i) \rangle)$ となる.

ただし, $\alpha = \pi(\vec{\alpha})$, $\theta = \pi(\bar{\theta})$. よって $\pi(K^{\bar{\eta}}(\vec{\alpha})) \simeq K^\eta(\pi(\vec{\alpha}))$.

定理 3.8 M は finiteness property を持つ

(証明) $H_\eta \subseteq \eta$ を定理 2.5 の証明のようにとり、 $H'_\eta = H_\eta \cup \{K(<\eta>)\}$ とすればよい。□

定理 3.9 M は direct limit property をもつ

(証明) $\langle \eta_i, \pi_{ij} \rangle_{i \leq j \in I}$ を well-founded direct system of strong M -maps とする。定理 2.6 により $\pi_{i\infty}: \eta_i \rightarrow \eta_\infty$ は strong R -map である。 φ を $\mathcal{L}$ の sentence とすると、 φ に関する帰納法により、 $\varphi < \eta_i$ ならば、

$$D(\varphi) \longleftrightarrow D(\pi_{i\infty}(\varphi))$$

が成り立つことを示せる。これより直ちに

$$\pi_{i\infty}(T^{\eta_i}(\vec{\alpha})) \simeq T^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) \text{ for all } \vec{\alpha} \in \eta_i^\omega$$

また $\varphi = \exists^\alpha x_i \theta(x_i) < \eta_i$, $K^{\eta_i}(<\varphi>) = t$ ならば、

$$\pi_{i\infty}(\varphi) = \exists^{\pi_{i\infty}(\alpha)} x_j \pi_{i\infty}(\theta)(x_j) \text{ であり } K^{\eta_\infty}(<\pi_{i\infty}(\varphi)>) = \pi_{i\infty}(t)$$

となる事が簡単な計算により分かる。ゆえに、

$$\pi_{i\infty}(K^{\eta_i}(\vec{\alpha})) \simeq K^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) \text{ for all } \vec{\alpha} \in \eta_\infty^\omega \quad \square$$

§4. 定義 4.1 $\langle \delta, \alpha, P \rangle$ が acceptable triple であるとは、

$$(1) \delta, \alpha \in On \text{ \& } \alpha \leq \delta$$

$$(2) P: \text{finite} \subseteq \delta$$

$$(3) \delta = M^\delta(\alpha \cup P)$$

が成り立つことをいう。

定義 4.2 $\pi: \langle \delta, \alpha, P \rangle \rightarrow \langle \delta', \alpha', P' \rangle$ が acceptable map とは,

- (1) $\langle \delta, \alpha, P \rangle, \langle \delta', \alpha', P' \rangle$ は acceptable triples
- (2) $\pi: \delta \rightarrow \delta'$ は medium M -map
- (3) $\alpha \leq \alpha'$ & $\pi \upharpoonright \alpha = \text{the identity map of } \alpha$

N を admissible set で, $\omega \in N$ なるものとする. $\langle \delta, \alpha, P \rangle, \langle \delta', \alpha', P' \rangle \in N$ で $\pi: \langle \delta, \alpha, P \rangle \rightarrow \langle \delta', \alpha', P' \rangle$ が acceptable map ならば, N の中で π は自然に構成できて, $\pi \in N$ となる.

定義 4.3 κ を limit ordinal とする. $\Pi = \langle \langle \delta_i, \alpha_i, P_i \rangle, \pi_{ij} \rangle_{i, j \in I}$ が κ -direct limit system であるとは,

- (1) $\langle \delta_i, \pi_{ij} \rangle_{i, j \in I}$ は direct system of medium M -maps
- (2) $\pi_{ij}: \langle \delta_i, \alpha_i, P_i \rangle \rightarrow \langle \delta_j, \alpha_j, P_j \rangle$ は acceptable map
- (3) $\delta_i < \kappa$
- (4) $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ は cofinal in κ .

補題 4.4 μ, κ を $\mu \geq \kappa$ なる limit ordinals とする.

$$(*) \quad \forall \eta < \mu \quad \forall \alpha < \kappa \quad \forall Q \subseteq \eta \quad [\alpha \leq \eta \text{ \& \> } Q: \text{有限} \rightarrow o(M^\eta(\alpha \cup Q)) < \kappa]$$

が成り立てば, κ -direct limit system で, well-founded かつ, その極限が μ となるものが存在する.

(証明) $I = \{ \langle \eta, \alpha, Q \rangle \mid \eta < \mu \text{ \& \> } \alpha < \kappa \text{ \& \> } \alpha \leq \eta \text{ \& \> } Q: \text{有限} \subseteq \eta \}$ とする. $i = \langle \eta, \alpha, Q \rangle \in I$ に対して $\eta_i = \eta, \alpha_i = \alpha, Q_i = Q$ で表わす. I に次の様な順序を入れる:

$$i \leq j \iff \eta_i \leq \eta_j \text{ \& \& } \alpha_i \leq \alpha_j \text{ \& \& } Q_i \subseteq Q_j.$$

明らかに $\langle I, \leq \rangle$ は directed set になる. $X_i = M^{\eta_i}(\alpha_i \cup Q_i)$ とし, $P_i: \delta_i \rightarrow X_i$ を collapsing map とすると (*) より $\delta_i < \kappa$. $P_i = P_i^{-1} Q_i$ とおく. $i \leq j$ ならば, $X_i \subseteq X_j$ だから定理 1.6 により, $\pi_{ij} = P_j^{-1} \circ P_i: \delta_i \rightarrow \delta_j$ は medium M -map になる. $\Pi = \langle \langle \delta_i, \alpha_i, P_i \rangle, \pi_{ij} \rangle_{i \leq j}$ が κ -direct limit system でその極限が μ であることは容易に確かめられる. $\square$

補題 4.5 κ を limit ordinal, $\langle I_1, \leq_1 \rangle, \langle I_2, \leq_2 \rangle$ を directed sets で $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ とするものとする. $\Pi_1 = \langle \langle \xi_i, \alpha_i, P_i \rangle, P_{ij} \rangle_{i, j \in I_1}$, $\Pi_2 = \langle \langle \eta_i, \beta_i, Q_i \rangle, \theta_{ij} \rangle_{i, j \in I_2}$ が well-founded κ -d.l.s. で, $\varinjlim \Pi_1 \leq \varinjlim \Pi_2$ ならば, 次の条件を満たす κ -d.l.s. $\Pi = \langle \langle \zeta_i, \gamma_i, R_i \rangle, \pi_{ij} \rangle_{i, j \in I}$ が存在する.

$$(1) \quad I = I_1 \cup I_2$$

$$(2) \quad i, j \in I, \quad i \leq j \implies (i, j \in I_1 \text{ \& \& } i \leq_1 j) \vee (i, j \in I_2 \text{ \& \& } i \leq_2 j) \\ \vee (i \in I_1 \text{ \& \& } j \in I_2)$$

$$(3) \quad \langle \zeta_i, \gamma_i, R_i \rangle = \begin{cases} \langle \xi_i, \alpha_i, P_i \rangle & \text{if } i \in I_1 \\ \langle \eta_i, \beta_i, Q_i \rangle & \text{if } i \in I_2 \end{cases}$$

$$(4) \quad \pi_{ij} = P_{ij} \text{ if } i \leq_1 j, \quad \pi_{ij} = \theta_{ij} \text{ if } i \leq_2 j$$

(証明) $i \in I_1, j \in I_2$ に対し $i \leq j$ と π_{ij} を定めればよい.

$$i \leq j \iff \xi_i \leq \eta_j \text{ \& \& } \alpha_i \leq \beta_j \text{ \& \& } P_{i\infty} P_i \subseteq \text{rng}(\theta_{j\infty})$$

とすると, $\text{rng}(P_{i\infty}) \subseteq \text{rng}(\theta_{j\infty})$ となる. そこで $\pi_{ij} = \theta_{j\infty}^{-1} \circ P_{i\infty}$ とすれば, 定理 1.6 により $\pi_{ij}: \xi_i \rightarrow \eta_j$ は medium M -map になる. $\square$

補題 4.6 κ を L の中の uncountable cardinal とし,
 $h: L_{\bar{\kappa}} \rightarrow L_{\kappa}$ を elementary embedding とする. well-founded
 $\bar{\kappa}$ -d.l.s. $\bar{\Pi} = \langle \langle \bar{\delta}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{P}_i \rangle, \bar{\pi}_{ij} \rangle_{i \leq j \in I}$ に対して, $\Pi = h(\bar{\Pi}) =$
 $\langle \langle h(\bar{\delta}_i), h(\bar{\alpha}_i), h(\bar{P}_i) \rangle, h(\bar{\pi}_{ij}) \rangle_{i \leq j \in I}$ とする. もし Π が
 well-founded κ -d.l.s. ならば, medium M -map $h^*: \bar{\mu} \rightarrow \mu$
 で, $h^* \upharpoonright \bar{\kappa} = h \upharpoonright \bar{\kappa}$ となるものが存在する. ただし, $\bar{\mu} = \lim_{\rightarrow} \bar{\Pi}$,
 $\mu = \lim_{\rightarrow} \Pi$.

(証明) $\bar{\sigma} < \bar{\delta}_i$ に対して,

$$h^*(\bar{\pi}_{i\infty}(\bar{\sigma})) = \pi_{i\infty}(h(\bar{\sigma}))$$

とすればよい. ただし $\pi_{ij} = h(\bar{\pi}_{ij})$. $\square$

§5. $\mathcal{S}$ により, 次の命題を表わす:

$$\forall X \subseteq On \ [|X| > \omega \rightarrow \exists Y \in L \ (X \subseteq Y \ \& \ |X| = |Y|)].$$

また **I** により, 次の命題を表わすことにする:

$$\forall \bar{\mu} \ \forall \pi \ [\bar{\mu}: \text{regular cardinal} \ \& \ \pi: \bar{\mu} \rightarrow On \ \text{medium } M\text{-map} \\ \rightarrow \pi = \text{the identity map on } \bar{\mu}]$$

この § で, **I** $\Rightarrow$ $\mathcal{S}$ を証明する. そこで $\neg \mathcal{S}$ を仮定する.

定義 5.1 $\kappa = \min\{\lambda \mid \exists X \subseteq \lambda [|X| > \omega \ \& \ \forall Y \in L (X \subseteq Y \rightarrow |X| < |Y|)]\}$

また $X \subseteq \kappa$ を

$$(**) \quad |X| > \omega \ \& \ \forall Y \in L (X \subseteq Y \rightarrow |X| < |Y|)$$

をみたすものとする.

補題 5.2 (1) $\forall Y \in L (X \subseteq Y \rightarrow |Y|^L \geq \kappa)$

(2) $L \models \kappa$ is a cardinal

$$(3) \quad \bigcup X = \kappa$$

$$(4) \quad |X| < |\kappa|$$

(証明) κ の最小性および X が $(**)$ を満す事から明らか. $\square$

補題 5.3 次の条件をみたす elementary embedding

$h: L_{\bar{\kappa}} \rightarrow L_{\kappa}$ が存在する:

$$(1) \quad X \subseteq \text{rng}(h), \quad |X| = \text{rng}(h)$$

(2) $\bar{\Pi}$ が well-founded $\bar{\kappa}$ -d.l.s. ならば, $h(\bar{\Pi})$ は well-founded κ -d.l.s. である.

この補題の証明は、次の § である. 今、 $h: L_{\bar{\kappa}} \rightarrow L_{\kappa}$ 以上の様なものとする.

定理 5.4 $\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{S}$

(証明) $\neg \mathbf{S}$ と仮定し、 $\neg \mathbf{I}$ を示す. 補題 4.4, 4.6, 5.2, 5.3 により、或る regular cardinal $\bar{\mu} \geq \bar{\kappa}$ に対し、

$$(*) \quad \forall \bar{\eta} < \bar{\mu} \ \forall \bar{\alpha} < \bar{\kappa} \ \forall \bar{Q} \subseteq \bar{\eta} \ [\bar{\alpha} \leq \bar{\eta} \ \& \ \bar{Q}: \text{有限} \rightarrow o(M^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha} \cup \bar{Q})) < \bar{\kappa}]$$

を示せばよい. 我々は、かつ $\bar{\mu}$ は limit ordinal $\bar{\mu} \geq \bar{\kappa}$ に対

して (*) が成り立つ事を示す. (*) が成り立たないとする

$\exists \bar{\eta} < \bar{\mu}$ such that

$$\exists \bar{\alpha} < \bar{\kappa} \exists \bar{Q} \subseteq \bar{\eta} [\bar{\alpha} \leq \bar{\eta} \ \& \ \bar{Q}: \text{有限} \ \& \ o(M^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha} \cup \bar{Q})) \geq \bar{\kappa}]$$

そのような $\bar{\eta}$ で最小のものをとる. 定理 1.10 により $\bar{\eta}$ は limit ordinal である. まず, $\bar{\eta} = M^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha} \cup \bar{Q})$ と仮定してよい事に注意する. (さもなければ, $\pi: \tilde{\eta} \rightarrow M^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha} \cup \bar{Q})$ を collapsing map とし, $\bar{Q}' = \pi^{-1}\bar{Q}$ とすると $\tilde{\eta} = M^{\tilde{\eta}}(\bar{\alpha} \cup \bar{Q}')$ であるが, $\bar{\eta}$ の最小性から $\tilde{\eta} = \bar{\eta}$ となる). $\bar{\eta}$ に対しては (*) が成り立つから, medium M -map $h^*: \bar{\eta} \rightarrow On$ で, $h^* \upharpoonright \bar{\kappa} = h \upharpoonright \bar{\kappa}$ となるものが存在する. $\eta = \sup\{h^*(\bar{\sigma}) + 1 \mid \bar{\sigma} < \bar{\eta}\}$ とすれば, $h^*: \bar{\eta} \rightarrow \eta$ は strong M -map になる. $Y = M^{\eta}(h(\bar{\alpha}) \cup h^{**}\bar{Q})$ とすると, 明らかに $Y \in L$. しかも $|Y|^L = |h(\bar{\alpha})|^L < \kappa$.

また, 定理 1.7, 補題 5.3 より

$$X \subseteq \text{rng}(h) \subseteq \text{rng}(h^*) = h^* M^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha} \cup \bar{Q}) = M^{\eta}(h^{**}\bar{\alpha} \cup h^{**}\bar{Q})$$

明らかに $M^{\eta}(h^{**}\bar{\alpha} \cup h^{**}\bar{Q}) \subseteq Y$ であるから, $X \subseteq Y$.

以上の事は, 補題 5.2 (1) に反する. $\square$

§6. この § で, 補題 5.3 の証明を行う. 証明は $cf(\kappa) = \omega$ の場合と $cf(\kappa) > \omega$ の場合に分けてある. 最初に, $cf(\kappa) = \omega$ の場合を考えよう.

定義 6.1 $Z \subseteq L_{\kappa}$ とし, $\Pi = \langle \langle \delta_i, \alpha_i, P_i \rangle, \pi_{ij} \rangle_{i \leq j \in I}$ を κ -d.l.s.

とする.

$$(1) \pi \in Z \iff \delta_i, \alpha_i, p_i, \pi_{ij} \in Z$$

$$(2) \pi \text{ は } Z\text{-well-founded でない} \iff \exists \langle i_n | n < \omega \rangle \exists \langle \sigma_n | n < \omega \rangle$$

$$i_n \leq i_{n+1} \in I \text{ \& } \sigma_n < \delta_{i_n} \text{ \& } \pi_{i_n i_{n+1}}(\sigma_n) > \sigma_{n+1}$$

補題 6.2 $Z < L_\kappa$, $X \subseteq Z$, $|X| = |Z|$ と仮定すると、次の条件を満たす $Z' < L_\kappa$ が存在する:

$$(1) Z \subseteq Z' \text{ \& } |Z'| = |X|$$

(2) $\pi \in Z$ が well-founded でない κ -d.l.s. ならば、 π は Z' -well-founded でない.

(証明) $h: L_{\bar{\kappa}} \rightarrow L_\kappa$ を $\text{rng}(h) = Z$ なる elementary embedding とする. well-founded $\bar{\kappa}$ -d.l.s. $\bar{\pi}$ で、 $h(\bar{\pi})$ が well-founded でないものが存在するとし、 $\lim_{\bar{\kappa}} \bar{\pi}$ が最小になるものを $\bar{\pi}_1 = \langle \langle \bar{\xi}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{p}_i \rangle, \bar{p}_{ij} \rangle_{i,j \in I_1}$ とする. $h(\bar{\pi}_1) = \langle \langle \xi_i, \alpha_i, p_i \rangle, p_{ij} \rangle_{i,j \in I_1}$ は well-founded でないから、定理 1.11 より、列 $\langle i_n | n < \omega \rangle$, $\langle \sigma_n | n < \omega \rangle$ で、

$$i_n \leq i_{n+1} \text{ \& } \sigma_n < \xi_{i_n} \text{ \& } p_{i_n i_{n+1}}(\sigma_n) > \sigma_{n+1}$$

を満たすものが存在する. $Z' < L_\kappa$ を $Z \cup \{\sigma_n | n < \omega\} \subseteq Z'$ かつ $|Z'| = |Z|$ なるものとする. (2) を示そう. $\pi_2 = \langle \langle \eta_i, \beta_i, Q_i \rangle, \theta_{ij} \rangle_{i,j \in I_2} \subseteq Z$ を well-founded でない κ -d.l.s. とする. $\bar{\pi}_2 = \langle \langle \bar{\eta}_i, \bar{\beta}_i, \bar{Q}_i \rangle, \bar{\theta}_{ij} \rangle_{i,j \in I_2}$ を $h(\bar{\pi}_2) = \pi_2$ なる $\bar{\kappa}$ -d.l.s. と

する. $\bar{\Pi}_2$ は well-founded であると仮定してよい. すると,
 $\lim_{\rightarrow} \bar{\Pi}_1 \leq \lim_{\rightarrow} \bar{\Pi}_2$ であるから, 補題 4.5 の条件 (i) ~ (4) をみたす $\bar{\kappa}$ -d.l.s. $\bar{\Pi} = \langle \langle \bar{r}_i, \bar{y}_i, \bar{R}_i \rangle, \pi_{ij} \rangle_{i,j \in I}$ が存在する. 今,
 $j_n \in I_2$ を $i_n \leq j_n$ なるようにとり, $\pi_{ij} = h(\pi_{ij})$, $\sigma'_n = \pi_{i_n j_n}(\sigma_n)$ とすると $\sigma'_n \in Z'$ であって $\theta_{i_n j_n}(\sigma'_n) > \sigma'_{n+1}$ となる. 従って, $\bar{\Pi}_2$ は Z' -well-founded ではない. $\square$

補題 5.3 の証明 ($\text{cf}(\kappa) = \omega$ の場合)

$Z \subset L_\kappa$ で, 次の (a), (b) をみたすものを求めればよい.

(a) $X \subseteq Z$, $|Z| = |X|$

(b) $\Pi \subseteq Z$ が Z -well-founded κ -d.l.s. ならば, Π は well-founded である.

いま, Π の index set が可算であるとき, Π を可算な system ということにすると, (b) は次の (b') におきかえてよい事に注意しよう.

(b') $\Pi \subseteq Z$ が可算な Z -well-founded κ -d.l.s. ならば, Π は well-founded である.

そこで, (a), (b') をみたす Z をつくろう. 補題 6.2 を繰返し用いることにより, 次の条件 (i) ~ (iii) をみたす Z_α ($\alpha < \omega_1$) が存在する:

(i) $Z_\alpha \subset L_\kappa$, $X \subseteq Z_\alpha$, $|Z_\alpha| = |X|$

(ii) $\alpha < \beta \rightarrow Z_\alpha \subseteq Z_\beta$

(iii) $\Pi \subseteq Z_\alpha$ が well-founded でない κ -d.l.s. ならば, Π は $Z_{\alpha+1}$ -well-founded でない.

$Z = \bigcup_{\alpha < \omega_1} Z_\alpha$ とおけば, Z が (a), (b') を満たすことは明らかであろう. $\square$

次に $\text{cf}(\kappa) > \omega$ の場合を考えよう. 必要ならば, X の κ での closure を考えることにより, X は closed unbounded in κ と仮定してよい. $S = \{\lambda \in X \mid \text{cf}(\lambda) = \omega\}$ とする.

補題 6.3 $Z < L_\kappa$ を $X \subseteq Z$, $|Z| = |X|$ なるものとする. 次の (1), (2) を満たす $Z' < L_\kappa$ が存在する:

$$(1) \quad Z \subseteq Z', \quad |Z'| = |X|$$

(2) $\lambda \in S$ で, $\Pi \subseteq Z$ が well-founded でない λ -d.l.s. ならば, Π は Z' -well-founded でない.

(証明) 補題 6.2 の証明から分かるように, 各 $\lambda \in S$ に対し, 適当な可算集合 $A_\lambda \subseteq \lambda$ をとれば,

$Z \cup A_\lambda \subseteq Z' < L_\kappa \rightarrow Z'$ は λ に対して (2) を満たす
とできる. そこで, $Z' < L_\kappa$ を $\bigcup_{\lambda \in S} A_\lambda \cup Z \subseteq Z'$ かつ,
 $|Z'| = |X|$ となるようにとればよい. $\square$

これから, 前と同様にして,

系 6.4 次の (1), (2) を満たす $Z < L_\kappa$ が存在する:

$$(1) \quad X \subseteq Z, \quad |Z| = |X|$$

(2) $\lambda \in S$ で, $\Pi \subseteq Z$ が可算な Z -well-founded λ -d.l.s. ならば, Π は well-founded である.

補題 5.3 の証明 ($cf(\kappa) > \omega$ の場合)

$\Pi = \langle \langle \delta_i, \alpha_i, P_i \rangle, \pi_{ij} \mid i, j \in I \rangle \subseteq Z$ を well-founded でない κ -d.l.s. とする. Π が Z -well-founded でない 事を示せばよい. (Z は系 6.4 の条件を満たすもの).

Π は well-founded でないから, $\langle i_n \mid n < \omega \rangle, \langle \sigma_n \mid n < \omega \rangle$ で, すべての $n < \omega$ に対し,

$$i_n \in I \text{ \& \> } \sigma_n \in \delta_{i_n} \text{ \& \> } i_n \leq i_{n+1} \text{ \& \> } \pi_{i_n i_{n+1}}(\sigma_n) > \sigma_{n+1}$$

となるものが存在する. $cf(\kappa) > \omega$ なることと, X が closed unbounded in κ なることから, 次の (i) ~ (iii) を満たすような $j_n \in I$ をみつけることができる:

$$(i) \quad i_n \leq j_n, \quad j_n \leq j_{n+1}$$

$$(ii) \quad \lambda = \sup_{n < \omega} \delta_{j_n} \in S$$

$$(iii) \quad \Pi' = \Pi \upharpoonright \{j_n \mid n < \omega\} \text{ は可算な } \lambda\text{-d.l.s. である.}$$

そこで, $\sigma'_n = \pi_{i_n j_n}(\sigma_n)$ とすると, $\pi_{j_n j_{n+1}}(\sigma'_n) > \sigma'_{n+1}$ であるから, Π' は well-founded でない. Z のとり方から, Π' は Z -well-founded でない. したがって Π も Z -well-founded でない. $\square$

最後に *Covering Theorem* を証明しよう。 $\neg S$ と仮定する。
 $h: L_{\kappa} \rightarrow L_{\kappa}$ を補題 5.3 のようにとる。定理 5.4 の証明から
 分かるように、

(*) $\forall \eta \forall \bar{\alpha} < \bar{\kappa} \forall \bar{Q} \subseteq \eta [\bar{\alpha} \leq \eta \ \& \ \bar{Q}: \text{有限} \rightarrow {}^o(M^{\eta}(\bar{\alpha} \cup \bar{Q})) < \bar{\kappa}]$
 が成り立つ。 $I = \{ \langle \eta, \bar{\alpha}, \bar{Q} \rangle \mid \eta \in On \ \& \ \bar{\alpha} < \bar{\kappa} \ \& \ \bar{\alpha} \leq \eta \ \& \ \bar{Q}: \text{有限} \ \& \ \bar{Q} \subseteq \eta \}$ とすると I は proper class になるが、これから
 補題 4.4 のように $\bar{\kappa}$ -d.l.s. $\bar{\Pi} = \langle \langle \bar{\delta}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{P}_i \rangle, \pi_{ij} \rangle_{i,j \in I}$ を
 つくると、 $\varinjlim_I \bar{\Pi} = On$ となる。 $\Pi = h(\bar{\Pi})$ とすると、 Π
 は well-founded κ -d.l.s. で $\varinjlim_I \Pi = On$ となる。
 そこで補題 4.6 のように $h^*: On \rightarrow On$ を定めると、 h^* は M
 から M へ a monomorphism となる。今 $j: L \rightarrow L$ を
 $j(D(\bar{E})) = D(h^*(\bar{E}))$ とすれば、 j は nontrivial な Σ_1
 elementary embedding になる。 $\square$

参考文献

- [1] R. B. Jensen : The fine structure of the
 constructible hierarchy, Ann. Math. Logic 4 (1972)
- [2] K. J. Devlin & R. B. Jensen ; Marginalia to
 a theorem of Silver, Lecture Notes in Math. 499
 Springer-Verlag (1975) 115-142

Silver machine について

訂正

1. 定義 4.3 に次の (5), (6) を付け加える.

$$(5) \forall i, j \in I \exists k \in I [i < k \wedge j < k]$$

$$(6) i < j \Rightarrow \sup \{ \pi_{ij}(v) + 1 : v < \delta_i \} < \delta_j$$

2. 補題 4.4 の証明において, I 上の順序を次のようにかえる:

$$i < j \iff \eta_i \leq \eta_j \text{ \& \& } \alpha_i \leq \alpha_j \text{ \& \& } Q_i \subseteq Q_j \text{ \& \& } \eta_i \in Q_j$$

3. 補題 4.5 の証明において, $\leq$ の定義を次のようにする.

$$i < j \iff \xi_i \leq \eta_j \text{ \& \& } \alpha_i \leq \beta_j \text{ \& \& } p_{i\infty} p_i \in \text{rng}(\theta_{j\infty}) \\ \text{ \& \& } \sup \{ p_{i\infty}(v) + 1 : v < \xi_i \} \in \text{rng}(\theta_{j\infty})$$